ΦροντιστήριοΕφ.IV(B)

1.

Θεωρούμε τη συνάρτηση παραγωγής: $Q(K,L)=(K^{3/2}+L^{3/2})^{2/3}$ **με** $\{K\geq 0, L\geq 0\}$**.**

α). Να διερευνηθεί αν είναι ομογενής.

β). Να γίνει το γράφημα μιας καμπύλης ισοπαραγωγής, και να διερευνηθεί αν η συνάρτηση παραγωγής είναι οιονεί κοίλη ή οιονεί κυρτή και αν ορίζει αύξοντα ή φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης των συντελεστών παραγωγής.

γ). Να βρεθεί γραφικά η λύση του παρακάτω προβλήματος ελαχιστοποίησης του κόστους:

$$\min\{C=2K+L \,\|\, Q(K,L)=(K^{3/2}+L^{3/2})^{2/3}\geq 1\}$$

2.

Θεωρούμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του κόστους παραγωγής για δοσμένη ποσότητα παραγωγής:

$$\min\{C=vK+wL \,\|\, Q=K^{\rho}+L^{\rho}=q\} \quad \textbf{με} \quad 0<\rho<1$$

όπου $\{v,w\}$ **είναι οι μοναδιαίες τιμές των συντελεστών παραγωγής, κεφαλαίου και εργασίας:** $\{K,L\}$ **αντίστοιχα.**

1. Να γίνουν τα γραφήματα των καμπύλων ισοπαραγωγής.

2. Να διαπιστωθεί ότι στις βέλτιστες ποσότητες των συντελεστών παραγωγής, ο λόγος συμμετοχής: K/L **εξαρτάται μόνο από το λόγο των μοναδιαίων τιμών:** v/w**, και ότι η αντίστοιχη εξάρτηση είναι φθίνουσα ελαστική.**

3.

Μια επιχείρηση διαθέτει το ίδιο προϊόν σε διαφορετικές αγορές, σε ποσότητες $\{X,Y\}$ **αντίστοιχα, με συνολικό κόστος** $C=X+Y$**, και εξισώσεις ζήτησης:** $V=2-X$ **και** $W=4-Y$ **αντίστοιχα, όπου** $\{V,W\}$ **είναι οι αντίστοιχες μοναδιαίες τιμές. Η επιχείρηση λειτουργεί μεγιστοποιώντας το κέρδος:** $\Pi(X,Y)=VX+WY-C(X,Y)$**.**

α) Να βρεθεί η συνάρτηση κέρδους και να γίνει το γράφημα των ισοσταθμικών της.

β) Να βρεθούν οι τιμές στις δύο αγορές που μεγιστοποιούν το κέρδος.

γ) Να διαπιστωθεί ότι στις διατιθέμενες ποσότητες, η ζήτηση ως προς τις αντίστοιχες τιμές είναι ελαστική σε αμφότερες τις αγορές, και ότι η τιμή είναι μικρότερη για την αγορά με τη μεγαλύτερη ελαστικότητα της ζήτησης ως προς την τιμή.

4.

Θεωρούμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης χρησιμότητας U **στην κατανάλωση δύο αγαθών σε ποσότητες** $\{X,Y\}$**, με δοσμένες μοναδιαίες τιμές** $\{v,w\}$ **και δοσμένη δαπάνη** c**:**

$$\max_{\{X,Y\}}\{U=2\sqrt{X}+\sqrt{Y} \,\|\, C=vX+wY=c\}$$

α) Να βρεθεί η λύση $\{x,y\}$ **γραφικά και αναλυτικά.**

β) Να διαπιστωθεί ότι ο λόγος συμμετοχής των δύο αγαθών στη δαπάνη: vx/wy**, εξαρτάται μόνο από το λόγο των μοναδιαίων τιμών:** v/w**. Να υπολογιστεί και να ερμηνευτεί η αντίστοιχη ελαστικότητα.**

5.

Θεωρούμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης της χρησιμότητας U **στην κατανάλωση δύο αγαθών σε ποσότητες** $\{X,Y\}$ **με δοσμένες μοναδιαίες τιμές** $\{v,w\}$ **και δοσμένη δαπάνη** c**:**

$$\max_{\{X,Y\}}\{U=\sqrt{X}+2\sqrt{Y} \,\|\, C=vX+wY=c\}$$

α) Να βρεθεί η λύση $\{x,y\}$ **γραφικά και αναλυτικά.**

β) Να διερευνηθούν και να ερμηνευτούν οι ιδιότητες ομογένειας της λύσης ως προς τις παραμέτρους $\{v,w,c\}$**.**

6.

Θεωρούμε τη συνάρτηση χρησιμότητας: $U(X,Y)=\ln(X^{5/2}+4Y^{5/2})$ **όπου** $\{X\geq 0, Y\geq 0\}$ **είναι οι ποσότητες κατανάλωσης δύο αγαθών.**

α). Να διερευνηθεί αν η συνάρτηση χρησιμότητας είναι ομογενής.

β). Να γίνει το γράφημα μιας καμπύλης αδιαφορίας.

γ). Αν οι μοναδιαίες τιμές των δύο αγαθών είναι $\{v,w\}$ **αντίστοιχα, να βρεθούν οι βέλτιστες ποσότητες κατανάλωσης** $\{X^*,Y^*\}$ **των δύο αγαθών που ελαχιστοποιούν την δαπάνη για επιθυμητό επίπεδο χρησιμότητας** u**.**

7.

Θεωρούμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της δαπάνης κατανάλωσης:

$$\min\{C=vX+wY \,\|\, U=(X+1)(Y-2)\geq u\} \quad \text{με} \quad X\geq 0,\ Y\geq 0$$

α) Να γίνει το γράφημα της καμπύλης αδιαφορίας $U=(X+1)(Y-2)=u$**, και να βρεθεί γραφικά η λύση** (X^*,Y^*) **του προβλήματος. Τι μπορείτε να πείτε για τα δύο αγαθά?**

β) Να βρεθούν αναλυτικά η λύση (X^*,Y^*) **του προβλήματος καθώς και η αντίστοιχη ελάχιστη δαπάνη** C^***, ως συναρτήσεις των παραμέτρων** $\{v,w,u\}$

γ). Να διερευνηθούν οι ιδιότητες ομογένειας των συναρτήσεων στο β), ως προς τις τιμές των αγαθών $\{v,w\}$

8

Σε μια σύνθετη παραγωγή δύο προιόντα παράγονται σε ποσότητες (X,Y) **με συνάρτη κόστους:** $C(X,Y)=1+(X^{1/2}+Y^{1/2})^2$**.**

α). Να διερευνηθεί αν η συνάρτηση κόστους είναι ομογενής.

β). Να γίνει το γράφημα μιας καμπύλης ισοκόστους και να διερευνηθεί αν η συνάρτη η κόστους είναι οιονεί κοίλη ή οιονεί κυρτή, και αν ορίζει φθίνοντα ή αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης των προϊόντων στο κόστος.

γ). Να βρεθεί γραφικά η λύση του παρακάτω προβλήματος μεγιστοποίησης του εσόδου:

$$\max\{R=2X+Y \,\|\, C=1+(X^{1/2}+Y^{1/2})^2\leq 2\},$$

και να σχολιαστεί το αποτέλεσμα.

9.

Μία επιχείρηση παράγει δύο προιόντα σε ποσότητες $\{x,y\}$**, με κόστος** $C=x^2+y$**, και έσοδο** $R=vx+wy$**, όπου** $\{v>0,w>0\}$ **είναι οι μοναδιαίες τιμές τους. Η επιχείρηση λειτουργεί με περιορισμό στο συνολικό κόστος:** $C=1$**, μεγιστοποιώντας το έσοδο.**

(α) Να γίνει το γράφημα της καμπύλης $C=1$**, και το γράφημα των ισοσταθμικών της συνάρτησης εσόδου** R**, στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.**

(β) Να διατυπωθεί συνθήκη ώστε να παράγονται αμφότερα τα προιόντα. Σαυτή την περίπτωση να υπολογιστεί το έσοδο ως συνάρτηση των μοναδιαίων τιμών (u,v) **και να διαπιστωθεί ότι είναι συνάρτηση ομογενής πρώτου βαθμού.**

(γ) Να εκτιμηθεί πόσο θα μεταβληθεί το έσοδο που υπολογίστηκε στο (β) αν το επιτρεπτό κόστος αυξηθεί κατά 0.1

(δ) Πώς θα αλλάξουν τα παραπάνω αν η επιχείρηση λειτουργεί με τον ίδιο περιορισμό στο κόστος, αλλά μεγιστοποιώντας το κέρδος;

10.

Θεωρούμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους: $\max\{f=x^{1/2}y^{1/4}-wx-vy\}$**, στη θετική περιοχή** $\{x\geq 0,y\geq 0\}$**, με παραμέτρους:** $\{w>0,v>0\}$**. Να ερμηνευτεί και να βρεθεί η μέγιστη τιμή** f^* **ως συνάρτηση των παραμέτρων. Επίσης να διερευνηθούν οι ιδιότητες μονοτονίας και ομογένειας αυτής της συνάρτησης.**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ IVB ΛΥΣΕΙΣ

1.

Θεωρούμε τη συνάρτηση παραγωγής: $Q(K,L) = (K^{3/2} + L^{3/2})^{2/3}$ **με** $\{K \geq 0, L \geq 0\}$.

α). Να διερευνηθεί αν είναι ομογενής.

β). Να γίνει το γράφημα μιας καμπύλης ισοπαραγωγής, και να διερευνηθεί αν η συνάρτηση παραγωγής είναι οιονεί κοίλη ή οιονεί κυρτή και αν ορίζει αύξοντα ή φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης των συντελεστών παραγωγής.

γ). Να βρεθεί γραφικά η λύση του παρακάτω προβλήματος ελαχιστοποίησης του κόστους:

$$\min\{C = 2K + L \,\|\, Q(K,L) = (K^{3/2} + L^{3/2})^{2/3} \geq 1\}$$

<u>Λύση.</u>

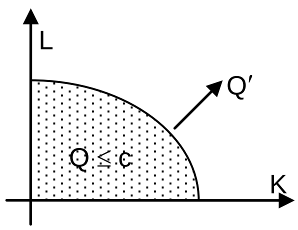
α). Η συνάρτηση είναι ομογενής βαθμού 1, διότι:

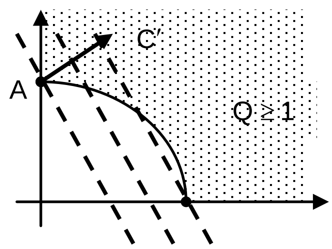
$$Q(tK, tL) = [(tK)^{3/2} + (tL)^{3/2}]^{2/3} = [t^{3/2}K^{3/2} + t^{3/2}L^{3/2}]^{2/3} = (t^{3/2})^{2/3}[K^{3/2} + L^{3/2}] = t[K^{3/2} + L^{3/2}]$$
$$= tQ(K,L)$$

β). Οι σταθμικές της $Q(K,L)$ είναι ίδιες με τις σταθμικές της $H(K,L) = K^{3/2} + L^{3/2}$, διότι η Q είναι αύξων μετασχηματισμός της H: $Q = H^{2/3}$. Η συνάρτηση H είναι της γνωστής μορφής:

$x^{\alpha} + y^{\alpha}$ με $\alpha > 1$

Οι ισοσταθμικές της έχουν το γνωστό σχήμα του πρώτου από τα παρακάτω δύο γραφήματα, με τις κάτω σταθμικές κυρτές. Το ίδιο θα ισχύει για τις σταθμικές της αρχικής Q. Συμπεραίνουμε ότι, όπως και η H, η Q είναι οιονεί κυρτή και ορίζει αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης, δηλαδή δεν είναι κανονική.





γ). Τέλος όπως φαίνεται από το δεύτερο γράφημα παραπάνω, η λύση του προβλήματος είναι πάντοτε συνοριακή. Εξάλλου οι ακραίοι συνδυασμοί (K,L) είναι πιο παραγωγικοί. Ειδικότερα εδώ βρίσκεται στο πάνω σύνορο $A:(K = 0, L = 1)$, όπου η μικρότερη ισοσταθμική της $C = 2K + L$ συναντάει την περιοχή $Q \geq 1$, με $C = 2 \cdot 0 + 1 = 1$. Στο άλλο σύνορο $B:(K = 1, L = 0)$, το κόστος είναι μεγαλύτερο: $C = 2 \cdot 1 + 0 = 2$.

Παρατήρηση.

1. Η συνάρτηση παραγωγής δεν είναι κανονική ως προς την κυρτότητα.
2. Οι δύο συντελεστές παραγωγής είναι πλήρως υποκατάστατοι.
3. Ενδιάμεσοι συνδυασμοί των συντελεστών είναι λιγότερο παραγωγικοί.

▲

2.

Θεωρούμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του κόστους παραγωγής για δοσμένη ποσότητα παραγωγής:

$$\min\{C = vK + wL \,\|\, Q = K^\rho + L^\rho = q\} \quad \textbf{με} \quad 0 < \rho < 1$$

όπου $\{v, w\}$ **είναι οι μοναδιαίες τιμές των συντελεστών παραγωγής, κεφαλαίου και εργασίας:** $\{K, L\}$ **αντίστοιχα.**

1. Να γίνουν τα γραφήματα των καμπύλων ισοπαραγωγής.

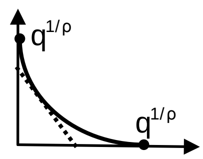
2. Να διαπιστωθεί ότι στις βέλτιστες ποσότητες των συντελεστών παραγωγής, ο λόγος συμμετοχής: K/L **εξαρτάται μόνο από το λόγο των μοναδιαίων τιμών:** v/w**, και ότι η αντίστοιχη εξάρτηση είναι φθίνουσα ελαστική.**

<u>Λύση.</u> Οι συγκεκριμένες καμπύλες ισοπαραγωγής έχουν την γνωστή μορφή του παρακάτω σχήματος. Ειδικότερα κόβουν τους δύο άξονες εφαπτομενικά, επειδή έχουμε $0 < \rho < 1$. Εξάλλου παραγωγίζοντας στην εξίσωση πλεγμένα δύο φορές, βρίσκουμε για τις πλεγμένες παραγώγους τα πρόσημα:

$$K^\rho + L^\rho = q \Rightarrow \begin{cases} \rho K^{\rho-1} + \rho L^{\rho-1}L' = 0 \\ \rho(\rho-1)K^{\rho-2} + \rho(\rho-1)L^{\rho-2}(L')^2 + \rho L^{\rho-1}L'' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L' < 0 \\ L'' > 0 \end{cases}, \text{ διότι: } 0 < \rho < 1$$

Γραφικά διαπιστώνουμε ότι η λύση είναι εσωτερική, οπότε θα ικανοποιεί:

$$\frac{C_K}{C_L} = \frac{Q_K}{Q_L} \Rightarrow \frac{v}{w} = \frac{\rho K^{\rho-1}}{\rho L^{\rho-1}} \Rightarrow \left(\frac{K}{L}\right)^{\rho-1} = \frac{v}{w} \Rightarrow \frac{K}{L} = \left(\frac{v}{w}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}$$



Παρατηρούμε ότι ο βέλτιστος λόγος συμμετοχής των συντελεστών εξαρτάται μόνο από τον λόγο των αντίστοιχων μοναδιαίων τιμών, με ελαστικότητα (υποκατάστασης):

$$E_{v/w}(K/L) = 1/(\rho-1) \Rightarrow \left|E_{v/w}(K/L)\right| = 1/(1-\rho) > 1, \text{ διότι: } 0 < \rho < 1$$

Συμπεραίνουμε ότι η εξάρτηση του λόγου συμμετοχής των συντελεστών από τον λόγο τιμών είναι φθίνουσα ελαστική, οπότε αύξηση του λόγου τιμών κατά 1% θα προκαλέσει μεγαλύτερη μείωση στο λόγο συμμετοχής των συντελεστών κατά $1/(1-\rho)\%$.

3.

Μια επιχείρηση διαθέτει το ίδιο προϊόν σε διαφορετικές αγορές, σε ποσότητες $\{X, Y\}$ **αντίστοιχα, με συνολικό κόστος** $C = X + Y$**, και εξισώσεις ζήτησης:** $V = 2 - X$ **και** $W = 4 - Y$ **αντίστοιχα, όπου** $\{V, W\}$ **είναι οι αντίστοιχες μοναδιαίες τιμές. Η επιχείρηση λειτουργεί μεγιστοποιώντας το κέρδος:** $\Pi(X, Y) = VX + WY - C(X, Y)$**.**

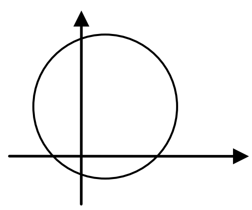
α) Να βρεθεί η συνάρτηση κέρδους και να γίνει το γράφημα των ισοσταθμικών της.

β) Να βρεθούν οι τιμές στις δύο αγορές που μεγιστοποιούν το κέρδος.

γ) Να διαπιστωθεί ότι στις διατιθέμενες ποσότητες, η ζήτηση ως προς τις αντίστοιχες τιμές είναι ελαστική σε αμφότερες τις αγορές, και ότι η τιμή είναι μικρότερη για την αγορά με τη μεγαλύτερη ελαστικότητα της ζήτησης ως προς την τιμή.

<u>Λύση</u>

α) $\Pi = (2 - X)X + (4 - Y)Y - (X + Y) = X + 3Y - X^2 - Y^2$



Οι ισοσταθμικές είναι κυκλικές με κέντρο στο στάσιμο σημείο:

$$\Pi_X = 1 - 2X = 0 \Rightarrow X_0 = 1/2$$

$$\Pi_Y = 3 - 2Y = 0 \Rightarrow Y_0 = 3/2$$

Ισχύει μόνο το τμήμα στη θετική περιοχή. Το κέντρο μπορεί να βρεθεί και με συμπλήρωση τετραγώνων

β). Η συνάρτηση κέρδους είναι παραβολική κοίλη με μέγιστο στο παραπάνω στάσιμο. Οι αντίστοιχες τιμές είναι:

$$\{v = 2 - 1/2 = 3/2,\ w = 4 - 3/2 = 5/2\}$$

Οι ελαστικότητες είναι:

$$X = 2 - V \Rightarrow E_V X = \frac{V(-1)}{2-V} = \frac{-3/2}{2-3/2} = -3$$

$$Y = 4 - W \Rightarrow E_W Y = \frac{W(-1)}{4-W} = \frac{-5/2}{4-5/2} = -\frac{5}{3}$$

Η ζήτηση είναι ελαστική σε αμφότερες τις αγορές, και η τιμή είναι μικρότερη στην X – αγορά που έχει και την μεγαλύτερη ελαστικότητα

4.

Θεωρούμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης χρησιμότητας U στην κατανάλωση δύο αγαθών σε ποσότητες $\{X, Y\}$, με δοσμένες μοναδιαίες τιμές $\{v, w\}$ και δοσμένη δαπάνη c:

$$\max_{\{X,Y\}}\{U = 2\sqrt{X} + \sqrt{Y} \,\|\, C = vX + wY = c\}$$

α) Να βρεθεί η λύση $\{x, y\}$ γραφικά και αναλυτικά.

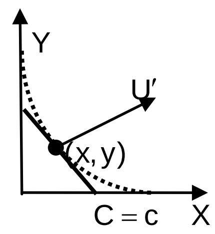
β) Να διαπιστωθεί ότι ο λόγος συμμετοχής των δύο αγαθών στη δαπάνη: vx/wy, εξαρτάται μόνο από το λόγο των μοναδιαίων τιμών: v/w. Να υπολογιστεί και να ερμηνευτεί η αντίστοιχη ελαστικότητα.

<u>**Λύση**</u>

α) Γραφικά η λύση δίνεται όπως στο γράφημα παρακάτω. Παρατηρούμε ότι είναι πάντοτε εσωτερική, επομένως περιορισμένη στάσιμη. Εφόσον δεν ζητείται ο πολλαπλασιαστής Lagrange, την βρίσκουμε από τις εξισώσεις περιορισμένης στασιμότητας:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{U_X}{U_Y} = \dfrac{C_X}{C_Y} \\ C = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{1/\sqrt{X}}{1/2\sqrt{Y}} = \dfrac{v}{w} \\ vX + wY = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{2\sqrt{Y}}{\sqrt{X}} = \dfrac{v}{w} \\ vX + wY = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Y = v^2X/4w^2 \\ vX + v^2X/4w = c \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{x = \frac{4cw}{4vw + v^2},\ y = \frac{cv}{vw + 4w^2}\right\} \text{ είναι η λύση}$$



β) Για τον λόγο συμμετοχής των δύο αγαθών στη συνολική δαπάνη, βρίσκουμε:

$$\frac{vx}{wy} = \frac{\dfrac{4wvc}{4wv + v^2}}{\dfrac{wvc}{4w^2 + wv}} = \frac{4(4w^2 + wv)}{4wv + v^2} = 4\frac{w}{v} = 4\left(\frac{v}{w}\right)^{-1}$$

Εξαρτάται μόνο από το λόγο των τιμών, και μάλιστα έχει σταθερή ελαστικότητα διότι είναι απλή δύναμη ίση με -1:

$$E_{v/w}(vx/wy) = -1$$

Δηλαδή, αν αυξηθεί η τιμή του ενός αγαθού σε σχέση με το άλλο κατά κάποιο ποσοστό, τότε (οριακά) η αντίστοιχη δαπάνη θα ελαττωθεί σε σχέση με την δαπάνη στο άλλο αγαθό κατά το ίδιο αυτό ποσοστό.

Υπενθυμίζουμε ότι οριακά (δηλαδή για μικρές μεταβολές) η ποσοστιαία μεταβολή ενός λόγου ισούται με την διαφορά της ποσοστιαίας μεταβολής του παρονομαστή από αυτή του αριθμητή.

Παρατήρηση. Η παραπάνω σχέση βρίσκεται και απευθείας από την εξίσωση περιορισμένης στασιμότητας:

$$\frac{U_X}{U_Y} = \frac{C_X}{C_Y} \Rightarrow \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{v}{w} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{4w^2}{v^2} \Rightarrow \frac{vx}{wy} = \frac{4w}{v}$$

▲

5.

Θεωρούμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης της χρησιμότητας U στην κατανάλωση δύο αγαθών σε ποσότητες $\{X,Y\}$ με δοσμένες μοναδιαίες τιμές $\{v,w\}$ και δοσμένη δαπάνη c:

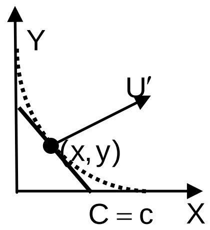
$$\max_{\{X,Y\}}\{U=\sqrt{X}+2\sqrt{Y} \,||\, C=vX+wY=c\}$$

α) Να βρεθεί η λύση $\{x,y\}$ γραφικά και αναλυτικά.

β) Να διερευνηθούν και να ερμηνευτούν οι ιδιότητες ομογένειας της λύσης ως προς τις παραμέτρους $\{v,w,c\}$.

<u>Λύση</u>

α) Γραφικά η λύση δίνεται όπως στο γράφημα παραπλεύρως. Παρατηρούμε ότι είναι πάντοτε εσωτερική, επομένως περιορισμένη στάσιμη. Εφόσον δεν ζητείται ο πολλαπλασιαστής Lagrange, την βρίσκουμε και από τις εξισώσεις περιορισμένης στασιμότητας:



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{U_X}{U_Y}=\dfrac{C_X}{C_Y}\\ C=c\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\dfrac{1/2\sqrt{X}}{1/\sqrt{Y}}=\dfrac{v}{w}\\ vX+wY=c\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{Y}}{2\sqrt{X}}=\dfrac{v}{w}\\ vX+wY=c\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}Y=4v^2X/w^2\\ vX+4v^2X/w=c\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\left\{x=\frac{cw}{vw+4v^2},\, y=\frac{4cv}{w^2+4vw}\right\}\text{ είναι η λύση}$$

β) Οι συναρτήσεις της λύσης $\{x(v,w,c),\, y(v,w,c)\}$ εκφράζουν την ζήτηση αγαθών ως συνάρτηση των τιμών τους και του διαθέσιμου εισοδήματος για δαπάνη. Είναι αμφότερες ομογενείς βαθμού 0 διότι παραμένουν αναλλοίωτες αν πολλαπλασιάσουμε όλες τις παραμέτρους με τον ίδιο συντελεστή, επειδή οι όροι στους αριθμητές και στους παρονομαστές είναι του ίδιου βαθμού 2. Πράγματι έχουμε:

$$x(tv,tw,tc)=\frac{(tc)(tw)}{(tv)(tw)+4(tv)^2}=\frac{t^2cw}{t^2(vw+4v^2)}=\frac{cw}{vw+4v^2}=x(v,w,c)\text{, και το ίδιο για το } y$$

Σημαίνει ότι η ζήτηση αγαθών δεν εξαρτάται από τις μονάδες μέτρησης του χρήματος. Δηλαδή δεν υπάρχει ψευδαίσθηση χρήματος.

Παρατήρηση. Ανεξάρτητα από τη λύση, το συμπέρασμα προκύπτει γενικότερα από την παρατήρηση ότι το πρόβλημα παραμένει το ίδιο αν πολλαπλασιάσουμε όλες τις παραμέτρους με τον ίδιο συντελεστή, διότι ο περιορισμός παραμένει αμετάβλητος:

$$(tv)X+(tw)Y=(tc)\Leftrightarrow vX+wY=c$$

▲

6.

Θεωρούμε τη συνάρτηση χρησιμότητας: $U(X,Y)=\ln(X^{5/2}+4Y^{5/2})$ όπου $\{X\geq 0, Y\geq 0\}$ είναι οι ποσότητες κατανάλωσης δύο αγαθών.

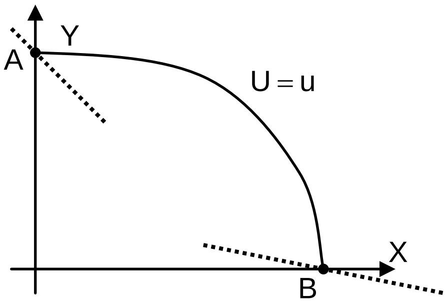
α). Να διερευνηθεί αν η συνάρτηση χρησιμότητας είναι ομογενής.

β). Να γίνει το γράφημα μιας καμπύλης αδιαφορίας.

γ). Αν οι μοναδιαίες τιμές των δύο αγαθών είναι $\{v,w\}$ αντίστοιχα, να βρεθούν οι βέλτιστες ποσότητες κατανάλωσης $\{X^*,Y^*\}$ των δύο αγαθών που ελαχιστοποιούν την δαπάνη για επιθυμητό επίπεδο χρησιμότητας u.

Λύση.

α). Η συνάρτηση στην παρένθεση είναι ομογενής, αλλά ο λογάριθμος χαλάει την ομογένεια. Επομένως δεν είναι ομογενής, αλλά είναι ομοθετική ως συνάρτηση ομογενούς.



β). Οι ισοσταθμικές της είναι ίδιες με τις ισοσταθμικές της ομογενούς $V=X^{5/2}+4Y^{5/2}$ που ως γνωστό έχουν το γράφημα του παραπλεύρως σχήματος, διότι η δύναμη $5/2$ είναι μεγαλύτερη της μονάδος. Ειδικότερα η συνάρτηση χρησιμότητας είναι οιονεί κυρτή αντί οιονεί κοίλη ως συνήθως.

γ). Όπως φαίνεται και στο γράφημα η κατανάλωση με το μικρότερο κόστος θα βρίσκεται πάντοτε στο σύνορο, σένα από τα δύο σημεία:

$$A:\{X=0,\ln(X^2+4Y^2)=u\}\Rightarrow\{X=0,\ln(4Y^2)=u\}\Rightarrow\{X=0,Y=e^{u/2}/2\}$$

$$B:\{Y=0,\ln(X^2+4Y^2)=u\}\Rightarrow\{Y=0,\ln(X^2)=u\}\Rightarrow\{X=e^{u/2},Y=0\}$$

Τα αντίστοιχα κόστη είναι:

$$V_A=vX+wY=wY=we^{u/2}/2 \quad \text{και} \quad V_B=vX+wY=vX=ve^{u/2}$$

Επομένως θα έχουμε κατανάλωση στο A με $X^*=0$ αν $V_A\le V_B\Rightarrow we^{u/2}/2\le ve^{u/2}\Rightarrow w\le 2v$, στο B με $Y^*=0$ αν ισχύει το αντίθετο.

▲

7.

Θεωρούμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της δαπάνης κατανάλωσης:

$$\min\{C=vX+wY \,\|\, U=(X+1)(Y-2)\ge u\} \quad \textbf{με} \quad X\ge 0,\ Y\ge 0$$

α) Να γίνει το γράφημα της καμπύλης αδιαφορίας $U=(X+1)(Y-2)=u$**, και να βρεθεί γραφικά η λύση** (X^*,Y^*) **του προβλήματος. Τι μπορείτε να πείτε για τα δύο αγαθά?**

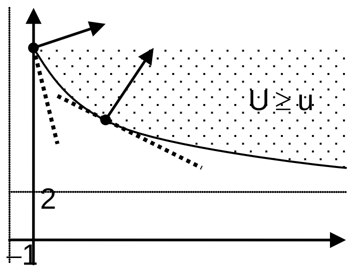
β) Να βρεθούν αναλυτικά η λύση (X^*,Y^*) **του προβλήματος καθώς και η αντίστοιχη ελάχιστη δαπάνη** C^***, ως συναρτήσεις των παραμέτρων** $\{v,w,u\}$

γ). Να διερευνηθούν οι ιδιότητες ομογένειας των συναρτήσεων στο β), ως προς τις τιμές των αγαθών $\{v,w\}$

<u>Λύση.</u>

α). Η ισοσταθμική είναι η υπερβολή μετατοπισμένη στο σημείο:

$$\{X+1=0,\ Y-2=0\}\Rightarrow\{X_0=-1,\ Y_0=2\}$$



Γραφικά διαπιστώνουμε ότι:

1. Η κατανάλωση του Y είναι πάντοτε μεγαλύτερη του 2.
2. Η κατανάλωση του X θα μηδενιστεί αν η τιμή του είναι πολύ μεγάλη (συνοριακή λύση).

β). Αν η λύση είναι εσωτερική θα δίνεται από τις εξισώσεις Lagrange:

$$\left.\begin{matrix} C_x=\lambda U_x \\ C_y=\lambda U_y \\ U=u \end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix} v=\lambda(Y-2) \\ w=\lambda(X+1) \\ (X+1)(Y-2)=u \end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix} Y-2=v/\lambda \\ X+1=w/\lambda \\ vw/\lambda^2=u \end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix} X^*=\sqrt{uw/v}-1 \\ Y^*=\sqrt{uv/w}+2 \\ \lambda^*=\sqrt{vw/u} \end{matrix}\right\}$$

Η παραπάνω λύση είναι αποδεκτή εφόσον $X^*\ge 0\Rightarrow\sqrt{uw/v}\ge 1\Rightarrow v/w\le u$, αλλιώς θα είναι συνοριακή: $X^*=0,\ Y^*=2+u$

Η αντίστοιχη ελάχιστη δαπάνη θα είναι:

$$C^*=vX^*+wY^*=v(\sqrt{uw/v}-1)+w(\sqrt{uv/w}+2)=2\sqrt{uvw}+2w-v \quad \text{αν} \quad v/w\le u$$

$$C^*=vX^*+wY^*=v0+w(2+u)=(2+u)w \quad \text{αν} \quad v/w\ge u$$

γ). Ως προς τις τιμές των αγαθών $\{v,w\}$:

1. Οι συναρτήσεις ζήτησης $\{X^*,Y^*\}$ είναι ομογενείς βαθμού 0.
2. Η συνάρτηση δαπάνης C^* είναι ομογενής βαθμού 1.

Παρατήρηση. Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί και με αντικατάσταση από τον περιορισμό:

$$C=vX+wY=vX+w\left(2+\frac{u}{X+1}\right)=2w+vX+\frac{u}{X+1}$$

Το κόστος είναι κοίλη συνάρτηση του $X\ge 0$ και βρίσκουμε όπως προηγουμένως, ελάχιστο:

1. Στο σύνορο: $X^*=0$ αν $C'(0)=v-wu\ge 0\Rightarrow v/w\ge u$
2. Στο εσωτερικό στάσιμο: $C'=v-w\dfrac{u}{(X+1)^2}=0\Rightarrow X^*=\sqrt{uw/v}-1$ αν $v/w<u$

8

Σε μια σύνθετη παραγωγή δύο προιόντα παράγονται σε ποσότητες (X,Y) **με συνάρτηση κόστους:** $C(X,Y)=1+(X^{1/2}+Y^{1/2})^2$**.**

α). Να διερευνηθεί αν η συνάρτηση κόστους είναι ομογενής.

β). Να γίνει το γράφημα μιας καμπύλης ισοκόστους και να διερευνηθεί αν η συνάρτηση κόστους είναι οιονεί κοίλη ή οιονεί κυρτή, και αν ορίζει φθίνοντα ή αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης των προϊόντων στο κόστος.

γ). Να βρεθεί γραφικά η λύση του παρακάτω προβλήματος μεγιστοποίησης του εσόδου:

$$\max\{R=2X+Y \,\|\, C=1+(X^{1/2}+Y^{1/2})^2\le 2\},$$

και να σχολιαστεί το αποτέλεσμα.

Λύση.

α). Η σταθερή συνάρτηση 1 είναι ομογενής βαθμού 0 ενώ η συνάρτηση $(X^{1/2}+Y^{1/2})^2$ είναι ομογενής βαθμού 1, διότι:

$$[(tX)^{1/2}+(tY)^{1/2}]^2=[t^{1/2}X^{1/2}+t^{1/2}Y^{1/2}]^2=(t^{1/2})^2[X^{1/2}+Y^{1/2}]^2=t[X^{1/2}+Y^{1/2}]$$

Επομένως η $C(X,Y)$ δεν είναι ομογενής ως άθροισμα ομογενών συναρτήσεων διαφορετικού βαθμού. Είναι όμως ομοθετική ως (αύξουσα) συνάρτηση ομογενούς:

$$C=1+H^2 \quad \text{όπου: } H(X,Y)=X^{1/2}+Y^{1/2}$$

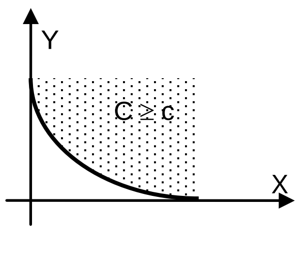
β). Προκύπτει ειδικά από την τελευταία σχέση ότι οι ισοσταθμικές της C είναι ίδιες με τις ισοσταθμικές της H. Η συνάρτηση H είναι της γνωστής μορφής

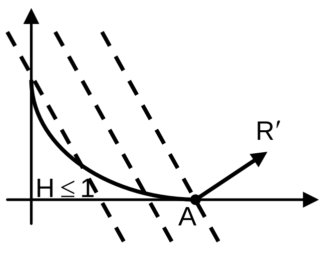
$$x^{\alpha}+y^{\alpha} \quad \text{με } \alpha<1$$

και οι ισοσταθμικές της έχουν το γνωστό σχήμα του πρώτου από τα παρακάτω δύο γραφήματα, με τις πάνω σταθμικές κυρτές. Το ίδιο θα ισχύει για τις σταθμικές της αρχικής C. Συμπεραίνουμε ότι, όπως και η H:

Η C *είναι οιονεί κοίλη και ορίζει φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης. Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση κόστους δεν είναι κανονική ως προς την κυρτότητα. Ενδιάμεσες ποσότητες παραγωγής έχουν υψηλότερο κόστος.*

γ). Τέλος όπως φαίνεται στο δεύτερο σχήμα παρακάτω, λόγω της παραπάνω μη κανονικότητας, η λύση του προβλήματος είναι **συνοριακή** στο κάτω σύνορο $A:(X=1, Y=0)$, όπου η μεγαλύτερη ισοσταθμική της $R=2X+Y$ συναντάει την περιοχή $C\le 2 \Rightarrow H\le 1$. Δηλαδή παράγεται μόνο το πρώτο προιόν που δίνει «σχετικά» μεγαλύτερο έσοδο ανά μονάδα κόστους.





▲

9.

Μία επιχείρηση παράγει δύο προιόντα σε ποσότητες $\{x,y\}$**, με κόστος** $C=x^2+y$**, και έσοδο** $R=vx+wy$**, όπου** $\{v>0, w>0\}$ **είναι οι μοναδιαίες τιμές τους. Η επιχείρηση λειτουργεί με περιορισμό στο συνολικό κόστος:** $C=1$**, μεγιστοποιώντας το έσοδο.**

(α) Να γίνει το γράφημα της καμπύλης $C=1$**, και το γράφημα των ισοσταθμικών της συνάρτησης εσόδου** R**, στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.**

(β) Να διατυπωθεί συνθήκη ώστε να παράγονται αμφότερα τα προιόντα. Σαυτή την περίπτωση να υπολογιστεί το έσοδο ως συνάρτηση των μοναδιαίων τιμών (u,v) **και να διαπιστωθεί ότι είναι συνάρτηση ομογενής πρώτου βαθμού.**

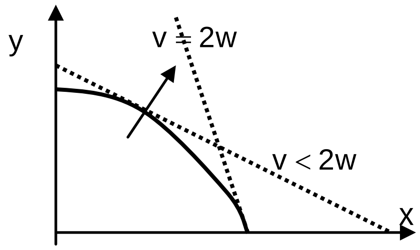
(γ) Να εκτιμηθεί πόσο θα μεταβληθεί το έσοδο που υπολογίστηκε στο (β) αν το επιτρεπτό κόστος αυξηθεί κατά 0.1

(δ) Πώς θα αλλάξουν τα παραπάνω αν η επιχείρηση λειτουργεί με τον ίδιο περιορισμό στο κόστος, αλλά μεγιστοποιώντας το κέρδος;

Λύση:

(α)Η καμπύλη ισοκόστους είναι παραβολή

$$C = x^2 + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x^2$$



Η συνάρτηση εσόδου έχει ισοσταθμικές:

$$R = vx + wy = r\,,$$

παράλληλες ευθείες με κλίση γνήσια αρνητική:

$$-v/w\,,$$

(β)Οι εξισώσεις Lagrange μας δίνουν:

$$\left.\begin{array}{c} R_x = \lambda C_x \\ R_y = \lambda C_y \\ C = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} v = \lambda 2x \\ w = \lambda \\ x^2 + y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x^* = v/2w \\ \lambda^* = w \\ y^* = 1 - v^2/4w^2 \end{array}\right\}$$

Το πρώτο προιόν παράγεται πάντοτε διότι $x^* = v/2w > 0$. Το δεύτερο παράγεται μόνο αν έχουμε $y^* = 1 - v^2/4w^2 > 0 \;\Rightarrow\; v/w < 2$

Αν δεν ισχύει η παραπάνω συνθήκη τότε η λύση είναι συνοριακή: $y^* = 0, x^* = 1$.

Συμπεραίνουμε ότι θα παράγονται αμφότερα τα προιόντα αν $v/w < 2$.

Σαυτή την περίπτωση το έσοδο είναι

$$R^* = wx^* + vy^* = w\frac{v}{2w} + v(1 - \frac{v^2}{4w^2}) = \frac{3}{2}v - \frac{v^3}{w^2} = v(\frac{3}{2} - \frac{v^2}{w^2})\,.$$

Συνάρτηση ομογενής πρώτου βαθμού.

(γ) Ο πολλαπλασιαστής μετράει την παράγωγο του εσόδου ως προς το κόστος: $R^*{}'(C) = \lambda^*$. Επομένως αν το επιτρεπτό κόστος αυξηθεί κατά $dC = 0.1$, τότε το έσοδο θα μεταβληθεί κατά $\approx dR^* = \lambda^* dC = w/10$.

(δ) Το κέρδος, το έσοδο, και το κόστος συνδέονται με τη σχέση:

$\Pi = R - C$. Εφόσον το κόστος C είναι σταθερό, μεγιστοποίηση του εσόδου με σταθερό κόστος και μεγιστοποίηση του κέρδους με σταθερό κόστος είναι το ίδιο πρόβλημα, και επομένως θα βρούμε την ίδια λύση.

Παρατήρηση. Η λύση μπορεί να βρεθεί και με αντικατάσταση από τον περιορισμό:

$$C = x^2 + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x^2$$

Αντικαθιστώντας στο έσοδο, βρίσκουμε:

$$R = vx + wy = vx + w(1 - x^2) = w + vx - wx^2 \text{ για } x \geq 0$$

Είναι κοίλη με μέγιστο στο στάσιμο:

$$R' = v - 2wx = 0 \Rightarrow x^* = v/2w$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$$y^* = 1 - x^{*2} = 1 - \frac{v}{2w} > 0 \quad \text{αν } v < 2w$$

▲

10.

Θεωρούμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους: $\max\{f = x^{1/2}y^{1/4} - wx - vy\}$**, στη θετική περιοχή** $\{x \geq 0, y \geq 0\}$**, με παραμέτρους:** $\{w > 0, v > 0\}$**. Να ερμηνευτεί και να βρεθεί η μέγιστη τιμή** f^* **ως συνάρτηση των παραμέτρων. Επίσης να διερευνηθούν οι ιδιότητες μονοτονίας και ομογένειας αυτής της συνάρτησης.**

Λύση.

$$\left.\begin{array}{c} f_x = (1/2)x^{-1/2}y^{1/4} - w = 0 \\ f_y = (1/4)x^{1/2}y^{-3/4} - v = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x^{-1/2}y^{1/4} = 2w \\ x^{1/2}y^{-3/4} = 4v \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} -(1/2)\ln x + (1/4)\ln y = \ln 2w \\ (1/2)\ln x - (3/4)\ln y = \ln 4v \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} -\ln x = 3\ln 2w + \ln 4v \\ -(1/2)\ln y = \ln 2w + \ln 4v \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \ln x = -\ln 32w^3 v \\ \ln y = -2\ln 8w^2 v^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x^* = 1/32w^3 v \\ y^* = 1/64w^2 v^2 \end{array}\right\}$$

$$f^* = x^{*1/2}y^{*1/4} - wx^* - vy^* = \frac{1}{2^{5/2}w^{3/2}v^{1/2}2^{6/4}w^{1/2}v^{1/2}} - \frac{w}{2^5 w^3 v} - \frac{v}{2^6 w^2 v^2}$$
$$= \frac{1}{2^4 w^2 v} - \frac{1}{2^5 w^2 v} - \frac{1}{2^6 w^2 v} = 2^{-6} w^{-2} v^{-1}$$

Είναι φθίνουσα και ομογενής βαθμού $\varepsilon = -2 - 1 = -3$