

Φροντιστήριο Εφ. IV (Α)

1.

α) Η ποσότητα ζήτησης Q ενός αγαθού εξαρτάται από την μοναδιαία τιμή του P και από το εισόδημα Y , σύμφωνα με την σχέση: $Q = P^{-2}Y$. Αν η τιμή αυξηθεί κατά 2%, να εκτιμηθεί πόσο πρέπει να μεταβληθεί το εισόδημα ώστε να μην αλλάξει η ζήτηση.

β) Η συνολική δαπάνη για την αγορά ενός αγαθού είναι $E = QP$, όπου Q είναι η ποσότητα και P η μοναδιαία τιμή. Αν η ποσότητα αυξηθεί κατά 6% και η τιμή ελαττωθεί κατά 4% να εκτιμηθεί η ποσοστιαία μεταβολή στη συνολική δαπάνη. Η πραγματική μεταβολή θα είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την παραπάνω εκτίμηση;

2.

α) Η ποσότητα ζήτησης Q ενός αγαθού εξαρτάται από την μοναδιαία τιμή του P και από το εισόδημα Y , σύμφωνα με την σχέση: $Q = -P + 2Y + 1$. Αν αρχικά έχουμε $\{P = 2, Y = 10\}$, και στη συνέχεια το εισόδημα αυξηθεί κατά 2%, να βρεθεί σε τι ποσοστό πρέπει να αυξηθεί η τιμή ώστε να μην αλλάξει η ζήτηση.

β) Η συνολική δαπάνη για την αγορά ενός αγαθού είναι $E = QP$, όπου Q είναι η ποσότητα και P η μοναδιαία τιμή. Αν η ποσότητα αυξηθεί κατά 6% και η τιμή αυξηθεί επίσης κατά 6% να εκτιμηθεί η ποσοστιαία αύξηση στη συνολική δαπάνη. Η πραγματική αύξηση θα είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την παραπάνω εκτίμηση;

3.

Το ετήσιο έσοδο από την πώληση ενός προϊόντος είναι $E = QP$, όπου P είναι η μοναδιαία τιμή του και Q η ποσότητα ζήτησης. Δίνεται ότι η τιμή ελαττώνεται με ρυθμό 0.5% ετησίως, και ότι η ελαστικότητα ζήτησης είναι $\varepsilon = -2$.

(α). Να προσδιοριστεί αν το έσοδο θα μεγαλώνει ή θα μικραίνει, και να εκτιμηθεί ο ετήσιος ρυθμός μεταβολής του.

(β). Να εκτιμηθεί το ύψος του ετήσιου εσόδου μετά την παρέλευση 4 ετών αν το τωρινό έσοδο είναι $E_0 = 100$.

4.

α) Αν το εθνικό εισόδημα Y αυξηθεί 3%, και ο πληθυσμός L μειωθεί 2%, να εκτιμηθεί η μεταβολή του κατά κεφαλή εισοδήματος $y = Y/L$.

β) Αν το εισόδημα A του συζύγου αυξηθεί 3% και το εισόδημα B της συζύγου ελαττωθεί 3%, να εκτιμηθεί η μεταβολή του οικογενειακού εισοδήματος $C = A + B$.

5.

Έχει διαπιστωθεί ότι ο δείκτης τιμών P εξαρτάται θετικά από την δαπάνη κατανάλωσης C η οποία εξαρτάται αρνητικά από το επιτόκιο καταθέσεων r , όπου:

1. Η ελαστικότητα του P ως προς C είναι 0.5.

2. Αύξηση του r κατά 0.5 προκαλεί μείωση του C κατά 2%

Να εκτιμηθεί πόσο πρέπει να μεταβληθεί το επιτόκιο ώστε ο δείκτης τιμών να υποχωρήσει κατά 2%.

6.

Σε μια οικονομία με εθνικό εισόδημα Y , ο πληθυσμός L αυξάνει συνεχώς με ετήσιο ρυθμό 2%. Να βρεθούν:

α) Ο ρυθμός μεταβολής του κατά κεφαλή εισοδήματος $y = Y/L$ αν το εθνικό εισόδημα Y αυξάνει με ρυθμό 1%

β) Ο ελάχιστος ρυθμός αύξησης του εθνικού εισοδήματος Y που θα επιτρέψει στο κατά κεφαλή εισόδημα $y = Y/L$ να διπλασιαστεί σε 20 χρόνια.

7.

Σε μια οικονομία με εθνικό εισόδημα E , το χρέος X αυξάνει συνεχώς με ετήσιο ρυθμό 2%. Να βρεθούν:

α) Ο ρυθμός μεταβολής του χρέους ως ποσοστού του εθνικού εισοδήματος: $x = X/E$, αν το εθνικό εισόδημα E αυξάνει με ετήσιο ρυθμό 3%

β) Ο ελάχιστος ρυθμός αύξησης του εθνικού εισοδήματος E έτσι ώστε το χρέος ως ποσοστό του εισοδήματος να ελαττωθεί στο ήμισυ σε $t = 20$ έτη.

8.

Σε μια εθνική οικονομία, το εθνικό εισόδημα Y αυξάνει συνεχώς με ετήσιο ρυθμό 4% και ο πληθυσμός L αυξάνει συνεχώς με ετήσιο ρυθμό 1%. Να βρεθούν τα παρακάτω:

α) Ο ετήσιος ρυθμός μεταβολής του κατά κεφαλή εισοδήματος $y = Y/L$.

β) Το κατά κεφαλή εισόδημα στο τέλος μιας δεκαετίας αν στην αρχή της ήταν 10 χιλιάδες ευρώ, υποθέτοντας τους παραπάνω ρυθμούς σταθερούς.

9.

Σε μια οικογένεια το εισόδημα της συζύγου είναι τριπλάσιο από αυτό του συζύγου. Αν το εισόδημα της συζύγου μειωθεί κατά 2%, τότε:

α) Πόσο θα μεταβληθεί το οικογενειακό εισόδημα αν το εισόδημα του συζύγου αυξηθεί κατά 2%?

β) Πόσο πρέπει να αυξηθεί το εισόδημα του συζύγου ώστε το οικογενειακό εισόδημα να παραμείνει το ίδιο?

10.

Σε μια οικογένεια το εισόδημα της συζύγου είναι τριπλάσιο από αυτό του συζύγου. Αν το εισόδημα της συζύγου αυξηθεί κατά 2% και το εισόδημα του συζύγου αυξηθεί κατά 3%, να εκτιμηθεί η αύξηση του οικογενειακού εισοδήματος.

11.

Το συνολικό εισόδημα Y ενός πληθυσμού N ήταν $\{Y_1 = 200, Y_2 = 250\}$ δισεκατομμύρια ευρώ κατά τα έτη $\{t_1 = 2000, t_2 = 2010\}$, αντίστοιχα. Να εκτιμηθεί ο ετήσιος ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής του εισοδήματος.

12.

Σε μια εθνική οικονομία, το εθνικό εισόδημα Y και ο πληθυσμός L κατά τα έτη $\{t_1 = 2000, t_2 = 2010\}$, βρέθηκαν να έχουν αντίστοιχα τις τιμές:

$\{Y_1 = 500, Y_2 = 600\}$ δισεκατομμύρια ευρώ

$\{L_1 = 10, L_2 = 11\}$ εκατομμύρια πληθυσμός

α) Να εκτιμηθούν ο ετήσιος ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής του εθνικού εισοδήματος, του πληθυσμού, και του κατά κεφαλή εισοδήματος $y = Y/L$.

β) Να εκτιμηθεί το κατά κεφαλή εισόδημα το έτος $t = 2020$ σε χιλιάδες ευρώ.

13.

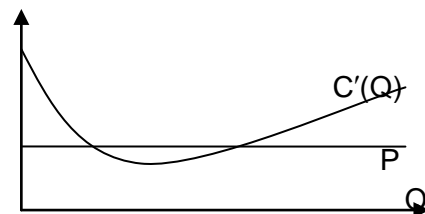
Ένα μονοπώλιο παράγει ποσότητα Q την οποία διαθέτει με μοναδιαία τιμή P που καθορίζεται από την φθίνουσα συνάρτηση ζήτησης $Q = Q(P)$. Να διαπιστωθεί ότι καθώς η τιμή αυξάνει το έσοδο $R = PQ$ θα αυξάνει όταν η ζήτηση είναι ανελαστική.

14.

Ένας καταθέτης θέλει να εξασφαλίσει το ποσό των 100 χιλιάδων ευρώ μετά από 10 έτη. Να βρεθεί το ποσό της αρχικής κατάθεσης, υποθέτοντας συνεχή ανατοκισμό με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο: 4% τα πρώτα 5 έτη και 6% τα επόμενα 5 έτη.

15.

Μία παραγωγική μονάδα λειτουργεί με οριακό κόστος $C'(Q)$, και με τιμή διάθεσης μιας μονάδας του προϊόντος σταθερή: P , όπως στο παραπλεύρως σχήμα. Να διερευνηθεί αν η επιχείρηση είναι βιώσιμη.



Φροντιστήριο Εφ.ΙV(A)-Λύσεις

1.

α) Η ποσότητα ζήτησης Q ενός αγαθού εξαρτάται από την μοναδιαία τιμή του P και από το εισόδημα Y , σύμφωνα με την σχέση: $Q = P^{-2}Y$. Αν η τιμή αυξηθεί κατά 2%, να εκτιμηθεί πόσο πρέπει να μεταβληθεί το εισόδημα ώστε να μην αλλάξει η ζήτηση.

β) Η συνολική δαπάνη για την αγορά ενός αγαθού είναι $E = QP$, όπου Q είναι η ποσότητα και P η μοναδιαία τιμή. Αν η ποσότητα αυξηθεί κατά 6% και η τιμή ελαττωθεί κατά 4% να εκτιμηθεί η ποσοστιαία μεταβολή στη συνολική δαπάνη. Η πραγματική μεταβολή θα είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την παραπάνω εκτίμηση;

Λύση

α) Για σταθερή ζήτηση $Q = q$ τα $\{P, Y\}$ θα ικανοποιούν την εξίσωση:

$$P^{-2}Y = q \Rightarrow Y = qP^2$$

Έχουμε συνάρτηση δύναμη, οπότε η ελαστικότητα του Y ως προς P για σταθερό $Q = q$, θα είναι: $\varepsilon = 2$. Επομένως η απαιτούμενη μεταβολή της τιμής θα ικανοποιεί:

$$\%dY = \varepsilon(\%dP) = 2 \cdot 2 = 4\%, \text{ αύξηση}$$

β) Η εκτίμηση των μεταβολών δίνεται από τα διαφορικά. Στο γινόμενο τα ποσοστιαία διαφορικά προστίθενται. Επομένως:

$$\%dE = \%dQ + \%dP = 6 - 4 = 2\%$$

είναι η εκτίμηση για την μεταβολή της δαπάνης. Έχουμε αύξηση 2%.

Η πραγματική μεταβολή της δαπάνης είναι μικρότερη:

$$\Delta E = (Q + \Delta Q)(P + \Delta P) - QP = P\Delta Q + Q\Delta P + \Delta Q\Delta P$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta E}{E} = \frac{P\Delta Q}{E} + \frac{Q\Delta P}{E} + \frac{\Delta Q\Delta P}{E} = \frac{\Delta Q}{Q} + \frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta Q}{Q} \frac{\Delta P}{P}$$

$$\Rightarrow \% \Delta E = \% \Delta Q + \% \Delta P + \frac{\% \Delta Q \% \Delta P}{100} = 6 - 4 - \frac{6 \cdot 4}{100} = 2 - 0.24 = 1.76\%$$

2.

α) Η ποσότητα ζήτησης Q ενός αγαθού εξαρτάται από την μοναδιαία τιμή του P και από το εισόδημα Y , σύμφωνα με την σχέση: $Q = -P + 2Y + 1$. Αν αρχικά έχουμε $\{P = 2, Y = 10\}$, και στη συνέχεια το εισόδημα αυξηθεί κατά 2%, να βρεθεί σε τι ποσοστό πρέπει να αυξηθεί η τιμή ώστε να μην αλλάξει η ζήτηση.

β) Η συνολική δαπάνη για την αγορά ενός αγαθού είναι $E = QP$, όπου Q είναι η ποσότητα και P η μοναδιαία τιμή. Αν η ποσότητα αυξηθεί κατά 6% και η τιμή αυξηθεί επίσης κατά 6% να εκτιμηθεί η ποσοστιαία αύξηση στη συνολική δαπάνη. Η πραγματική αύξηση θα είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την παραπάνω εκτίμηση;

Λύση

α) Για σταθερό $Q = q$ τα $\{P, Y\}$ θα ικανοποιούν την εξίσωση:

$$-P + 2Y + 1 = q \Rightarrow P = 2Y + 1 - q \Rightarrow P' = 2$$

Η ελαστικότητα του P ως προς Y με σταθερό Q θα είναι: $\varepsilon = P'Y/P = 2 \cdot 10/2 = 10$

Επομένως η απαιτούμενη μεταβολή της τιμής είναι: $\%dP = \varepsilon(\%dY) = 10 \cdot 2 = 20\%$

β) Στο γινόμενο τα ποσοστιαία διαφορικά προστίθενται. Επομένως:

$$\%dE = \%dQ + \%dP = 12\%$$

είναι η εκτίμηση για τη ν αύξηση της δαπάνης. Στην πραγματικότητα η αύξηση θα είναι λίγο μεγαλύτερη, διότι οι μεταβολές ικανοποιούν τη σχέση:

$$\Delta E = (Q + \Delta Q)(P + \Delta P) - QP = P\Delta Q + Q\Delta P + \Delta Q\Delta P$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta E}{E} = \frac{P\Delta Q}{E} + \frac{Q\Delta P}{E} + \frac{\Delta Q\Delta P}{E} = \frac{\Delta Q}{Q} + \frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta Q}{Q} \frac{\Delta P}{P}$$

$$\Rightarrow \% \Delta E = \% \Delta Q + \% \Delta P + \frac{\% \Delta Q \% \Delta P}{100} = 6 + 6 + .36 = 12.36\%$$

3.

Το ετήσιο έσοδο από την πώληση ενός προϊόντος είναι $E = QP$, όπου P είναι η μοναδιαία τιμή του και Q η ποσότητα ζήτησης. Δίνεται ότι η τιμή ελαττώνεται με ρυθμό 0.5% ετησίως, και ότι η ελαστικότητα ζήτησης είναι $\varepsilon = -2$.

(α). Να προσδιοριστεί αν το έσοδο θα μεγαλώνει ή θα μικραίνει, και να εκτιμηθεί ο ετήσιος ρυθμός μεταβολής του.

(β). Να εκτιμηθεί το ύψος του ετήσιου εσόδου μετά την παρέλευση 4 ετών αν το τωρινό έσοδο είναι $E_0 = 100$.

Λύση.

1. Η ετήσια ποσοστιαία μεταβολή γινομένου ισούται με το άθροισμα των ετήσιων ποσοστιαίων μεταβολών των όρων:

$$\%dE = \%dQ + \%dP \text{ όπου: } \%dP = -0.5\% \text{ ετησίως}$$

2. Η ετήσια ποσοστιαία μεταβολή της ζήτησης: $\%dQ$ ισούται με το γινόμενο της ελαστικότητας με την ετήσια ποσοστιαία μεταβολή της τιμής:

$$\%dQ = \varepsilon(\%dP) = (-2)(-0.5\%) = 1\%$$

3 Αντικαθιστώντας στο 1, βρίσκουμε:

$$\%dE = 1 - 0.5 = 0.5\%$$

α) Συμπεραίνουμε ότι το έσοδο αυξάνει με ρυθμό 0.5% ετησίως, δηλαδή μεταβάλλεται με σχετικό ρυθμό: $r = 0.005$.

β) Υποθέτοντας σταθερό σχετικό ρυθμό το έσοδο θα μεταβάλλεται εκθετικά, οπότε μετά από 4 έτη θα είναι:

$$E = E_0 e^{rt} = 100e^{(0.005)4} = 100e^{0.02} \approx 100[1 + (0.02) + (0.02)^2 / 2] = 102.02$$

Στον τελευταίο υπολογισμό χρησιμοποιήσαμε την παραβολική προσέγγιση του εκθετικού.

4.

α) Αν το εθνικό εισόδημα Y αυξηθεί 3%, και ο πληθυσμός L μειωθεί 2%, να εκτιμηθεί η μεταβολή του κατά κεφαλή εισοδήματος $y = Y/L$.

β) Αν το εισόδημα A του συζύγου αυξηθεί 3% και το εισόδημα B της συζύγου ελαττωθεί 3%, να εκτιμηθεί η μεταβολή του οικογενειακού εισοδήματος $C = A + B$.

Λύση

α) Στη διαίρεση οι ποσοστιαίες μεταβολές, όπως και οι ελαστικότητες, αφαιρούνται. Επομένως το κατά κεφαλή εισόδημα θα μεταβληθεί κατά:

$$\%dy = \%dY - \%dL = 3 - (-2) = 5\%, \text{ δηλαδή θα αυξηθεί κατά } 5\%$$

β) Δεν υπολογίζεται χωρίς να ξέρουμε την συμμετοχή των εισοδημάτων στο συνολικό εισόδημα, διότι οριακά, η σχετική και η ποσοστιαία μεταβολή αθροίσματος γράφεται

$$dC = dA + dB \Rightarrow \frac{dC}{C} = \frac{A}{C} \frac{dA}{A} + \frac{B}{C} \frac{dB}{B} \Rightarrow \%dC = \frac{A}{C} (\%dA) + \frac{B}{C} (\%dB)$$

5.

Έχει διαπιστωθεί ότι ο δείκτης τιμών P εξαρτάται θετικά από την δαπάνη κατανάλωσης C η οποία εξαρτάται αρνητικά από το επιτόκιο καταθέσεων r , όπου:

1. Η ελαστικότητα του P ως προς C είναι 0.5.

2. Αύξηση του r κατά 0.5 προκαλεί μείωση του C κατά 2%

Να εκτιμηθεί πόσο πρέπει να μεταβληθεί το επιτόκιο ώστε ο δείκτης τιμών να υποχωρήσει κατά 2%.

Λύση1

Έχουμε σύνθεση:

$$\{P = P(C) \ \& \ C = C(r)\} \Rightarrow P = P(r) \quad \text{με} \quad \frac{\%dP}{dr} = \frac{\%dP}{\%dC} \frac{\%dC}{dr}.$$

όπου:

$$\left\{ \frac{\%dP}{\%dC} = 0.5 \text{ (ελαστικότητα)} \text{ και } \frac{\%dC}{dr} = \frac{-2}{0.5} = -4 \right\} \Rightarrow \frac{\%dP}{dr} = (0.5)(-4) = -2$$

Βρήκαμε: $\%dP = -2dr$

Επομένως για $\%dP = -2\%$ θα πρέπει να μεταβάλλουμε το επιτόκιο κατά $dr = -2/-2 = 1$, δηλαδή να το αυξήσουμε μια μονάδα.

Λύση2. Πρακτικά, για μείωση του P κατά 2% πρέπει η δαπάνη κατανάλωσης να μειωθεί 4% και επομένως το επιτόκιο να αυξηθεί κατά 1

6.

Σε μια οικονομία με εθνικό εισόδημα Y , ο πληθυσμός L αυξάνει συνεχώς με ετήσιο ρυθμό 2%. Να βρεθούν:

α) Ο ρυθμός μεταβολής του κατά κεφαλή εισοδήματος $y = Y/L$ αν το εθνικό εισόδημα Y αυξάνει με ρυθμό 1%

β) Ο ελάχιστος ρυθμός αύξησης του εθνικού εισοδήματος Y που θα επιτρέψει στο κατά κεφαλή εισόδημα $y = Y/L$ να διπλασιαστεί σε 20 χρόνια.

Λύση. Ο ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής του λόγου δίνεται από την διαφορά των ποσοστιαίων ρυθμών μεταβολής των δύο όρων:

$$\%r_y = \%r_Y - \%r_L$$

Επομένως:

α) Το κατά κεφαλή εισόδημα θα μεταβάλλεται με ρυθμό $\%r_y = 1\% - 2\% = -1\%$, δηλαδή θα ελαττώνεται με ετήσιο ρυθμό 1%.

β) Γενικότερα, αν το εθνικό εισόδημα αυξάνει με ρυθμό $x\%$, τότε το κατά κεφαλή εισόδημα θα αυξάνει με ρυθμό $(x - 2)\%$, δηλαδή με συντελεστή:

$$r_y = (x - 2)/100$$

Αν το αρχικό κατά κεφαλή εισόδημα είναι y_0 , τότε μετά από 20 χρόνια θα είναι:

$$y_{20} = y_0 e^{r_y \cdot 20}$$

Επομένως θα είναι διπλάσιο του αρχικού αν ικανοποιείται η συνθήκη:

$$y_{20} = 2y_0 \Rightarrow y_0 e^{r_y \cdot 20} = 2y_0 \Rightarrow r_y = (\ln 2)/20$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε για το x :

$$(x - 2)/100 = (\ln 2)/20 \Rightarrow x = 2 + 5 \ln 2$$

Δηλαδή το εθνικό εισόδημα πρέπει να αυξάνει με ρυθμό τουλάχιστον $5 \ln 2 \approx 5(0.7) = 3.5\%$ μεγαλύτερο από τον ρυθμό αύξησης του πληθυσμού.

7.

Σε μια οικονομία με εθνικό εισόδημα E , το χρέος X αυξάνει συνεχώς με ετήσιο ρυθμό 2%. Να βρεθούν:

α) Ο ρυθμός μεταβολής του χρέους ως ποσοστού του εθνικού εισοδήματος: $x = X/E$, αν το εθνικό εισόδημα E αυξάνει με ετήσιο ρυθμό 3%

β) Ο ελάχιστος ρυθμός αύξησης του εθνικού εισοδήματος E έτσι ώστε το χρέος ως ποσοστό του εισοδήματος να ελαττωθεί στο ήμισυ σε $t = 20$ έτη.

Λύση. Ο ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής του λόγου δίνεται από την διαφορά των ποσοστιαίων ρυθμών μεταβολής των δύο όρων. Επομένως:

α) Το χρέος ως ποσοστό του εισοδήματος θα μεταβάλλεται με ρυθμό $\%r_x = 2\% - 3\% = -1\%$, δηλαδή θα ελαττώνεται με ετήσιο ρυθμό 1%.

β) Για να ελαττώνεται το χρέος ως ποσοστό του εισοδήματος θα πρέπει καταρχήν το εισόδημα να αυξάνει με μεγαλύτερο ρυθμό από το χρέος. Έστω $r\%$ ο ρυθμός μεταβολής του εισοδήματος. Τότε το χρέος ως ποσοστό του εισοδήματος θα μεταβάλλεται με ρυθμό $(2-r)\%$, δηλαδή θα μεταβάλλεται εκθετικά με συντελεστή: $(2-r)/100$. Επομένως μετά από 20 έτη θα είναι:

$$x_{20} = x_0 e^{\frac{2-r}{100} \cdot 20} = x_0 e^{(2-r)/5}$$

Σε 20 έτη θα είναι το ήμισυ του αρχικού αν ικανοποιείται η συνθήκη:

$$x_{20} = x_0 / 2 \Rightarrow x_0 e^{(2-r)/5} = x_0 / 2 \Rightarrow (2-r)/5 = -\ln 2 \Rightarrow r = 2 + 5 \ln 2$$

Δηλαδή το εθνικό εισόδημα πρέπει να αυξάνει με ρυθμό τουλάχιστον $5 \ln 2 \approx 5(0.7) = 3.5\%$ μεγαλύτερο από τον ρυθμό αύξησης του χρέους.

8.

Σε μια εθνική οικονομία, το εθνικό εισόδημα Y αυξάνει συνεχώς με ετήσιο ρυθμό 4% και ο πληθυσμός L αυξάνει συνεχώς με ετήσιο ρυθμό 1%. Να βρεθούν τα παρακάτω:

α) Ο ετήσιος ρυθμός μεταβολής του κατά κεφαλή εισοδήματος $y = Y/L$.

β) Το κατά κεφαλή εισόδημα στο τέλος μιας δεκαετίας αν στην αρχή της ήταν 10 χιλιάδες ευρώ, υποθέτοντας τους παραπάνω ρυθμούς σταθερούς.

Λύση

1. Ο σχετικός και ο ποσοστιαίος ρυθμός πηλίκου δίνεται από την διαφορά των αντίστοιχων ρυθμών των όρων. Επομένως το κατά κεφαλή εισόδημα μεταβάλλεται με ετήσιο ποσοστιαίο ρυθμό:

$$\%r_y = \%r_Y - \%r_L = 4 - 1 = 3\%$$

2. Εφόσον το κατά κεφαλή εισόδημα μεταβάλλεται με σχετικό ρυθμό $r_y = 3/100 = 0.03$, θα εξελίσσεται εκθετικά, και μετά από 10 έτη θα είναι:

$$\begin{aligned} y(10) &= y(0)e^{(0.03)10} \Rightarrow y(10) = 10e^{0.3} \approx 10(1 + 0.3 + (0.3)^2 / 2) \\ &\approx 10(1 + 0.3 + 0.045) \quad (\text{παραβολική προσέγγιση}) \\ &\approx 13.45 \end{aligned}$$

Παρατήρηση. Έχουμε τις σχέσεις: $Y = Y(t)$, $L = L(t)$, $y(t) = Y(t)/L(t)$.

Συμβολίζοντας με πάνω τελεία την παράγωγο ως προς τον χρόνο t , βρίσκουμε για τους ετήσιους σχετικούς ρυθμούς:

$$r_y = \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L} = r_Y - r_L \quad \text{επομένως: } \frac{\dot{y}}{y} = r_y \Rightarrow y(t) = y(0)e^{r_y t} = y(0)e^{(r_Y - r_L)t}$$

9.

Σε μια οικογένεια το εισόδημα της συζύγου είναι τριπλάσιο από αυτό του συζύγου. Αν το εισόδημα της συζύγου μειωθεί κατά 2%, τότε:

α) Πόσο θα μεταβληθεί το οικογενειακό εισόδημα αν το εισόδημα του συζύγου αυξηθεί κατά 2%?

β) Πόσο πρέπει να αυξηθεί το εισόδημα του συζύγου ώστε το οικογενειακό εισόδημα να παραμείνει το ίδιο?

Λύση1. Α το εισόδημα του συζύγου, $B = 3A$ της συζύγου, $C = A + B = 4A$ το συνολικό.

α) Για την μεταβολή του συνολικού εισοδήματος, βρίσκουμε:

$$dC = dA + dB \Rightarrow \frac{dC}{C} = \frac{A}{C} \frac{dA}{A} + \frac{B}{C} \frac{dB}{B} \Rightarrow \%dC = \frac{A}{C} (\%dA) + \frac{B}{C} (\%dB) = \frac{1}{4}(2) + \frac{3}{4}(-2) = -1\%$$

Το συνολικό εισόδημα μειώθηκε 1%

β) Το οικογενειακό δεν θα μεταβληθεί αν το εισόδημα του συζύγου αυξηθεί κατά:

$$\%dC = \frac{A}{C} (\%dA) + \frac{B}{C} (\%dB) = \frac{1}{4} (\%dA) + \frac{3}{4} (\%dB) = 0 \Rightarrow \%dA = -3(\%dB) = 6\%$$

Λύση2. Το αρχικό συνολικό εισόδημα είναι $E = A + B = A + 3A = 4A$

α). Η μεταβολή του οικογενειακού εισοδήματος είναι:

$$dE = dA + dB = 2A / 100 - 2B / 100 = 2A / 100 - 2(3A) / 100 = -4A / 100$$

Συμπεραίνουμε ότι το συνολικό εισόδημα θα μεταβληθεί κατά:

$$\%dE = \frac{dE}{E} 100 = \frac{-4A / 100}{4A} 100 = -1\%, \text{ θα μειωθεί } 1\%$$

β) Αν το εισόδημα της συζύγου μειωθεί 2% τότε το εισόδημά της θα μειωθεί κατά το ποσό:

$$dB = 2B / 100 = 6A / 100$$

Για να μείνει το οικογενειακό εισόδημα αμετάβλητο θα πρέπει το εισόδημα του συζύγου να αυξηθεί κατά το ίδιο ποσό:

$$dA = 6A / 100$$

Επομένως η ποσοστιαία μεταβολή του θα πρέπει να είναι:

$$\%dA = \frac{dA}{A} 100 = \frac{6A}{100A} 100 = 6\%$$

10.

Σε μια οικογένεια το εισόδημα της συζύγου είναι τριπλάσιο από αυτό του συζύγου. Αν το εισόδημα της συζύγου αυξηθεί κατά 2% και το εισόδημα του συζύγου αυξηθεί κατά 3%, να εκτιμηθεί η αύξηση του οικογενειακού εισοδήματος.

Λύση. Θεωρούμε τα εισοδήματα:

A του συζύγου, $B = 3A$ της συζύγου, $E = A + B = 4A$, οικογενειακό εισόδημα

Παρατήρηση. Η ποσοστιαία αύξηση του συνολικού εισοδήματος θα είναι ανάμεσα:

$$2\% \leq \%df \leq 3\%$$

μάλιστα πιο κοντά στο 2% της συζύγου που έχει το μεγαλύτερο εισόδημα.

Λύση1. Για την μεταβολή του οικογενειακού εισοδήματος βρίσκουμε:

$$dE = dA + dB \Rightarrow \frac{dE}{E} = \frac{A}{E} \frac{dA}{A} + \frac{B}{E} \frac{dB}{B} \Rightarrow \%dE = \frac{A}{E} (\%dA) + \frac{B}{E} (\%dB)$$

Δηλαδή, ζυγίζουμε την κάθε ποσοστιαία αύξηση με τον αντίστοιχο συντελεστή συμμετοχής στο συνολικό εισόδημα. Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε:

$$\%dE = \frac{A}{4A} 3 + \frac{3A}{4A} 2 = \frac{9}{4} = 2.25\%$$

Λύση 2. Το εισόδημα πριν και μετά την αύξηση είναι αντίστοιχα:

$$A + B, 1.03A + 1.02B$$

Η σχετική μεταβολή θα είναι:

$$\frac{(1.03A + 1.02B) - (A + B)}{A + B} = \frac{A}{A + B} 0.03 + \frac{B}{A + B} 0.02 = \frac{1}{4} 0.03 + \frac{3}{4} 0.02 = 0.0225$$

Βρήκαμε ποσοστιαία μεταβολή: 2.25%, όπως και προηγουμένως.

11.

Το συνολικό εισόδημα Y ενός πληθυσμού N ήταν $\{Y_1 = 200, Y_2 = 250\}$ δισεκατομμύρια ευρώ κατά τα έτη $\{t_1 = 2000, t_2 = 2010\}$, αντίστοιχα. Να εκτιμηθεί ο ετήσιος ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής του εισοδήματος.

Λύση1

Από τον ορισμό βρίσκουμε την εκτίμηση:

$$r_Y \approx \frac{\Delta Y / Y}{\Delta t} = \frac{(Y_2 - Y_1) / Y_1}{t_2 - t_1} = \frac{50 / 200}{10} = \frac{1}{40} = 0.025 \Rightarrow \%r_Y = 100r_Y = 2.5\%$$

Λύση2. Αντί του αρχικού Y_1 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ενδιάμεσο:

$$\tilde{Y} = (Y_2 + Y_1) / 2 = (200 + 250) / 2 = 225$$

Οπότε θα βρούμε την εκτίμηση:

$$r_Y \approx \frac{\Delta Y / Y}{\Delta t} = \frac{(Y_2 - Y_1) / \tilde{Y}}{t_2 - t_1} = \frac{50 / 225}{10} = \frac{1}{45} = 0.022 \Rightarrow \%r_Y = 100r_Y = 2.2\%$$

Λύση3. Καλλίτερη εκτίμηση του σχετικού ρυθμού μεταβολής του εισοδήματος βρίσκεται χρησιμοποιώντας την ημιλογαριθμική κλίμακα:

$$r = \frac{\ln Y_2 - \ln Y_1}{t_2 - t_1} = \frac{\ln(Y_2 / Y_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\ln(250 / 200)}{10} = \frac{\ln(1.25)}{10} \Rightarrow \%r = 100r = 10 \ln 1.25 \approx 10[0.25 - (0.25)^2 / 2] \approx 2.2\%$$

Παρατήρηση. Χρησιμοποιήσαμε την παραβολική προσέγγιση: $\ln(1+x) \approx x - x^2/2$ για $x \approx 0$

12.

Σε μια εθνική οικονομία, το εθνικό εισόδημα Y και ο πληθυσμός L κατά τα έτη $\{t_1 = 2000, t_2 = 2010\}$, βρέθηκαν να έχουν αντίστοιχα τις τιμές:

$$\{Y_1 = 500, Y_2 = 600\} \text{ δισεκατομμύρια ευρώ}$$

$$\{L_1 = 10, L_2 = 11\} \text{ εκατομμύρια πληθυσμός}$$

α) Να εκτιμηθούν ο ετήσιος ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής του εθνικού εισοδήματος, του πληθυσμού, και του κατά κεφαλή εισοδήματος $y = Y / L$.

β) Να εκτιμηθεί το κατά κεφαλή εισόδημα το έτος $t = 2020$ σε χιλιάδες ευρώ.

Λύση1

$$\text{α) } r_Y \approx \frac{\Delta Y / Y}{\Delta t} = \frac{(Y_2 - Y_1) / Y_1}{t_2 - t_1} = \frac{100 / 500}{10} = \frac{1}{50} = 0.02 \Rightarrow \%r_Y = 100r_Y = 2\%$$

$$r_L \approx \frac{\Delta L / L}{\Delta t} = \frac{(L_2 - L_1) / L_1}{t_2 - t_1} = \frac{1 / 10}{10} = \frac{1}{100} = 0.01 \Rightarrow \%r_L = 100r_L = 1\%$$

$$y = Y / L \Rightarrow r_y = r_Y - r_L \approx 0.02 - 0.01 = 0.01 \Rightarrow \%r_y = 100r_y = 1\%$$

Μεταβάλλονται με ρυθμό $\{\%r_Y = 2\%, r_L = 1\%, r_y = 1\%\}$ ετησίως, αντίστοιχα.

β). Μεγέθη που μεταβάλλονται με σταθερό **σχετικό** ρυθμό εξελίσσονται εκθετικά, οπότε μετά από 10 χρόνια το κατά κεφαλή εισόδημα θα είναι:

$$y(2020) \approx y(2010)e^{r_y 10} = y(2010)e^{(0.01)10} = y(2010)e^{0.1}$$

Το ετήσιο κατά κεφαλή εισόδημα το 2010, είναι:

$$\frac{600 \text{ δισεκατομμύρια ευρώ}}{11 \text{ εκατομμύρια πληθυσμό}} = \frac{600}{11} \approx 54.5 \frac{\text{χιλιάδες ευρώ}}{\text{κάτοικο}}$$

Επομένως το κατά κεφαλή εισόδημα το έτος 2020, θα είναι:

$$y(2020) \approx y(2010)e^{0.1} \approx \frac{600}{11} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200}\right) = \frac{600}{11} 1.105 \approx 60.3 \frac{\text{χιλιάδες ευρώ}}{\text{κάτοικο}}$$

Λύση2. Εναλλακτικά μπορούμε να εκτιμήσουμε απευθείας τον ετήσιο ποσοστιαίο ρυθμό μεταβολής του κατά κεφαλή εισοδήματος. Έχουμε:

$$\left\{ y_1 = \frac{Y_1}{L_1} = \frac{500}{10} = 50, y_2 = \frac{Y_2}{L_2} = \frac{600}{11} \right\}$$

$$\Rightarrow r_y \approx \frac{\Delta y / y}{\Delta t} = \frac{(y_2 - y_1) / y_1}{10} = \frac{\left(\frac{600}{11} - 50 \right) / 50}{10} = \frac{(600 - 550)}{(10)(11)(50)} = \frac{1}{110} \Rightarrow \%r_y \approx \frac{100}{110} \approx 0.9$$

Σ αυτή την περίπτωση θα βρούμε:

$$y(2020) \approx y(2010)e^{r_y \cdot 10} = \frac{600}{11} e^{0.09}$$

$$\approx \frac{600}{11} (1 + 0.09 + 0.004) = \frac{600}{11} 1.095 \approx 58.9 \frac{\text{χιλιάρδες ευρώ}}{\text{κάτοικο}}$$

Παρατήρηση. Για υπολογισμούς, στα παραπάνω χρησιμοποιήσαμε την παραβολική προσέγγιση του εκθετικού:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \quad \text{για μικρά } x \approx 0$$

13.

Ένα μονοπώλιο παράγει ποσότητα Q την οποία διαθέτει με μοναδιαία τιμή P που καθορίζεται από την φθίνουσα συνάρτηση ζήτησης $Q = Q(P)$. Να διαπιστωθεί ότι καθώς η τιμή αυξάνει το έσοδο $R = PQ$ θα αυξάνει όταν η ζήτηση είναι ανελαστική.

Λύση1. Το έσοδο αυξάνει διότι, λόγω ανελαστικότητας, σε ποσοστά η ποσότητα μειώνεται λιγότερο απότι αυξάνει η τιμή. Ειδικότερα, η συνθήκη ανελαστικότητας για αυξανόμενο P γράφεται:

$$\left| \frac{\%dQ}{\%dP} \right| < 1 \Rightarrow |\%dQ| < |\%dP| \Rightarrow -\%dQ < \%dP \quad \text{επειδή } \%dP > 0, \%dQ < 0$$

Το έσοδο αυξάνει αν ικανοποιείται η συνθήκη:

$$R = PQ \Rightarrow \%dR = \%dP + \%dQ > 0 \Rightarrow -\%dQ < \%dP$$

που είναι ακριβώς η συνθήκη ανελαστικότητας.

Λύση2. Η ελαστικότητα είναι αρνητική, οπότε η συνθήκη ανελαστικότητας γράφεται:

$$|E_p Q| = -E_p Q < 1 \Rightarrow \frac{PQ'}{Q} > -1$$

Το έσοδο αυξάνει όταν η παράγωγος του εσόδου ως προς P είναι θετική:

$$R' = Q + PQ' > 0 \Rightarrow PQ' > -Q \Rightarrow \frac{PQ'}{Q} > -1$$

που είναι ακριβώς η συνθήκη ανελαστικότητας

Λύση3. Επειδή τα μεγέθη είναι θετικά η παράγωγος και η ελαστικότητα έχουν το ίδιο πρόσημο οπότε αντί της παραγώγου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ελαστικότητα:

$$R = PQ \Rightarrow E_p R = E_p P + E_p Q = 1 + E_p Q > 0 \Rightarrow E_p Q > -1$$

που είναι ακριβώς η συνθήκη ανελαστικότητας.

14.

Ένας καταθέτης θέλει να εξασφαλίσει το ποσό των 100 χιλιάδων ευρώ μετά από 10 έτη. Να βρεθεί το ποσό της αρχικής κατάθεσης, υποθέτοντας συνεχή ανατοκισμό με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο: 4% τα πρώτα 5 έτη και 6% τα επόμενα 5 έτη.

Λύση.

Το αρχικό ποσό K_0 μετά από 5 έτη θα είναι: $K_5 = K_0 e^{(0.04)5} = K_0 e^{0.2}$

Μετά από άλλα 5 έτη θα είναι: $K_{10} = K_5 e^{(0.06)5} = K_0 e^{0.2+0.3} = K_0 e^{0.5}$

Η αρχική κατάθεση θα πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη:

$$K_0 e^{1/2} = 100 \Rightarrow K_0 = 100 e^{-1/2} \text{ χιλιάδες ευρώ}$$

Παρατήρηση. Χρησιμοποιώντας την γραμμική, παραβολική κυβική προσέγγιση του εκθετικού:

$$e^x \approx 1 + x + x^2 / 2 + x^3 / 6 + \dots$$

βρίσκουμε:

$$K_0 = 100e^{-0.5} \approx 100(1 - 0.5 + 0.125 - 0.021 + \dots) = 50, 62.5, 60.4, \dots$$

16

Το ετήσιο έσοδο από την πώληση ενός προϊόντος είναι $E = QP$, όπου P είναι η μοναδιαία τιμή του και Q η ποσότητα ζήτησης. Δίνεται ότι η τιμή ελαττώνεται με ρυθμό 1% ετησίως, και ότι η ελαστικότητα ζήτησης είναι $\varepsilon = -2$. Να εκτιμηθούν:

α) Ο ετήσιος ρυθμός μεταβολής της ζήτησης

β) Ο ετήσιος ρυθμός μεταβολής του εσόδου

γ) Το ετήσιο έσοδο μετά την παρέλευση 10 ετών αν το τωρινό έσοδο είναι $E_0 = 100$.

Λύση Εφόσον οι ρυθμοί είναι ποσοστιαίοι (σχετικοί), βρίσκουμε:

α) Ο ρυθμός μεταβολής της ζήτησης ισούται με το γινόμενο της ελαστικότητας με τον ρυθμό μεταβολής της τιμής που είναι -1% :

$$\frac{\%dQ}{dt} = \frac{\%dQ}{\%dP} \frac{\%dP}{dt} = (-2)(-1\%) = 2\%, \text{ αυξάνει}$$

β) Ο ρυθμός μεταβολής γινομένου $E = PQ$ ισούται με το άθροισμα των ρυθμών μεταβολής των όρων:

$$\frac{\%dE}{dt} = \frac{\%dQ}{dt} + \frac{\%dP}{dt} = 2 - 1 = 1\%, \text{ αυξάνει}$$

Συμπεραίνουμε ότι το έσοδο μεταβάλλεται με ποσοστιαίο ρυθμό 1% ετησίως, δηλαδή μεταβάλλεται με σχετικό ρυθμό: $r = 0.01$. Επομένως το έσοδο μετά από 10 έτη θα είναι:

$$E = E_0 e^{rt} = 100e^{(0.01)10} = 100e^{0.1} \approx 100[1 + (0.1) + (0.1)^2 / 2] = 110.5$$

Στον τελευταίο υπολογισμό χρησιμοποιήσαμε την παραβολική προσέγγιση του εκθετικού. ▲