

## B<sub>4</sub>. Εστιανός Πίνακας - Κυρώση

**Άσκηση 1:** Να χαρακτηρισθούν οι παραπάνω ελεύθερες σεφραγωνιές μορφής  $Q(x,y)$ , ως προς το πρόσημο. Σε κάθε περίπτωση, να βρεθεί και ο αντίστοιχος συμερτινός πίνακας  $S$ .

Λύση:

►  $Q(x,y) = x^2 + 4y^2 - xy = x^2 - xy + 4y^2$

Έχουμε  $\alpha=1$ ,  $\beta=-\frac{1}{2}$ ,  $\gamma=4$  οπότε το πρόσημο της  $Q$  προαιτείται από την οριζούσα:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\gamma - \beta^2 = 1 \cdot 4 - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} > 0$$

Επειδή  $\alpha=1>0$ ,  $\gamma=4>0$  και  $\Delta>0$  τότε η  $Q$  είναι θετική οριζόντια.

Ο αντίστοιχος συμερτινός πίνακας είναι:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix}$$

►  $Q(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2xy = x^2 - 2xy + 4y^2$

Έχουμε  $\alpha=1$ ,  $\beta=-2$ ,  $\gamma=4$  οπότε το πρόσημο της  $Q$  προαιτείται από την οριζούσα:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

Επειδή  $a=1>0$ ,  $\gamma=4>0$  και  $\Delta=3>0$  τότε η  $Q$  είναι θετικά οριζόντια.

Ο αντίστοιχος συμεριζός πίνακας είναι:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

►  $Q(x,y) = x^2 + 4y^2 - 3xy = x^2 - 3xy + 4y^2$

Έχουμε  $a=1$ ,  $\beta=-\frac{3}{2}$ ,  $\gamma=4$  οπότε η πρόσημη συμεριζός στη  $Q$  προκύπτει από την οριζόντια:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 4 \end{vmatrix} = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4} > 0$$

Επειδή  $a=1>0$ ,  $\gamma=4>0$ , και  $\Delta=\frac{7}{4}>0$  τότε η  $Q$  είναι θετικά οριζόντια.

Ο αντίστοιχος συμεριζός σύμμαχος πίνακας είναι:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix}$$

►  $Q(x,y) = -x^2 - 2y^2 - xy = -x^2 - xy - 2y^2$

Έχουμε  $a=-1$ ,  $\beta=-\frac{1}{2}$ ,  $\gamma=-2$  τότε η πρόσημη συμεριζός στη  $Q$  προκύπτει από την οριζόντια:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{vmatrix} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} > 0$$

Επειδή  $\alpha = -1 < 0$ ,  $\gamma = -2 < 0$  και  $\Delta > 0$  τότε η  $Q$  είναι αρνητική οριζέντη.

Ο αντίστοιχος συμβαλλόντων πίνακας είναι:

$$S = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

►  $Q(x,y) = -x^2 - 2y^2 - 3xy = -x^2 - 3xy - 2y^2$

Έχουμε  $\alpha = -1$ ,  $\beta = -\frac{3}{2}$ ,  $\gamma = -2$ , οπότε ως πρόσημο της  $Q$  προαιτείται από την οριζόντια:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{vmatrix} = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4} < 0$$

Επειδή  $\Delta < 0$  τότε η  $Q$  είναι αριστη. Ο αντίστοιχος συμβαλλόντων πίνακας είναι:

$$S = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

►  $Q(x,y) = x^2 + xy$

Έχουμε  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \frac{1}{2}$ ,  $\gamma = 0$  οπότε ως πρόσημο της  $Q$  προαιτείται από την οριζόντια:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} < 0$$

Επειδή  $\Delta < 0$  τότε η  $Q$  είναι αριστη. Ο αντίστοιχος συμβαλλόντων πίνακας είναι:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

►  $Q(x,y) = x^2 - 4y^2 + xy = x^2 + xy - 4y^2$

Έχουμε  $\alpha=1$ ,  $\beta=\frac{1}{2}$ ,  $\gamma=-4$  οπότε ως πρόσημο στη  $Q$  προκύπτει από την ορίωση:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -4 \end{vmatrix} = -4 - \frac{1}{4} = -\frac{17}{4} < 0$$

Επειδή  $\Delta < 0$  τότε η  $Q$  είναι αριθμός. Ο αυτοριζόνας συμεριζόμενος πίνακας είναι:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -4 \end{bmatrix}$$

Σημείωση: Όταν αγκυρώνουμε την  $Q$  είναι πάντα αριθμός.

►  $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2$

Έχουμε  $\alpha=1$ ,  $\beta=1$ ,  $\gamma=2$ ,  $\delta=\varepsilon=\zeta=0$ , οπότε ως πρόσημο στη  $Q$  προκύπτει από την ορίωση:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \delta & \zeta \\ \delta & \beta & \varepsilon \\ \zeta & \varepsilon & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2 > 0$$

Επειδή  $\alpha=1>0$ ,  $\beta=1>0$ ,  $\gamma=2>0$  και  $\Delta>0$  τότε η  $Q$  είναι θετική οριζόντια. Ο αυτοριζόνας συμεριζόμενος πίνακας είναι:

$$\blacktriangleright Q(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2$$

Έχουμε  $a=1, b=1, c=-2, d=e=f=0$ , οπότε ως πρόσημο της  $Q$  προνύπτει από την φρίκασσα:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 < 0$$

Επειδή  $\Delta < 0$  τότε η  $Q$  είναι αόριστη. Ο αντίστοιχος συμμετρικός πίγμανος είναι:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\blacktriangleright Q(x,y,z) = x^2 - 4y^2 + z^2 + xy$$

Έχουμε  $a=1, b=-4, c=1, d=\frac{1}{2}, e=f=0$  οπότε ως πρόσημο της  $Q$  προνύπτει από την φρίκασσα:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -4 \end{vmatrix} = -4 - \frac{1}{4} = -\frac{17}{4} < 0$$

Επειδή  $\Delta < 0$  τότε η  $Q$  είναι αόριστη. Ο αντίστοιχος συμμετρικός πίγμανος είναι:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

►  $Q(x,y) = x^2$

Έχουμε  $a=1$ ,  $\beta=\gamma=0$  οπότε το πρόσωπο της  $Q$  προκύπτει από την οριδωση:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Επειδή  $a=1>0$ ,  $\gamma=0$  και  $\Delta=0$  τότε η  $Q$  είναι

θετική μηνιδιού. Ο αντιστροφός συμβατικός πίνακας είναι:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

►  $Q(x,y) = xy$

Έχουμε  $a=\gamma=0$ ,  $\beta=\frac{1}{2}$  οπότε το πρόσωπο της  $Q$  προκύπτει από την οριδωση:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} < 0$$

Επειδή  $\Delta < 0$  τότε η  $Q$  είναι αρνητική. Ο αντιστροφός συμβατικός πίνακας είναι:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

**Άσκηση 2:** Να χαρακτηρισθούν οι παραπάτω συμμετρίαι τίγματος  $S$  ως προς το πρόσωπό τους. Σε αύτη περίπτωση να βρεθεί και η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή  $Q$ .

**Λύση:**

$$\blacktriangleright S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Έχουμε } \Delta = |S| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0$$

Επειδή  $\alpha = 1 > 0$ ,  $\gamma = 2 > 0$  και  $\Delta > 0$  τότε ο πίγματος  $S$  είναι θετική οριζόντιας. Η αντίστοιχη ελεύθερη τετραγωνική μορφή  $Q$  είναι:

$$Q(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$$

$$\blacktriangleright S = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Έχουμε } \Delta = |S| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0$$

Επειδή  $\alpha = 1 > 0$ ,  $\gamma = 2 > 0$  και  $\Delta > 0$  τότε ο πίγματος  $S$  είναι θετική οριζόντιας. Η αντίστοιχη ελεύθερη τετραγωνική μορφή είναι:

$$Q(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$$

$$\blacktriangleright S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Έχουμε  $\Delta = |S| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$

Επειδή  $\Delta < 0$  κάτιού στο πίνακα  $S$  είναι αόριστος. Η αντίστοιχη ελεύθερη τεραγωνική μορφή  $Q$  είναι:

$$Q(x,y) = 2xy$$

►  $S = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Έχουμε  $\Delta = |S| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0$

Επειδή  $\alpha = -1 < 0$ ,  $\gamma = -2 < 0$  και  $\Delta > 0$  κάτιού στο πίνακα  $S$  είναι αρνητικά ορισμένος. Η αντίστοιχη ελεύθερη τεραγωνική μορφή  $Q$  είναι:

$$Q(x,y) = -x^2 + 2xy - 2y^2$$

►  $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Έχουμε  $\Delta = |S| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$

Επειδή  $\Delta < 0$  κάτιού στο πίνακα  $S$  είναι αόριστος. Η αντίστοιχη ελεύθερη τεραγωνική μορφή  $Q$  είναι:

$$Q(x,y) = x^2 + 2xy$$

$$\blacktriangleright S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Έχουμε } \Delta = |S| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Επειδή  $a=1>0$ ,  $b=1>0$  και  $\Delta=0$  τότε ο πίνακας  $S$  είναι θετικός ημιορθιγένες. Η αντίστοιχη ελεύθερη τετραγωνική μορφή  $Q$  είναι:

$$Q(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\blacktriangleright S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Έχουμε } \Delta = |S| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0$$

Επειδή  $a=1>0$ ,  $b=2>0$ ,  $c=1>0$  και  $\Delta>0$  τότε ο πίνακας  $S$  είναι θετικός οριγένες. Η αντίστοιχη ελεύθερη τετραγωνική μορφή  $Q$  είναι:

$$Q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy$$

$$\blacktriangleright S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Έχουμε } \Delta = |S| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 < 0$$

Επειδή  $\Delta < 0$  τότε ο πίνακας  $S$  είναι αύριος. Η αντίστοιχη ελεύθερη τετραγωνική μορφή  $Q$  είναι:

$$Q(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + z^2 - 2xy$$

**Άσκηση 3:** Να βρεθούν καλ να χαρακτηρίσουν τα στάσιμα σημεία των παρανότων συναρτήσεων:

Λύση:

►  $f(x,y) = y^3 + 2xy - 5y - x^2 + 1$

• Ελεύθερο στάσιμο

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 2x = 0 \\ 3y^2 + 2x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 3y^2 + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = x \\ y = 1 \text{ ή } y = -\frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ y = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Οπότε τα ελεύθερα στάσιμα είναι τα σημεία  $(x,y) = (1,1)$  και  $(x,y) = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$

• Αρχικά, βρίσκουμε τον εξιταγό πίγκα:

$$f_{xx} = -2, \quad f_{yy} = 6y, \quad f_{xy} = f_{yx} = 2$$

Οπότε  $H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 6y \end{bmatrix}$

- Χαρακτηρίστε τα ελεύθερα σώματα  $(x,y) = (1,1)$ :

$$H_f \Big|_{(x,y)=(1,1)} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{ότε}$$

$$\left| H_f \Big|_{(x,y)=(1,1)} \right| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -12 - 4 = -16 < 0$$

Οπότε ο εσσολαός πίνακας  $H_f \Big|_{(x,y)=(1,1)}$  είναι αριθμός,

άρα το σώμα σημείο  $(x,y) = (1,1)$  δεν είναι αυρόταρο, είναι σαγματικό.

- Χαρακτηρίστε τα ελεύθερα σώματα  $(x,y) = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ :

$$H_f \Big|_{(x,y)=\left(-\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -10 \end{bmatrix} \quad \text{ότε}$$

$$\Delta = \left| H_f \Big|_{(x,y)=\left(-\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)} \right| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 20 - 4 = 16 > 0$$

Επειδή  $f_{xx} = -2 < 0$ ,  $f_{yy} = -10 < 0$  και  $\Delta > 0$  οτε ο

εσσολαός πίνακας είναι αρνητικής οριζόντιας, οπότε το σώμα σημείο  $(x,y) = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$  είναι γνήσιο ταπινό μέγιστο.

$$\blacktriangleright f(x,y) = 4x^3 - 6xy + y^3$$

• Ελεύθερο σώσιμο

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ -6x + 3(2x^2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2x^2 \\ -6x + 12x^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ 6x(2x^3 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ x=0 \text{ or } x = 2^{-\frac{1}{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} x=2^{-\frac{1}{3}} \\ y=2^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

Οπότε τα ελεύθερα σώσιμα είναι τα σημεία  $(x,y) = (0,0)$   
και  $(x,y) = (2^{-\frac{1}{3}}, 2^{\frac{2}{3}})$ .

• Αρχικά, βρίσκουμε τα εξομαλού πίνακα:

$$f_{xx} = 24x, \quad f_{yy} = 6y, \quad f_{xy} = f_{yx} = -6$$

$$\text{Οπότε } H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24x & -6 \\ -6 & 6y \end{bmatrix}$$

• Χαρακτηρίζουμε τα ελεύθερα σώσιμα  $(x,y) = (0,0)$ :

$$H_f \Big|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{όπως}$$

$$\det(H_f \Big|_{(x,y)=(0,0)}) = -36 < 0$$

Οπότε ο εξομαλούς πίνακας είναι αδιστος, όποια τα σώσιμα

σημείο  $(x, y) = (0, 0)$  δεν είναι αυρότατο, είναι σαχνάκιο.

- Χαρακτηρισθείτε τα ελεύθερα στάσιμα  $(x, y) = \left(2^{-\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}}\right)$ :

$$H_f \Big|_{(x,y)=\left(2^{-\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}}\right)} = \begin{bmatrix} 24 \cdot 2^{-\frac{2}{3}} & -6 \\ -6 & 6 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \end{bmatrix} \text{ πώς}$$

$$\det(H_f \Big|_{(x,y)=\left(2^{-\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}}\right)}) = 144 \cdot 2^{-\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} - 36 = 108 > 0$$

Επειδή  $f_{xx} > 0$ ,  $f_{yy} > 0$  και  $\Delta > 0$  πώς ο εσωνός πίνακας είναι θετικά οριζόντιος, οπότε τα στάσιμα σημεία  $(x, y) = \left(2^{-\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}}\right)$  είναι γνήσια τοπικό ελάχιστο.

**Άσκηση 4:** Να χαρακτηρισθείνται προς την κυρτότητά τους οι παρακάτω συναρτήσεις. Σε κάθε περίπτωση, να βρεθεί το ελεύθερο στάσιμο και να χαρακτηριστεί πώς τοπικό ή ολικό αυρότατο.

Λύση:

►  $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$

• Κυρτότητα:

$$f_x = -2x, \quad f_y = -2y$$

$$f_{xx} = -2, \quad f_{yy} = -2, \quad f_{xy} = f_{yx} = 0$$

Βρίσκουμε το πρόσημο του εσωνού πίνακα:

$$H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

τότε  $\Delta = |H_f| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$ .

Επειδή  $f_{xx} = -2 < 0$ ,  $f_{yy} = -2 < 0$  και  $\Delta > 0$  τότε ο εσσωνός πίνακας είναι αρνητικά οριζέντος, οπότε η  $f$  είναι γυμνίσια κοιλη.

- Ελεύθερο στάσιμο:  $\{f_x=0, f_y=0\}$

$$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x=0 \\ -2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Οπότε το ελεύθερο στάσιμο είναι το σημείο  $(x,y) = (0,0)$ .

- Χαρακτηρίζουσα τη σχέση του σημείου  $(x,y) = (0,0)$ :

Επειδή ο εσσωνός πίνακας είναι αρνητικά οριζέντος για όλες  $x, y$  τότε το  $(x,y) = (0,0)$  είναι γυμνόσιο ολιγό μέγιστο.

- $f(x,y) = 4 + x^2 + 4y^2$

- Κυρώτηνα:

$$\begin{aligned} f_x &= 2x, & f_y &= 8y \\ f_{xx} &= 2, & f_{yy} &= 8 \end{aligned} \quad f_{xy} = f_{yx} = 0$$

Βρίσκουμε το πρόσημο των εσσωνών πίνακα:

$$H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

τότε  $\Delta = |H_f| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 16 > 0$ .

Επειδή  $f_{xx} > 0$ ,  $f_{yy} > 0$  και  $\Delta > 0$  τότε ο εσσιανός πίνακας είναι δευτικά οριζέντος, οπότε η  $f$  είναι γνήσια κυρτή.

- Ελεύθερο στάσιμο:  $\{f_x=0, f_y=0\}$

$$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ 8y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

οπότε το ελεύθερο στάσιμο σημείο είναι το  $(x,y) = (0,0)$ .

- Χαρακτηρίστε του ελεύθερου στάσιμου  $(x,y) = (0,0)$ :

Επειδή ο εσσιανός πίνακας είναι δευτικά οριζέντος για κάθε  $x, y$  τότε το  $(x,y) = (0,0)$  είναι γνήσιο ολικό ελάχιστο.

►  $f(x,y) = 1 - x^2 + y^2$

- Κυρτότητα:

$$f_x = -2x, \quad f_y = 2y \quad f_{xy} = f_{yx} = 0$$

$$f_{xx} = -2, \quad f_{yy} = 2$$

Βρίσκουμε το πρόσημο του εσσιανού πίνακα:

$$H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{τότε}$$

$$\Delta = |H_f| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

Επειδή  $\Delta < 0$  τότε ο εστιανός πίνακας είναι αόριστος, οπότε η  $f$  δεν είναι αύτη κυρτή αύτη κοιλή.

- Ελεύθερο στάσιμο :  $\{ f_x = 0, f_y = 0 \}$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Οπότε το ελεύθερο στάσιμο σημείο είναι το  $(x, y) = (0, 0)$ .

- Χαρακτηριστικός του στάσιμου σημείου  $(x, y) = (0, 0)$ :

Επειδή ο εστιανός πίνακας είναι αόριστος για κάθε  $x, y$  τότε το  $(x, y) = (0, 0)$  δεν είναι αυριτικό, είναι σαγματικό.

►  $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2 + 2axy$

- Κυρτότητα:

$$f_x = 2x + 2ay, \quad f_y = 2y + 2ax$$

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{xy} = f_{yx} = 2a$$

Βρίσκουμε το πρόστιμο των εστιανών πίνακων:

$$H_f = \begin{bmatrix} 2 & 2a \\ 2a & 2 \end{bmatrix}$$

τότε  $\Delta = |H_f| = \begin{vmatrix} 2 & 2a \\ 2a & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4a^2 = 4(1 - a^2)$

Διαπίνουμε περιπτώσεις:

- Αν  $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  τότε  $\Delta < 0$ , οπότε ο εσσλαός πίνακας είναι αόριστος, αλλά  $n f$  δεν είναι αύτη κυρτή ούτε κούλη.
- Αν  $a \in (-1, 1)$  τότε  $\Delta > 0$  και επειδή  $f_{xx} = f_{yy} = 2 > 0$  τότε ο εσσλαός πίνακας είναι δευτικής οριζέντως, αλλά  $n f$  είναι γρινστική κυρτή.
- Αν  $a = \pm 1$  τότε  $\Delta = 0$  και επειδή  $f_{xx} = f_{yy} = 2 > 0$  τότε ο εσσλαός πίνακας είναι δευτικής ημιοριζέντως, αλλά  $n f$  είναι κυρτή.
- Ελεύθερο στάσιμο:  $\left\{ f_x = 0, f_y = 0 \right\}$   

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2ay = 0 \\ 2y + 2ax = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -ay \\ 2y - 2a^2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
  

$$\begin{cases} x = -ay \\ 2y(1-a^2) = 0 \end{cases} \stackrel{a^2 \neq 1}{\Rightarrow} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$
- Ο πότε ως ελεύθερο στάσιμο ομβρίο είναι ως  $(x, y) = (0, 0)$ .
- Χαρακτηριστικός του στάσιμου ομβρίου  $(x, y) = (0, 0)$ :

Διαπίνουμε περιπτώσεις:

- Αν  $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  τότε το στάσιμο ομβρίο  $(x, y) = (0, 0)$  δεν είναι αυρότατο, είναι σαγματικό, αφού ο εσσλαός πίνακας είναι αόριστος.

- Αν  $\alpha \in (-1,1)$  τότε το σταθμό σημείο  $(x,y) = (0,0)$  είναι γνήσιο ολικό ελάχιστω, αφού ο εστιανός πίνακας είναι θετικά οριζόντων για όλες  $x, y$ .
- $f(x,y) = 4x - 2y - x^2 + 2y^2$

- Κυρτότητα:

$$f_x = 4 - 2x, \quad f_y = -2 + 4y, \quad f_{xy} = f_{yx} = 0$$

$$f_{xx} = -2, \quad f_{yy} = 4$$

Βρίσκουμε το πρώτο μέρος της εστιανής πίνακα:

$$H_f = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{τότε } \Delta = |H_f| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8 < 0$$

Επειδή  $\Delta < 0$  τότε ο εστιανός πίνακας είναι αόριστος, οπότε η  $f$  δεν είναι κυρτή ή κοιλή.

- Ελεύθερο στάσιμο:  $\{f_x=0, f_y=0\}$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2x = 0 \\ -2 + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Οπότε το ελεύθερο στάσιμο σημείο είναι το  $(x,y) = (2, \frac{1}{2})$ .

- Χαρακτηρίζουμε το ελεύθερο στάσιμο σημείο  $(x,y) = (2, \frac{1}{2})$ :

Επειδή ο εστιανός πίνακας είναι αόριστος για όλες  $x, y$  τότε το στάσιμο σημείο  $(x,y) = (2, \frac{1}{2})$  δεν είναι αυριστό, είναι σαγματικό.

►  $f(x,y) = \ln(x+y) - x^2 - y^2 + y$ , με  $x+y > 0$

. Κυρτότητα:

$$f_x = \frac{1}{x+y} - 2x, \quad f_y = \frac{1}{x+y} - 2y + 1$$

$$f_{xx} = -\frac{1}{(x+y)^2} - 2, \quad f_{yy} = -\frac{1}{(x+y)^2} - 2$$

$$f_{xy} = f_{yx} = -\frac{1}{(x+y)^2}$$

Βρίσκουμε το πρόσημο των εσσινών πίνακα:

$$H_f = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(x+y)^2} - 2 & -\frac{1}{(x+y)^2} \\ -\frac{1}{(x+y)^2} & -\frac{1}{(x+y)^2} - 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{τότε } \Delta = |H_f| = \left[ \frac{1}{(x+y)^2} + 2 \right]^2 - \frac{1}{(x+y)^4} = \frac{1}{(x+y)^4} + 4 - \frac{1}{(x+y)^4} = \frac{4}{(x+y)^2} + 4 > 0$$

για όλες  $x, y$ , με  $x+y > 0$ .

Επειδή  $f_{xx} < 0$ ,  $f_{yy} < 0$  και  $\Delta > 0$  τότε ο εσσινός πίνακας είναι αρνητικά οριζόντες, σπότε η  $f$  είναι γνήσια κοιλη.

. Ελεύθερο στασιμό:  $\{f_x=0, f_y=0\}$

$$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+y} - 2x = 0 \\ \frac{1}{x+y} - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+y} = 2x \\ \frac{1}{x+y} = 2y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x = 2y - 1 \\ \frac{1}{x+y} = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2y - \frac{1}{2}} = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - \frac{1}{2} \\ 4y^2 - 2y - y + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = y - \frac{1}{2} \\ 4y^2 - 3y + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{or} \quad x = -\frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2} \quad \text{or} \quad y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

από  $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$  (δευτική) ή  $\begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$  (απορρίπτεται) αφού  $x+y>0$

οπότε το σταθμό σημείο σημείωσης είναι το  $(x,y) = (0, \frac{1}{2})$ .

- Χαρακτηρίζουσαν τα σταθμά σημείωσης το σημείο  $(x,y) = (0, \frac{1}{2})$ :

Επειδή ο εξολόθρων πίνακας είναι αρνητικά δριγμένος για όλες  $x, y$  τότε το σταθμό σημείο  $(x,y) = (0, \frac{1}{2})$  είναι γνήσιο ολινό μέγιστω.

►  $f(x,y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}} - 2x - y$ , με  $x \geq 0, y \geq 0$

- Κυρτότητα:

$$f_x = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}} - 2, \quad f_y = \frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{4}} - 1$$

$$f_{xx} = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{4}}, \quad f_{yy} = -\frac{3}{16} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{7}{4}}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{1}{8} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{4}}$$

Βρίσκουμε το πρόσημο των εξελαγών πίνακα:

$$H_f = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{4}} & \frac{1}{8} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{4}} \\ \frac{1}{8} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{4}} & -\frac{3}{16} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{7}{4}} \end{bmatrix}$$

τότε  $\Delta = |H_f| = \frac{3}{32} x^{-1} y^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{64} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{2}} =$   
 $= \frac{5}{64} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{2}} > 0$ , για όλες  $x, y > 0$ .

Επειδή  $f_{xx} < 0$ , φύγει ως  $\Delta > 0$  ότε ο εστιαρός πίνακας είναι αρνητικά οριζόντιος, οπότε η  $f$  είναι γνήσια κοιλη.

- Ελεύθερο στάσιμο:  $\left\{ f_x = 0, f_y = 0 \right\}$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}} - 2 = 0 \\ \frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{4}} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}} = 4 \\ x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{4}} = 4 \end{cases} \Rightarrow x, y > 0$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{4} \ln y = \ln 4 \\ \frac{1}{2} \ln x - \frac{3}{4} \ln y = \ln 4 \end{cases} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} \begin{cases} -\frac{1}{2} \ln y = 2 \ln 4 \\ -\frac{1}{2} \ln y + \frac{1}{4} \ln y = \ln 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \ln y = -4 \ln 4 \\ -\frac{1}{2} \ln x - \ln 4 = \ln 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln y = \ln 2^{-8} \\ \ln x = -4 \ln 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2^{-8} \\ \ln x = \ln 2^{-8} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2^{-8} > 0 \\ x = 2^{-8} > 0 \end{cases}$$

Οπότε το ελεύθερο στάσιμο είναι το  $(x, y) = (2^{-8}, 2^{-8})$ .

- Χαρακτηρισμός του ελεύθερου στάσιμου  $(x, y) = (2^{-8}, 2^{-8})$ :

Επειδή ο εστιαρός πίνακας είναι αρνητικά οριζόντιος για μάθε  $x, y > 0$  ότε το στάσιμο σημείο  $(x, y) = (2^{-8}, 2^{-8})$  είναι γνήσιο ολικό μέγιστο.

Άσκηση 5: Θεωρούμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης στην θετική περιοχή:

$$\max \left\{ f = P(2\sqrt{x} + \sqrt{y}) - wx - vy \mid x \geq 0, y \geq 0 \right\}$$

με γνωστές θετικές παραμέτρους:  $\{w, v, P\}$ .

Να βρεθούν οι βέλτιστες παρατητές:  $\{x^*, y^*\}$  και η μέγιστη τιμή  $f^*$ , ως συνάρτησης των παραμέτρων, καλ να διερευνηθούν οι ιδιότητες μονοτονίας, και κυρτότητας αυτών των συναρτήσεων.

Λύση:

Συνθήκες 1<sup>ης</sup> όρους (ελεύθερο στάσιμο)

$$\begin{cases} fx = 0 \\ fy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P x^{-1/2} - w = 0 \\ \frac{P}{2} y^{-1/2} - v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{-1/2} = \frac{w}{P} \\ y^{-1/2} = \frac{2v}{P} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{P^2}{w^2} \\ y = \frac{P^2}{4v^2} \end{cases}$$

Οπούτε οι βέλτιστες παρατητές είναι:

$$x^*(P, v, w) = \frac{P^2}{w^2}, \quad y^*(P, v, w) = \frac{P^2}{4v^2}$$

Συνθήκες 2<sup>ης</sup> όρους (πρόσημο του εξωτανά πίγμα και καραυγρίδης του ελεύθερου συστήματος)

$$H_f = \begin{bmatrix} -\frac{P}{2} x^{-3/2} & 0 \\ 0 & -\frac{P}{4} y^{-3/2} \end{bmatrix}$$

$$\text{τότε } \Delta = |Hf| = \frac{P^2}{8} x^{-3/2} y^{-3/2} > 0, \text{ για ώστε } x, y > 0,$$

οπότε ο εσσινός πίκους είναι αρνητικά οριζόντων, αφού  $f_{xx} < 0$ ,  $f_{yy} < 0$  και  $\Delta > 0$ , άρα το ελεύθερο σώματο σημείο  $(x^*, y^*)$  είναι γνήσιο ολινό μέγιστο.

- Η μέγιστη τιμή της  $f$  είναι:

$$\begin{aligned} f^* = f^*(p, v, w) &= f(x^*, y^*) = p(2\sqrt{x^*} + \sqrt{y^*}) - w x^* - v y^* = \\ &= p\left(\frac{2p}{w} + \frac{p}{2v}\right) - w \cdot \frac{p^2}{w^2} - v \cdot \frac{p^2}{4v^2} = \\ &= \frac{2p^2}{w} + \frac{p^2}{2v} - \frac{p^2}{w} - \frac{p^2}{4v} = \frac{p^2}{w} + \frac{p^2}{4v} \end{aligned}$$

- Μονοτονία:

- $\frac{\partial x^*}{\partial p} = \frac{2p}{w^2} > 0 \Rightarrow x^*$  αυξανεί ως προς  $p$
- $\frac{\partial x^*}{\partial v} = 0 \Rightarrow x^*$  σαθερή ως προς  $v$
- $\frac{\partial x^*}{\partial w} = -\frac{2p^2}{w^3} < 0 \Rightarrow x^*$  φθινει ως προς  $w$
- $\frac{\partial y^*}{\partial p} = \frac{p}{2v^2} > 0 \Rightarrow y^*$  αυξανεί ως προς  $p$
- $\frac{\partial y^*}{\partial w} = 0 \Rightarrow y^*$  σαθερή ως προς  $w$
- $\frac{\partial y^*}{\partial v} = -\frac{p^2}{2v^3} < 0 \Rightarrow y^*$  φθινει ως προς  $v$

- $\frac{\partial f^*}{\partial P} = \frac{2P}{W} + \frac{P}{2V} > 0 \Rightarrow f^*$ -αύλουσα ως προς  $P$
- $\frac{\partial f^*}{\partial V} = -\frac{P^2}{4V^2} < 0 \Rightarrow f^*$ -φθίνουσα ως προς  $V$
- $\frac{\partial f^*}{\partial W} = -\frac{P^2}{W^2} < 0 \Rightarrow f^*$ -φθίνουσα ως προς  $W$

• Κυρτότητα:

Έχουμε  $x_{pp}^* = \frac{2}{W^2} > 0$ ,  $x_{PV}^* = 0$ ,  $x_{PW}^* = -\frac{4P}{W^3} < 0$   
 $x_{VP}^* = x_{VV}^* = x_{VW}^* = 0$ ,  $x_{WP}^* = -\frac{4P}{W^3} < 0$ ,  $x_{WW}^* = 0$   
 $x_{WW}^* = \frac{6P^2}{W^4} > 0$

- $x^*$  είναι γνήσια κυρτή ως προς  $P$
- $x^*$  είναι γνήσια κυρτή ως προς  $W$

► Εξετάζουμε την κυρτότητα της  $x^*$  ως προς  $(P, W)$ :

$$Hx^* = \begin{bmatrix} x_{pp}^* & x_{pw}^* \\ x_{wp}^* & x_{ww}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{W^2} & -\frac{4P}{W^3} \\ -\frac{4P}{W^3} & \frac{6P^2}{W^4} \end{bmatrix}$$

ώτε  $\Delta = |Hx^*| = \frac{12P^2}{W^6} - \frac{16P^2}{W^6} = -\frac{4P^2}{W^6} < 0$

οπότε ο  $Hx^*$  είναι αδύνατος, ώτε η  $x^*$  δεν είναι άτε κυρτή σύζε κοιλή ως προς  $(P, W)$ .

Ομοίως, για τ' άλλα ...