2014-2015

Β4. Εσσιανός Πίνακας – Κυρτότητα

Άσκηση 1η: Να χαρακτηριστούν οι παρακάτω ελεύθερες τετραγωνικές μορφές $Q(x,y)$, ως προς το πρόσημο. Σε κάθε περίπτωση, να βρεθεί και ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας S.

Λύση:

- $Q(x,y) = x^2+4y^2-xy = x^2-xy+4y^2$

Έχουμε $a=1$, $\beta=-\frac{1}{2}$, $\gamma=4$ οπότε το πρόσημο της Q προκύπτει από την ορίζουσα:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} = a\gamma-\beta^2 = 1\cdot 4-\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = 4-\frac{1}{4} = \frac{15}{4} > 0$$

Επειδή $a=1>0$, $\gamma=4>0$ και $\Delta>0$ τότε η Q είναι θετικά ορισμένη.

Ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας είναι:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix}$$

- $Q(x,y) = x^2+4y^2-2xy = x^2-2xy+4y^2$

Έχουμε $a=1$, $\beta=-1$, $\gamma=4$ οπότε το πρόσημο της Q προκύπτει από την ορίζουσα:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4-1=3>0$$

Επειδή $a=1>0$, $\gamma=4>0$ και $\Delta=3>0$ τότε η Q είναι θετικά ορισμένη.

Ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας είναι:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

- $Q(x,y) = x^2+4y^2-3xy = x^2-3xy+4y^2$

Έχουμε $a=1$, $\beta=-\frac{3}{2}$, $\gamma=4$ οπότε το πρόσημο της Q προκύπτει από την ορίζουσα:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 4 \end{vmatrix} = 4-\frac{9}{4} = \frac{7}{4}>0$$

Επειδή $a=1>0$, $\gamma=4>0$, και $\Delta=\frac{7}{4}>0$ τότε η Q είναι θετικά ορισμένη.

Ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας είναι:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix}$$

- $Q(x,y) = -x^2-2y^2-xy = -x^2-xy-2y^2$

Έχουμε $a=-1$, $\beta=-\frac{1}{2}$, $\gamma=-2$ τότε το πρόσημο της Q προκύπτει από την ορίζουσα:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{vmatrix} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} > 0$$

Επειδή $a=-1<0$, $\gamma=-2<0$ και $\Delta>0$ τότε η Q είναι αρνητικά ορισμένη.

Ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας είναι:

$$S = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

- $Q(x,y) = -x^2-2y^2-3xy = -x^2-3xy-2y^2$

Έχουμε $a=-1$, $\beta=-\frac{3}{2}$, $\gamma=-2$, οπότε το πρόσημο της Q προκύπτει από την ορίζουσα:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{vmatrix} = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4} < 0$$

Επειδή $\Delta<0$ τότε η Q είναι αόριστη. Ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας είναι:

$$S = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

- $Q(x,y) = x^2+xy$

Έχουμε $a=1$, $\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=0$ οπότε το πρόσημο της Q προκύπτει από την ορίζουσα:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} < 0$$

Επειδή $\Delta<0$ τότε η Q είναι αόριστη. Ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας είναι:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

- $Q(x,y) = x^2 - 4y^2 + xy = x^2 + xy - 4y^2$

Έχουμε $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = -4$ οπότε το πρόσημο της Q προκύπτει από την ορίζουσα:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -4 \end{vmatrix} = -4 - \frac{1}{4} = -\frac{17}{4} < 0$$

Επειδή $\Delta < 0$ τότε η Q είναι αόριστη. Ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας είναι:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -4 \end{bmatrix}$$

Σημείωση: Όταν $\alpha\gamma < 0$ ή α, γ ετερόσημοι τότε η Q είναι πάντα αόριστη.

- $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2$

Έχουμε $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\delta = \varepsilon = J = 0$, οπότε το πρόσημο της Q προκύπτει από την ορίζουσα:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \delta & J \\ \delta & \beta & \varepsilon \\ J & \varepsilon & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1.1.2 = 2 > 0$$

Επειδή $\alpha = 1 > 0$, $\beta = 1 > 0$, $\gamma = 2 > 0$ και $\Delta > 0$ τότε η Q είναι θετικά ορισμένη. Ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας είναι:

- $Q(x,y,z) = x^2+y^2-2z^2$

Έχουμε $a=1$, $\beta=1$, $\gamma=-2$, $\delta=\varepsilon=\zeta=0$, οπότε το πρόσημο της Q προκύπτει από την ορίζουσα:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2<0$$

Επειδή $\Delta<0$ τότε η Q είναι αόριστη. Ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας είναι:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

- $Q(x,y,z) = x^2-4y^2+z^2+xy$

Έχουμε $a=1$, $\beta=-4$, $\gamma=1$, $\delta=\frac{1}{2}$, $\varepsilon=\zeta=0$ οπότε το πρόσημο της Q προκύπτει από την ορίζουσα:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -4 \end{vmatrix} = -4-\frac{1}{4} = -\frac{17}{4}<0$$

Επειδή $\Delta<0$ τότε η Q είναι αόριστη. Ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας είναι:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $Q(x,y) = x^2$

Έχουμε $\alpha=1$, $\beta=\gamma=0$ οπότε το πρόσημο της Q προκύπτει από την ορίζουσα:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Επειδή $\alpha=1>0$, $\gamma=0$ και $\Delta=0$ τότε η Q είναι θετικά ημιορισμένη. Ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας είναι:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $Q(x,y) = xy$

Έχουμε $\alpha=\gamma=0$, $\beta=\frac{1}{2}$ οπότε το πρόσημο της Q προκύπτει από την ορίζουσα:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} < 0$$

Επειδή $\Delta<0$ τότε η Q είναι αόριστη. Ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας είναι:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2η: Να χαρακτηρισθούν οι παρακάτω συμμετρικοί πίνακες S ως προς το πρόσημό τους. Σε κάθε περίπτωση να βρεθεί και η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή Q.

Λύση:

- $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Έχουμε $\Delta = |S| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1 = 1 > 0$

Επειδή $a=1>0$, $\gamma=2>0$ και $\Delta>0$ τότε ο πίνακας S είναι θετικά ορισμένος. Η αντίστοιχη ελεύθερη τετραγωνική μορφή Q είναι:

$$Q(x,y) = x^2+2xy+2y^2$$

- $S = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Έχουμε $\Delta = |S| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1 = 1 > 0$

Επειδή $a=1>0$, $\gamma=2>0$ και $\Delta>0$ τότε ο πίνακας S είναι θετικά ορισμένος. Η αντίστοιχη ελεύθερη τετραγωνική μορφή είναι:

$$Q(x,y) = x^2-2xy+2y^2$$

- $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Έχουμε $\Delta = |S| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$

Επειδή $\Delta < 0$ τότε ο πίνακας S είναι αόριστος. Η αντίστοιχη ελεύθερη τετραγωνική μορφή είναι:

$$Q(x,y) = 2xy$$

- $S = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Έχουμε $\Delta = |S| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0$

Επειδή $a = -1 < 0$, $\gamma = -2 < 0$ και $\Delta > 0$ τότε ο πίνακας S είναι αρνητικά ορισμένος. Η αντίστοιχη ελεύθερη τετραγωνική μορφή Q είναι:

$$Q(x,y) = -x^2 + 2xy - 2y^2$$

- $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Έχουμε $\Delta = |S| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$

Επειδή $\Delta < 0$ τότε ο πίνακας S είναι αόριστος. Η αντίστοιχη ελεύθερη τετραγωνική μορφή Q είναι:

$$Q(x,y) = x^2 + 2xy$$

- $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Έχουμε $\Delta = |S| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Επειδή $a = 1 > 0$, $\gamma = 1 > 0$ και $\Delta = 0$ τότε ο πίνακας S είναι θετικά ημιορισμένος. Η αντίστοιχη ελεύθερη τετραγωνική μορφή Q είναι:

$$Q(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$$

- $S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Έχουμε $\Delta = |S| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0$

Επειδή $a = 1 > 0$, $\beta = 2 > 0$, $\gamma = 1 > 0$ και $\Delta > 0$ τότε ο πίνακας S είναι θετικά ορισμένος. Η αντίστοιχη ελεύθερη τετραγωνική μορφή Q είναι:

$$Q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy$$

- $S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Έχουμε $\Delta = |S| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2-1 = -3<0$

Επειδή $\Delta<0$ τότε ο πίνακας S είναι αόριστος. Η αντίστοιχη ελεύθερη τετραγωνική μορφή Q είναι:

$$Q(x,y,z) = x^2-2y^2+z^2-2xy$$

Άσκηση 3η: Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα στάσιμα σημεία των παρακάτω συναρτήσεων:

Λύση:

- $f(x,y) = y^3+2xy-5y-x^2+1$

- Ελεύθερο στάσιμο

$$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y-2x=0 \\ 3y^2+2x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ 3y^2+2y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=x \\ y=1 \text{ ή } y=-\frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=-\frac{5}{3} \\ y=-\frac{5}{3} \end{cases}$$

οπότε τα ελεύθερα στάσιμα είναι τα σημεία $(x,y)=(1,1)$ και $(x,y)=\left(-\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right)$

- Αρχικά, βρίσκουμε τον εσσιανό πίνακα:

$$f_{xx} = -2 \ , \quad f_{yy} = 6y \ , \ f_{xy} = f_{yx} = 2$$

οπότε $H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 6y \end{bmatrix}$

- Χαρακτηρισμός του ελεύθερου στάσιμου $(x,y)=(1,1)$:

$$H_f\Big|_{(x,y)=(1,1)} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{τότε}$$

$$\left| H_f\Big|_{(x,y)=(1,1)} \right| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -12-4 = -16<0$$

οπότε ο εσσιανός πίνακας $H_f\Big|_{(x,y)=(1,1)}$ είναι αόριστος, άρα το στάσιμο σημείο $(x,y)=(1,1)$ δεν είναι ακρότατο, είναι σαγματικό.

- Χαρακτηρισμός του ελεύθερου στάσιμου $(x,y)=\left(-\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right)$:

$$H_f\Big|_{(x,y)=\left(-\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right)} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -10 \end{bmatrix} \quad \text{τότε}$$

$$\Delta = \left| H_f\Big|_{(x,y)=\left(-\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right)} \right| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 20-4 = 16>0$$

Επειδή $f_{xx}=-2<0$, $f_{yy}=-10<0$ και $\Delta>0$ τότε ο εσσιανός πίνακας είναι αρνητικά ορισμένος, οπότε το στάσιμο σημείο $(x,y)=\left(-\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right)$ είναι γνήσιο τοπικό μέγιστο.

▸ $f(x,y) = 4x^3 - 6xy + y^3$

• Ελεύθερο στάσιμο

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ -6x + 3(2x^2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2x^2 \\ -6x + 12x^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ 6x\left(2x^3 - 1\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ x = 0 \text{ ή } x = 2^{-1/3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = 2^{-1/3} \\ y = 2^{1/3} \end{cases}$$

οπότε τα ελεύθερα στάσιμα είναι τα σημεία $(x,y) = (0,0)$ και $(x,y) = \left(2^{-1/3}, 2^{1/3}\right)$.

• Αρχικά, βρίσκουμε τον εσσιανό πίνακα:

$$f_{xx} = 24x, \quad f_{yy} = 6y, \quad f_{xy} = f_{yx} = -6$$

οπότε $$H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24x & -6 \\ -6 & 6y \end{bmatrix}$$

• Χαρακτηρισμός του ελεύθερου στάσιμου $(x,y) = (0,0)$:

$$H_f \big|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$ τότε

$$\det\left(H_f \big|_{(x,y)=(0,0)} \right) = -36 < 0$$

οπότε ο εσσιανός πίνακας είναι αόριστος, άρα το στάσιμο σημείο $(x,y)=(0,0)$ δεν είναι ακρότατο, είναι σαγματικό.

- Χαρακτηρισμός του ελεύθερου στάσιμου $(x,y)=(2^{-1/3},2^{1/3})$:

$$H_f\big|_{(x,y)=(2^{-1/3},2^{1/3})} = \begin{bmatrix} 24\cdot 2^{-1/3} & -6 \\ -6 & 6\cdot 2^{1/3} \end{bmatrix} \text{ τότε}$$

$$\det\left(H_f\big|_{(x,y)=(2^{-1/3},2^{1/3})}\right) = 144\cdot 2^{-1/3}\cdot 2^{1/3} - 36 = 108 > 0$$

Επειδή $f_{xx}>0$, $f_{yy}>0$ και $\Delta>0$ τότε ο εσσιανός πίνακας είναι θετικά ορισμένος, οπότε το στάσιμο σημείο $(x,y) = (2^{-1/3},2^{1/3})$ είναι γνήσιο τοπικό ελάχιστο.

Άσκηση 4η: Να χαρακτηριστούν ως προς την κυρτότητά τους οι παρακάτω συναρτήσεις. Σε κάθε περίπτωση, να βρεθεί το ελεύθερο στάσιμο και να χαρακτηριστεί ως τοπικό ή ολικό ακρότατο.

Λύση:

- $f(x,y)=4-x^2-y^2$

  - Κυρτότητα:

$f_x=-2x$, $f_y=-2y$

$f_{xx}=-2$, $f_{yy}=-2$, $f_{xy}=f_{yx}=0$

Βρίσκουμε το πρόσημο του εσσιανού πίνακα:

$$H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

τότε $\Delta = |H_f| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$.

Επειδή $f_{xx} = -2 < 0$, $f_{yy} = -2 < 0$ και $\Delta > 0$ τότε ο εσσιανός πίνακας είναι αρνητικά ορισμένος, οπότε η f είναι γνήσια κοίλη.

- Ελεύθερο στάσιμο: $\{f_x = 0, f_y = 0\}$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

οπότε το ελεύθερο στάσιμο είναι το σημείο $(x,y) = (0,0)$.

- Χαρακτηρισμός του στάσιμου σημείου $(x,y) = (0,0)$:

Επειδή ο εσσιανός πίνακας είναι αρνητικά ορισμένος για κάθε x, y τότε το $(x,y) = (0,0)$ είναι γνήσιο ολικό μέγιστο.

▶ $f(x,y) = 4 + x^2 + 4y^2$

- Κυρτότητα:

$f_x = 2x$, $f_y = 8y$

$f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 8$ $\qquad f_{xy} = f_{yx} = 0$

Βρίσκουμε το πρόσημο του εσσιανού πίνακα:

$$H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

τότε $\Delta = |H_f| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 16 > 0.$

Επειδή $f_{xx} > 0$, $f_{yy} > 0$ και $\Delta > 0$ τότε ο εσσιανός πίνακας είναι θετικά ορισμένος, οπότε η f είναι γνήσια κυρτή.

- Ελεύθερο στάσιμο: $\{f_x = 0, f_y = 0\}$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

οπότε το ελεύθερο στάσιμο σημείο είναι το $(x,y) = (0,0)$.

- Χαρακτηρισμός του ελεύθερου στάσιμου $(x,y) = (0,0)$:

Επειδή ο εσσιανός πίνακας είναι θετικά ορισμένος για κάθε x, y τότε το $(x,y) = (0,0)$ είναι γνήσιο ολικό ελάχιστο.

▸ $f(x,y) = 1 - x^2 + y^2$

- Κυρτότητα:

$f_x = -2x$, $f_y = 2y$

$f_{xx} = -2$, $f_{yy} = 2$

$f_{xy} = f_{yx} = 0$

Βρίσκουμε το πρόσημο του εσσιανού πίνακα:

$$H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ τότε

$$\Delta = |H_f| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

Επειδή $\Delta<0$ τότε ο εσσιανός πίνακας είναι αόριστος, οπότε η f δεν είναι ούτε κυρτή ούτε κοίλη.

- Ελεύθερο στάσιμο : $\{ f_x = 0, f_y = 0 \}$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

οπότε το ελεύθερο στάσιμο σημείο είναι το $(x,y)=(0,0)$.

- Χαρακτηρισμός του στάσιμου σημείου $(x,y)=(0,0)$:

Επειδή ο εσσιανός πίνακας είναι αόριστος για κάθε x, y τότε το $(x,y)=(0,0)$ δεν είναι ακρότατο, είναι σαγματικό.

▸ $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2 + 2axy$

- Κυρτότητα:

$$f_x = 2x + 2ay, \quad f_y = 2y + 2ax, \quad f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{xy} = f_{yx} = 2a$$

Βρίσκουμε το πρόσημο του εσσιανού πίνακα:

$$H_f = \begin{bmatrix} 2 & 2a \\ 2a & 2 \end{bmatrix}$$

τότε $\Delta = |H_f| = \begin{vmatrix} 2 & 2a \\ 2a & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4a^2 = 4(1-a^2)$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $a \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ τότε $\Delta < 0$, οπότε ο εσσιανός πίνακας είναι αόριστος, άρα η f δεν είναι ούτε κυρτή ούτε κοίλη.
- Αν $a \in (-1,1)$ τότε $\Delta > 0$ και επειδή $f_{xx} = f_{yy} = 2 > 0$ τότε ο εσσιανός πίνακας είναι θετικά ορισμένος, άρα η f είναι γνήσια κυρτή.
- Αν $a = \pm 1$ τότε $\Delta = 0$ και επειδή $f_{xx} = f_{yy} = 2 > 0$ τότε ο εσσιανός πίνακας είναι θετικά ημιορισμένος, άρα η f είναι κυρτή.

- Ελεύθερο στάσιμο: $\{f_x = 0, f_y = 0\}$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2ay = 0 \\ 2y + 2ax = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -ay \\ 2y - 2a^2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -ay \\ 2y(1-a^2) = 0 \end{cases} \overset{a^2 \neq 1}{\Rightarrow} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

οπότε το ελεύθερο στάσιμο σημείο είναι το $(x,y) = (0,0)$.

- Χαρακτηρισμός του στάσιμου σημείου $(x,y) = (0,0)$:

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $a \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ τότε το στάσιμο σημείο $(x,y) = (0,0)$ δεν είναι ακρότατο, είναι σαγματικό, αφού ο εσσιανός πίνακας είναι αόριστος.

- Αν $a \in (-1,1)$ τότε το στάσιμο σημείο $(x,y)=(0,0)$ είναι γνήσιο ολικό ελάχιστο, αφού ο εσσιανός πίνακας είναι θετικά ορισμένος για κάθε x,y.

- $f(x,y) = 4x-2y-x^2+2y^2$

  - Κυρτότητα:

    $f_x = 4-2x \quad , \quad f_y = -2+4y$

    $f_{xx} = -2 \, , \quad f_{yy} = 4 \quad , \quad f_{xy} = f_{yx} = 0$

    Βρίσκουμε το πρόσημο του εσσιανού πίνακα:

    $$H_f = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

    τότε $\Delta = |H_f| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8 < 0$

    Επειδή $\Delta<0$ τότε ο εσσιανός πίνακας είναι αόριστος, οπότε η f δεν είναι ούτε κυρτή ούτε κοίλη.

  - Ελεύθερο στάσιμο: $\{f_x=0, f_y=0\}$

    $$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-2x=0 \\ -2+4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

    οπότε το ελεύθερο στάσιμο σημείο είναι το $(x,y)=(2,\frac{1}{2})$.

  - Χαρακτηρισμός του ελεύθερου στάσιμου σημείου $(x,y)=(2,\frac{1}{2})$:

    Επειδή ο εσσιανός πίνακας είναι αόριστος για κάθε x,y τότε το στάσιμο σημείο $(x,y)=(2,\frac{1}{2})$ δεν είναι ακρότατο, είναι σαγματικό.

- $f(x,y) = \ln(x+y) - x^2 - y^2 + y$, με $x+y>0$

- Κυρτότητα:

$$f_x = \frac{1}{x+y} - 2x \quad , \quad f_y = \frac{1}{x+y} - 2y + 1$$

$$f_{xx} = -\frac{1}{(x+y)^2} - 2 \quad , \quad f_{yy} = -\frac{1}{(x+y)^2} - 2$$

$$f_{xy} = f_{yx} = -\frac{1}{(x+y)^2}$$

Βρίσκουμε το πρόσημο του εσσιανού πίνακα:

$$H_f = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(x+y)^2} - 2 & -\frac{1}{(x+y)^2} \\ -\frac{1}{(x+y)^2} & -\frac{1}{(x+y)^2} - 2 \end{bmatrix}$$

τότε $\Delta = |H_f| = \left[\frac{1}{(x+y)^2} + 2\right]^2 - \frac{1}{(x+y)^4} =$

$$= \frac{1}{(x+y)^4} + \frac{4}{(x+y)^2} + 4 - \frac{1}{(x+y)^4} = \frac{4}{(x+y)^2} + 4 > 0$$

για κάθε x, y, με $x+y>0$.

Επειδή $f_{xx}<0$, $f_{yy}<0$ και $\Delta>0$ τότε ο εσσιανός πίνακας είναι αρνητικά ορισμένος, οπότε η f είναι γνήσια κοίλη.

- Ελεύθερο στάσιμο: $\{f_x=0, f_y=0\}$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+y} - 2x = 0 \\ \frac{1}{x+y} - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+y} = 2x \\ \frac{1}{x+y} = 2y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x = 2y - 1 \\ \frac{1}{x+y} = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2y - \frac{1}{2}} = 2y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - \frac{1}{2} \\ 4y^2 - 2y - y + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = y - \frac{1}{2} \\ 4y^2 - 3y + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{ή} \quad x = -\frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

άρα $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ (δεκτή) ή $\begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$ (απορρίπτεται) αφού $x+y>0$

οπότε το στάσιμο σημείο είναι το $(x,y) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

- Χαρακτηρισμός του στάσιμου σημείου $(x,y) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$:

Επειδή ο εσσιανός πίνακας είναι αρνητικά ορισμένος για κάθε x, y τότε το στάσιμο σημείο $(x,y) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ είναι γνήσιο ολικό μέγιστο.

▶ $f(x,y) = x^{1/2} y^{1/4} - 2x - y$, με $x \geq 0, y \geq 0$

- Κυρτότητα:

$$f_x = \frac{1}{2} x^{-1/2} y^{1/4} - 2, \quad f_y = \frac{1}{4} x^{1/2} y^{-3/4} - 1$$

$$f_{xx} = -\frac{1}{4} x^{-3/2} y^{1/4}, \quad f_{yy} = -\frac{3}{16} x^{1/2} y^{-7/4}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{1}{8} x^{-1/2} y^{-3/4}$$

Βρίσκουμε το πρόσημο του εσσιανού πίνακα:

$$H_f = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} x^{-3/2} y^{1/4} & \frac{1}{8} x^{-1/2} y^{-3/4} \\ \frac{1}{8} x^{-1/2} y^{-3/4} & -\frac{3}{16} x^{1/2} y^{-7/4} \end{bmatrix}$$

τότε $\Delta = |H_f| = \frac{3}{32} x^{-1} y^{-3/2} - \frac{1}{64} x^{-1} y^{-3/2} =$

$= \frac{5}{64} x^{-1} y^{-3/2} > 0$, για κάθε $x, y > 0$.

Επειδή $f_{xx}<0$, $f_{yy}<0$ και $\Delta>0$ τότε ο εσσιανός πίνακας είναι αρνητικά ορισμένος, οπότε η f είναι γνήσια κοίλη.

- Ελεύθερο στάσιμο: $\{f_x=0, f_y=0\}$

$$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/4}-2=0 \\ \frac{1}{4}x^{1/2}y^{-3/4}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{-1/2}y^{1/4}=4 \\ x^{1/2}y^{-3/4}=4 \end{cases} \overset{x,y>0}{\Rightarrow}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4}\ln y=\ln 4 \\ \frac{1}{2}\ln x-\frac{3}{4}\ln y=\ln 4 \end{cases} \overset{(+)}{\Longrightarrow} \begin{cases} -\frac{1}{2}\ln y=2\ln 4 \\ -\frac{1}{2}\ln y+\frac{1}{4}\ln y=\ln 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \ln y=-4\ln 4 \\ -\frac{1}{2}\ln x-\ln 4=\ln 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln y=\ln 2^{-8} \\ \ln x=-4\ln 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2^{-8} \\ \ln x=\ln 2^{-8} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=2^{-8}>0 \\ x=2^{-8}>0 \end{cases}$$

οπότε το ελεύθερο στάσιμο είναι το $(x,y)=(2^{-8},2^{-8})$.

- Χαρακτηρισμός του ελεύθερου στάσιμου $(x,y)=(2^{-8},2^{-8})$:

Επειδή ο εσσιανός πίνακας είναι αρνητικά ορισμένος για κάθε $x,y>0$ τότε το στάσιμο σημείο $(x,y)=(2^{-8},2^{-8})$ είναι γνήσιο ολικό μέγιστο.

Άσκηση 5η: Θεωρούμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης στη θετική περιοχή:

$$\max\left\{ f = p\left(2\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) - wx - vy \,/\, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$$

με γνήσιες θετικές παραμέτρους: $\{w, v, p\}$.

Να βρεθούν οι βέλτιστες ποσότητες: $\{x^*, y^*\}$ και η μέγιστη τιμή f^*, ως συναρτήσεις των παραμέτρων, και να διερευνηθούν οι ιδιότητες μονοτονίας, και κυρτότητας αυτών των συναρτήσεων.

Λύση:

Συνθήκες 1ης τάξης (ελεύθερο στάσιμο)

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p x^{-1/2} - w = 0 \\ \frac{p}{2} y^{-1/2} - v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{-1/2} = \frac{w}{p} \\ y^{-1/2} = \frac{2v}{p} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{p^2}{w^2} \\ y = \frac{p^2}{4v^2} \end{cases}$$

οπότε οι βέλτιστες ποσότητες είναι:

$$x^*(p,v,w) = \frac{p^2}{w^2}, \quad y^*(p,v,w) = \frac{p^2}{4v^2}$$

Συνθήκες 2ης τάξης (πρόσημο του εσσιανού πίνακα και χαρακτηρισμός του ελεύθερου στάσιμου σημείου)

$$Hf = \begin{bmatrix} -\frac{p}{2} x^{-3/2} & 0 \\ 0 & -\frac{p}{4} y^{-3/2} \end{bmatrix}$$

τότε $\Delta = |Hf| = \frac{p^2}{8} x^{-3/2} y^{-3/2} > 0$, για κάθε $x, y > 0$, οπότε ο εσσιανός πίνακας είναι αρνητικά ορισμένος, αφού $f_{xx} < 0$, $f_{yy} < 0$ και $\Delta > 0$, άρα το ελεύθερο στάσιμο σημείο (x^*, y^*) είναι γνήσιο ολικό μέγιστο.

- Η μέγιστη τιμή της f είναι:

$$f^* = f^*(p,v,w) = f(x^*,y^*) = p\left(2\sqrt{x^*} + \sqrt{y^*}\right) - w x^* - v y^* =$$

$$= p\left(\frac{2p}{w} + \frac{p}{2v}\right) - w\frac{p^2}{w^2} - v \cdot \frac{p^2}{4v^2} =$$

$$= \frac{2p^2}{w} + \frac{p^2}{2v} - \frac{p^2}{w} - \frac{p^2}{4v} = \frac{p^2}{w} + \frac{p^2}{4v}$$

- Μονοτονία:

▸ $\frac{\partial x^*}{\partial p} = \frac{2p}{w^2} > 0 \Rightarrow x^*$ – αύξουσα ως προς p

▸ $\frac{\partial x^*}{\partial v} = 0 \Rightarrow x^*$ σταθερή ως προς v

▸ $\frac{\partial x^*}{\partial w} = -\frac{2p^2}{w^3} < 0 \Rightarrow x^*$ – φθίνουσα ως προς w

▸ $\frac{\partial y^*}{\partial p} = \frac{p}{2v^2} > 0 \Rightarrow y^*$ – αύξουσα ως προς p

▸ $\frac{\partial y^*}{\partial w} = 0 \Rightarrow y^*$ σταθερή ως προς w

▸ $\frac{\partial y^*}{\partial v} = -\frac{p^2}{2v^3} < 0 \Rightarrow y^*$ – φθίνουσα ως προς v

- $\dfrac{\partial f^*}{\partial p} = \dfrac{2p}{w} + \dfrac{p}{2v} > 0 \Rightarrow$ f^* – αύξουσα ως προς p

- $\dfrac{\partial f^*}{\partial v} = -\dfrac{p^2}{4v^2} < 0 \Rightarrow$ f^* – φθίνουσα ως προς v

- $\dfrac{\partial f^*}{\partial w} = -\dfrac{p^2}{w^2} < 0 \Rightarrow$ f^* – φθίνουσα ως προς w

• Κυρτότητα:

Έχουμε $x^*_{pp} = \dfrac{2}{w^2} > 0$, $x^*_{pv} = 0$, $x^*_{pw} = -\dfrac{4p}{w^3} < 0$

$x^*_{vp} = x^*_{vv} = x^*_{vw} = 0$, $x^*_{wp} = -\dfrac{4p}{w^3} < 0$, $x^*_{wv} = 0$

$x^*_{ww} = \dfrac{6p^2}{w^4} > 0$

- x^* είναι γνήσια κυρτή ως προς p
- x^* είναι γνήσια κυρτή ως προς w
- Εξετάζουμε την κυρτότητα της x^* ως προς (p, w):

$$H_{x^*} = \begin{bmatrix} x^*_{pp} & x^*_{pw} \\ x^*_{wp} & x^*_{ww} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{w^2} & -\dfrac{4p}{w^3} \\ -\dfrac{4p}{w^3} & \dfrac{6p^2}{w^4} \end{bmatrix}$$

τότε $\Delta = |H_{x^*}| = \dfrac{12p^2}{w^6} - \dfrac{16p^2}{w^6} = -\dfrac{4p^2}{w^6} < 0$

οπότε ο H_{x^*} είναι αόριστος, τότε η x^* δεν είναι ούτε κυρτή ούτε κοίλη ως προς (p, w).

Ομοίως, για τ' άλλα ...