Φροντιστήριο.Εφ.ΙΙΙ(Α)

1.

Σε μια επιχείρηση, ο διευθυντής πωλήσεων αμείβεται με 20% **επί των ετήσιων εισπράξεων. Αν η ποσότητα** Q **ζήτησης του προιόντος ως συνάρτηση της μοναδιαίας τιμής** P **είναι** $Q = 100 - P$**, και το κόστος παραγωγής είναι** $C = 10 + 2Q$**, να βρεθεί η τιμή** P **που μεγιστοποιεί το κέρδος:**

1. για τον επιχειρηματία 2. για τον πωλητή αντίστοιχα.

2.

Ένας εκδότης έχει διαπιστώσει ότι ο αριθμός πωλήσεων Q **ενός βιβλίου εξαρτάται από την τιμή του** P**, όπου** $Q = \alpha - \beta P$ **είναι η συνάρτηση ζήτησης. Το κόστος της έκδοσης ανά βιβλίο είναι** w**, ενώ τα συγγραφικά δικαιώματα ορίζονται ως ένα ποσοστό με συντελεστή** $m < 1$ **των συνολικών εσόδων από την πώληση. Να διαπιστωθεί ότι η τιμή διάθεσης που μεγιστοποιεί το κέρδος για τον εκδότη είναι μεγαλύτερη από την τιμή διάθεσης που μεγιστοποιεί το έσοδο για τον συγγραφέα.**

3.

Μια επιχείρηση παράγει ποσότητα Q**, με:**

1. Συνάρτηση εσόδων $R(Q)$ **αύξουσα κοίλη με** $R(0) = 0$**.**

2. Συνάρτηση κόστους $C(Q)$ **αύξουσα κυρτή με** $C(0) = 0$**.**

Αν υπόκειται και σε φορολογία t **ανά μονάδα παραγόμενου προϊόντος**

α) Να διαπιστωθεί ότι η παραγόμενη ποσότητα που μεγιστοποιεί το κέρδος είναι φθίνουσα συνάρτηση του συντελεστή φορολογίας t**.**

β) Να διερευνηθεί η περίπτωση να μην υπάρξει παραγωγή αν ο συντελεστής φορολογίας είναι πολύ υψηλός.

4.

Θεωρούμε τις παρακάτω τρεις συναρτήσεις κόστους: $C = C(Q)$

1. $C = 1 + Q$ 2. $C = 1 + Q + Q^2$ 3. $C = 1 + Q - Q^2 + Q^3$

Να γίνουν τα γραφήματά τους, και σε κάθε περίπτωση να βρεθεί γραφικά και αναλυτικά το ελάχιστο μέσο μεταβλητό κόστος:

$\min\{AVC = VC(Q)/Q\}$**, όπου** $VC(Q) = C(Q) - C(0)$

5.

Θεωρούμε τις παρακάτω δύο συναρτήσεις κόστους: $C = C(Q)$

1. $C = 1 + Q$ 2. $C = 1 + Q + Q^2$

Να γίνουν τα γραφήματά τους, και σε κάθε περίπτωση να βρεθεί γραφικά και αναλυτικά το ελάχιστο μέσο κόστος:

$\min\{AC = C(Q)/Q\}$

6.

Θεωρούμε τις παρακάτω δύο συναρτήσεις κόστους: $C = C(Q)$

1. $C = 1 + Q$ 2. $C = 1 + Q + Q^2$

Υποθέτοντας συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού, να βρεθούν σε κάθε περίπτωση

1. Η ελάχιστη συμφέρουσα τιμή και η εξίσωση προσφοράς του προϊόντος

2. Η ελάχιστη κερδοφόρα τιμή

7.

Θεωρούμε τις παρακάτω τρεις συναρτήσεις κόστους: $C = C(Q)$

1. $C = 1 + Q$ 2. $C = 1 + Q + Q^2$ 3. $C = 1 + Q - Q^2 + Q^3$

Υποθέτοντας συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού, να βρεθούν σε κάθε περίπτωση

1. Η ελάχιστη συμφέρουσα τιμή

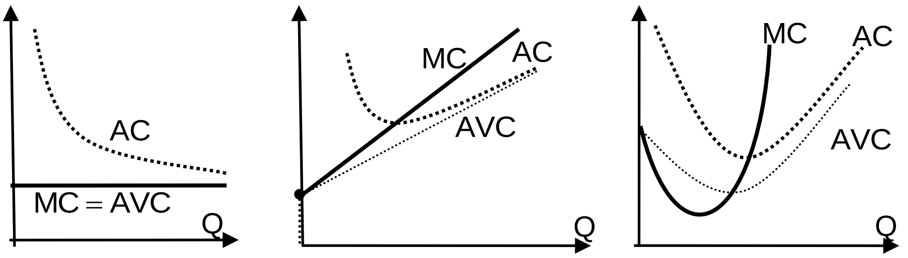
2. Η εξίσωση προσφοράς του προϊόντος, και το σχετικό γράφημα.

8.

Για τρεις συναρτήσεις κόστους: $C = C(Q)$ **, δίνουμε παρακάτω τα γραφήματα οριακού μέσου μεταβλητού και μέσου κόστους. Υποθέτοντας συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού, να βρεθούν σε κάθε περίπτωση, γραφικά:**

1. Η ελάχιστη συμφέρουσα τιμή p_0**, και η εξίσωση προσφοράς:** $p = S^{-1}(q)$

2. Η ελάχιστη κερδοφόρα τιμή p_1



9.

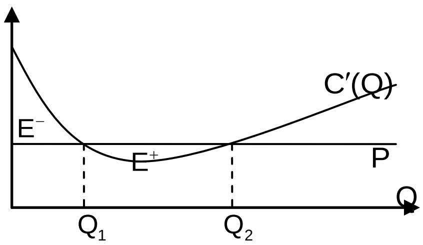
Χρησιμοποιώντας εργασία L**, μια επιχείρηση παράγει ένα προιόν σε ποσότητα:** $Q = 2\ln(1+L)$**, με κόστος:** $C = wL$**. Το προιόν διατίθεται στην αγορά με τιμή μονάδος:** $p = 1$**. Η επιχείρηση λειτουργεί μεγιστοποιώντας το κέρδος, μόνο εφόσον είναι θετικό. Να βρεθούν τα παρακάτω:**

α) Η συνθήκη υπό την οποία θα υπάρξει παραγωγή.

β) Το κέρδος π **ως συνάρτηση του μοναδιαίου κόστους εργασίας** w**. Να διερευνηθούν οι ιδιότητες μονοτονίας και κυρτότητας αυτής της συνάρτησης και να γίνει το γράφημά της.**

10.

Μία παραγωγική μονάδα λειτουργεί με οριακό κόστος $C'(Q)$**, και με τιμή διάθεσης μιας μονάδας του προιόντος σταθερή:** P**, όπως στο παραπλεύρως σχήμα. Να διερευνηθεί αν η επιχείρηση είναι βιώσιμη.**



ΦροντιστήριοΕφ.ΙΙΙ(Α)-Λύσεις

1.

Σε μια επιχείρηση, ο διευθυντής πωλήσεων αμείβεται με 20% επί των ετήσιων εισπράξεων. Αν η ποσότητα Q ζήτησης του προιόντος ως συνάρτηση της μοναδιαίας τιμής P είναι $Q=100-P$, και το κόστος παραγωγής είναι $C=10+2Q$, να βρεθεί η τιμή P που μεγιστοποιεί το κέρδος:

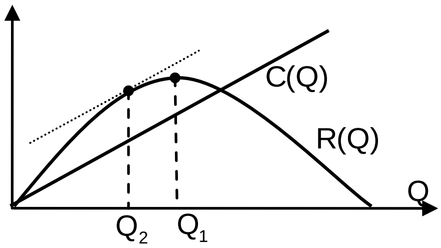
1. για τον επιχειρηματία 2. για τον πωλητή αντίστοιχα.

Λύση.

Εισπράξεις: $R=PQ=(100-Q)Q=100Q-Q^2$

Αμοιβή πωλητή: $A=R/5$

Κέρδος επιχειρηματία: $\{\Pi=R-A-C=(4/5)R-C$



Αμφότερες οι συναρτήσεις είναι κοίλες διότι η R είναι κοίλη και η C γραμμική. Επομένως, το στάσιμο, αν υπάρχει, δίνει μέγιστο.

1. Η αμοιβή του πωλητή είναι μέγιστη όταν:

$$A'=R'/5=0\Rightarrow\{R'=0\}\Rightarrow 100-2Q=0\Rightarrow Q_1=50\Rightarrow\{P_1=50\}$$

2. Το κέρδος του επιχειρηματία είναι μέγιστο όταν:

$$\Pi'=\frac{4}{5}R'-C'=0\Rightarrow\{R'=5C'/4=10/4\}\Rightarrow 100-2Q=5/2\Rightarrow Q_2=48.75\Rightarrow\{P_2=51.25\}$$

Ο πωλητής μεγιστοποιεί το έσοδο ενώ ο επιχειρηματίας το κέρδος όπως στο γράφημα.

2.

Ένας εκδότης έχει διαπιστώσει ότι ο αριθμός πωλήσεων Q ενός βιβλίου εξαρτάται από την τιμή του P, όπου $Q=\alpha-\beta P$ είναι η συνάρτηση ζήτησης. Το κόστος της έκδοσης ανά βιβλίο είναι w, ενώ τα συγγραφικά δικαιώματα ορίζονται ως ένα ποσοστό με συντελεστή $m<1$ των συνολικών εσόδων από την πώληση. Να διαπιστωθεί ότι η τιμή διάθεσης που μεγιστοποιεί το κέρδος για τον εκδότη είναι μεγαλύτερη από την τιμή διάθεσης που μεγιστοποιεί το έσοδο για τον συγγραφέα.

Λύση. Θα τα εκφράσουμε ως συναρτήσεις της τιμής. Το έσοδο είναι: $R=PQ=\alpha P-\beta P^2$

1. Κέρδος εκδότη: $\Pi=(1-m)R-wQ=(1-m)(\alpha P-\beta P^2)-w(\alpha-\beta P)$

Μέγιστο όταν: $\Pi'(P)=(1-m)(\alpha-2\beta P)+w\beta=0\Rightarrow P_1=\dfrac{\alpha(1-m)+w\beta}{2\beta(1-m)}=\dfrac{\alpha}{2\beta}+\dfrac{w}{2(1-m)}$

2. Αμοιβή συγγραφέα: $mR=m(\alpha P-\beta P^2)$

Είναι μέγιστο όταν: $mR'(P)=m(\alpha-2\beta P)=0\Rightarrow P_2=\dfrac{\alpha}{2\beta}<\dfrac{\alpha}{2\beta}+\dfrac{w}{2(1-m)}=P_1$

Επαληθεύτηκε η ιδιότητα.

3.

Μια επιχείρηση παράγει ποσότητα Q, με:

1. Συνάρτηση εσόδων $R(Q)$ αύξουσα κοίλη με $R(0)=0$.

2. Συνάρτηση κόστους $C(Q)$ αύξουσα κυρτή με $C(0)=0$.

Αν υπόκειται και σε φορολογία t ανά μονάδα παραγόμενου προϊόντος

α) Να διαπιστωθεί ότι η παραγόμενη ποσότητα που μεγιστοποιεί το κέρδος είναι φθίνουσα συνάρτηση του συντελεστή φορολογίας t.

β) Να διερευνηθεί η περίπτωση να μην υπάρξει παραγωγή αν ο συντελεστής φορολογίας είναι πολύ υψηλός.

<u>Λύση.</u>

α) Η συνάρτηση καθαρού κέρδους: $\Pi = R(Q) - C(Q) - tQ$, είναι κοίλη, και επομένως έχει μέγιστο όταν:

$$\Pi' = R'(Q) - C'(Q) - t = 0$$

υποθέτοντας $Q > 0$, δηλαδή ότι υπάρχει παραγωγή. Η παραπάνω εξίσωση ορίζει πλεγμένα τη βέλτιστη ποσότητα ως συνάρτηση του t:

$$Q = Q(t)$$

Παραγωγίζοντας πλεγμένα ως προς t, βρίσκουμε:

$$R''(Q)Q' - C''(Q)Q' - 1 = 0 \Rightarrow Q'(t) = \frac{1}{R'' - C''} < 0,$$

διότι ο παρονομαστής είναι αρνητικός: $R'' \le 0$ λόγω κοιλότητας, $C'' \ge 0$ λόγω κυρτότητας. Επομένως η συνάρτηση $Q = Q(t)$ είναι φθίνουσα.

β) Η παραγωγή θα είναι μηδενική αν το μέγιστο της συνάρτησης κέρδους βρίσκεται στο $Q=0$. Αυτό θα συμβεί αν:

$$\Pi'(0) \le 0 \Rightarrow R'(0) - C'(0) \le t$$

Επομένως η παραγωγή μηδενίζεται αν ο φορολογικός συντελεστής είναι μεγαλύτερος του $\bar{t} = R'(0) - C'(0)$.

4.

Θεωρούμε τις παρακάτω τρεις συναρτήσεις κόστους: $C = C(Q)$

1. $C = 1 + Q$ 2. $C = 1 + Q + Q^2$ 3. $C = 1 + Q - Q^2 + Q^3$

Να γίνουν τα γραφήματά τους, και σε κάθε περίπτωση να βρεθεί γραφικά και αναλυτικά το ελάχιστο μέσο μεταβλητό κόστος:

$\min\{AVC = VC(Q)/Q\}$, **όπου** $VC(Q) = C(Q) - C(0)$

<u>Λύση</u>. Το ελάχιστο μέσο μεταβλητό κόστος δίνεται από την ελάχιστη κλίση της εφαπτομένης στην καμπύλη, από το αρχικό σημείο της $C(0)$ που είναι το σταθερό κόστος FC, και σημειώνεται στα παρακάτω γραφήματα με την διακεκομμένη γραμμή

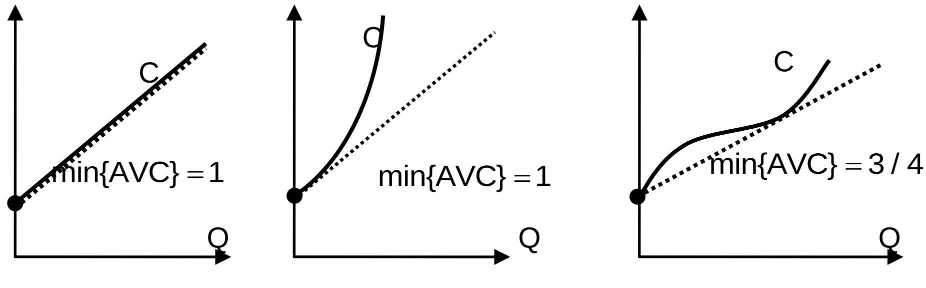
1. $C = 1 + Q$, αύξουσα γραμμική με $VC = Q \Rightarrow \min\{AVC = Q/Q = 1\} = 1$, σταθερό

2. $C = 1 + Q + Q^2$, αύξουσα παραβολική.

$VC = Q + Q^2 \Rightarrow \min\{AVC = 1 + Q\} = 1$ στο $Q = 0$

3. $C = 1 + Q - Q^2 + Q^3$, αύξουσα κυβική διότι δεν έχει στάσιμα: $C' = 1 - 2Q + 3Q^2 > 0$, με θετικό σημείο καμπής: $C'' = -2 + 6Q = 0 \Rightarrow Q = 1/3 > 0$

Βρίσκουμε: $VC = Q - Q^2 + Q^3 \Rightarrow \min\{AVC = 1 - Q + Q^2\} = 3/4$ στο $Q = 1/2$



5.

Θεωρούμε τις παρακάτω δύο συναρτήσεις κόστους: $C = C(Q)$

1. $C = 1 + Q$ 2. $C = 1 + Q + Q^2$

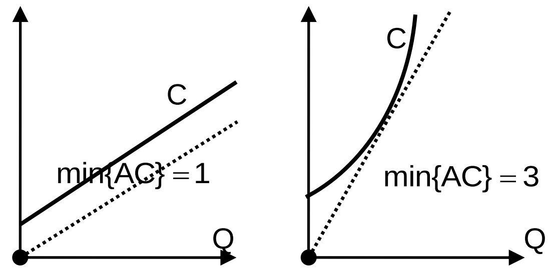
Να γίνουν τα γραφήματά τους, και σε κάθε περίπτωση να βρεθεί γραφικά και αναλυτικά το ελάχιστο μέσο κόστος:

$$\min\{AC = C(Q)/Q\}$$

Λύση Το ελάχιστο μέσο κόστος δίνεται από την ελάχιστη κλίση της εφαπτομένης στην καμπύλη, από το μηδενικό σημείο O του συστήματος, και σημειώνεται στα παρακάτω γραφήματα με την διακεκομμένη γραμμή

1.. $C = 1 + Q$, αύξουσα γραμμική με $\min\{AC = 1/Q + 1\} = 1$ όταν $Q \to \infty$

2. $C = 1 + Q + Q^2$, αύξουσα παραβολική, με $\min\{AC = 1/Q + 1 + Q\} = 3$ στο $Q = 1$



6.

Θεωρούμε τις παρακάτω δύο συναρτήσεις κόστους: $C = C(Q)$

1. $C = 1 + Q$ 2. $C = 1 + Q + Q^2$

Υποθέτοντας συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού, να βρεθούν σε κάθε περίπτωση

1. Η ελάχιστη συμφέρουσα τιμή και η εξίσωση προσφοράς του προϊόντος

2. Η ελάχιστη κερδοφόρα τιμή

Λύση

1. Η ελάχιστη συμφέρουσα τιμή δίνεται από το ελάχιστο του μέσου μεταβλητού κόστους:

$$p_0 = \min\{AVC = VC(Q)/Q$$

Η προσφορά είναι μηδενική κάτω από την παραπάνω τιμή. Για μεγαλύτερες τιμές η προσφορά είναι αυτή στην οποία το οριακό κόστος συμπίπτει με την τιμή:

$$p = C'(q)$$

Βρίσκουμε:

1.. $C = 1 + Q,\ VC = Q \Rightarrow p_0 = \min\{AVC = 1\} = 1$

Η εξίσωση προσφοράς είναι:

$$p = C'(q) \Rightarrow p = 1$$, πλήρως ελαστική

2. $C = 1 + Q + Q^2,\ VC = Q + Q^2 \Rightarrow \min\{AVC = 1 + Q\} = 1$ στο $Q = 0$

Για μεγαλύτερες τιμές η εξίσωση προσφοράς είναι:

$$p = C'(q) = 1 + 2q$$

2. Η ελάχιστη κερδοφόρα τιμή δίνεται από το ελάχιστο του μέσου κόστους:

$$p_1 = \min\{AC = C(Q)/Q\}$$

1.. $C = 1 + Q,\ \ p_1 = \min\{AC = 1/Q + 1\} = 1$

2. $C = 1 + Q + Q^2,\ p_1 = \min\{AC = 1/Q + 1 + Q\} = 3$ στο $q_1 = 1$

7.

Θεωρούμε τις παρακάτω τρεις συναρτήσεις κόστους: $C = C(Q)$

1. $C = 1 + Q$ 2. $C = 1 + Q + Q^2$ 3. $C = 1 + Q - Q^2 + Q^3$

Υποθέτοντας συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού, να βρεθούν σε κάθε περίπτωση

1. Η ελάχιστη συμφέρουσα τιμή

2. Η εξίσωση προσφοράς του προϊόντος, και το σχετικό γράφημα.

<u>**Λύση**</u>

1. Η ελάχιστη συμφέρουσα τιμή δίνεται από το ελάχιστο του μέσου μεταβλητού κόστους:

$$p_0 = \min\{AVC = VC(Q)/Q$$

Η προσφορά είναι μηδενική κάτω από την παραπάνω τιμή.. Για μεγαλύτερες τιμές η προσφορά είναι αυτή στην οποία το οριακό κόστος συμπίπτει με την τιμή:

$$p = C'(q)$$

Βρίσκουμε:

1.. $C = 1 + Q,\ VC = Q \Rightarrow p_0 = \min\{AVC = 1\} = 1$

Η εξίσωση προσφοράς είναι:

$p = C'(q) \Rightarrow p = 1$, πλήρως ελαστική

2. $C = 1 + Q + Q^2,\ VC = Q + Q^2 \Rightarrow p_0 = \min\{AVC = 1 + Q\} = 1$ στο $q_0 = 0$

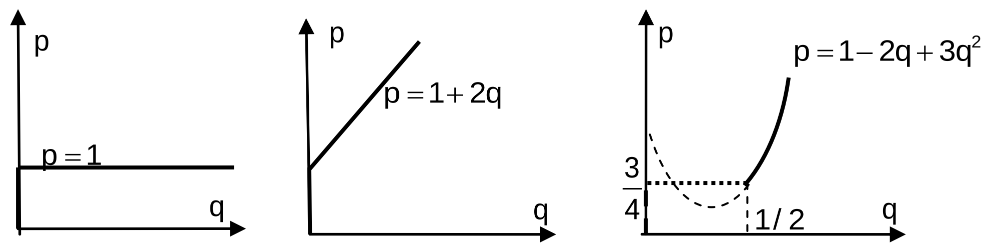
Για μεγαλύτερες τιμές η εξίσωση προσφοράς είναι:

$p = C'(q) = 1 + 2q$ για $q > q_0 = 0,\ p > p_0 = 1$

3. $C = 1 + Q - Q^2 + Q^3,\ VC = Q - Q^2 + Q^3 \Rightarrow p_0 = \min\{AVC = 1 - Q + Q^2\} = 3/4$ στο $q_0 = 1/2$

Για μεγαλύτερες τιμές η εξίσωση προσφοράς είναι:

$p = C'(q) = 1 - 2q + 3q^2$ για $q > q_0 = 1/2,\ p > p_0 = 3/4$

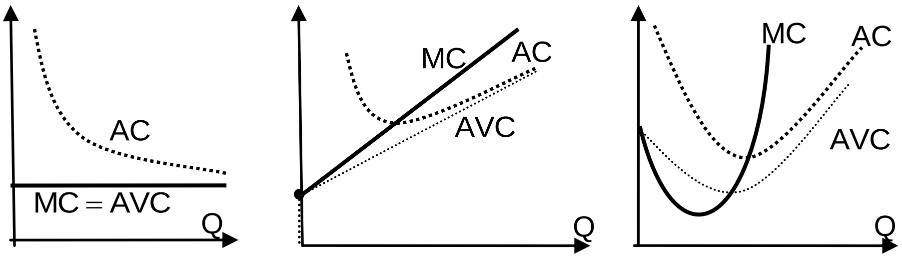


8.

Για τρεις συναρτήσεις κόστους: $C = C(Q)$, δίνουμε παρακάτω τα γραφήματα οριακού μέσου μεταβλητού και μέσου κόστους. Υποθέτοντας συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού, να βρεθούν σε κάθε περίπτωση, γραφικά:

1. Η ελάχιστη συμφέρουσα τιμή p_0, και η εξίσωση προσφοράς: $p = S^{-1}(q)$

2. Η ελάχιστη κερδοφόρα τιμή p_1



Λύση

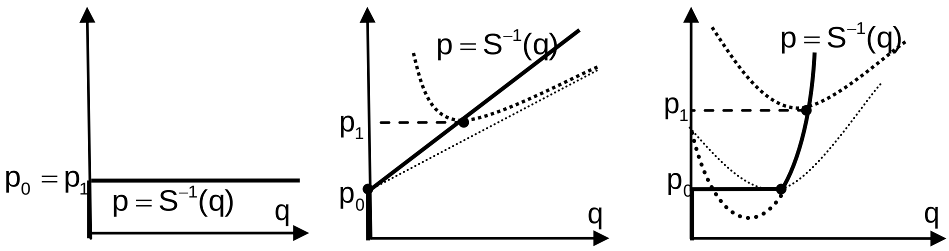
1. Η ελάχιστη συμφέρουσα τιμή δίνεται από το ελάχιστο του μέσου μεταβλητού κόστους, εκεί που το οριακό κόστος το κόβει από κάτω προς τα πάνω:

$$p_0 = \min\{AVC\}$$

Στη συνέχεια η εξίσωση προσφοράς δίνεται από την καμπύλη του οριακού κόστους που βρίσκεται πάνω από αυτή την ελάχιστη τιμή:

$$p = MC(q) \text{ για } p > p_0$$

Στα παρακάτω γραφήματα σημειώνεται με την σκούρα γραμμή. Για μικρότερες τιμές η προσφορά είναι μηδενική.



2. Η ελάχιστη κερδοφόρα τιμή δίνεται από το ελάχιστο του μέσου κόστους, εκεί που το οριακό κόστος το κόβει από κάτω προς τα πάνω:

$$p_1 = \min\{AC\}$$

9.

Χρησιμοποιώντας εργασία L, μια επιχείρηση παράγει ένα προιόν σε ποσότητα: $Q = 2\ln(1+L)$, με κόστος: $C = wL$. Το προιόν διατίθεται στην αγορά με τιμή μονάδος: $p = 1$. Η επιχείρηση λειτουργεί μεγιστοποιώντας το κέρδος, μόνο εφόσον είναι θετικό. Να βρεθούν τα παρακάτω:

α) Η συνθήκη υπό την οποία θα υπάρξει παραγωγή.

β) Το κέρδος π ως συνάρτηση του μοναδιαίου κόστους εργασίας w. Να διερευνηθούν οι ιδιότητες μονοτονίας και κυρτότητας αυτής της συνάρτησης και να γίνει το γράφημά της.

Λύση.

α) Το κέρδος: $\Pi = pQ - C = 2\ln(1+L) - wL$, είναι κοίλη συνάρτηση του $\mathbf{L}$. Επομένως δεν θα υπάρξει παραγωγή αν έχει μέγιστο στο $L = 0$, οπότε θα ικανοποιείται η συνθήκη:

$$\Pi'(0) = 2 - w \le 0 \Rightarrow w \ge 2$$

β) Αν $w < 2$ τότε το μέγιστο κέρδος θα βρίσκεται στη στάσιμη λύση:

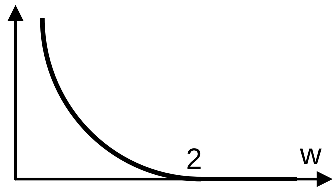
$$\Pi' = \frac{2}{1+L} - w = 0 \Rightarrow L^* = \frac{2}{w} - 1 > 0$$

Επομένως ως συνάρτηση του μοναδιαίου κόστους εργασίας, το μέγιστο κέρδος θα είναι

1. $\Pi^* = 0$ αν $w \ge 2$
2. $\Pi^* = 2\ln(1+L^*) - wL^* = 2\ln(\frac{2}{w}) - (2-w) = 2\ln 2 - 2\ln w - 2 + w$

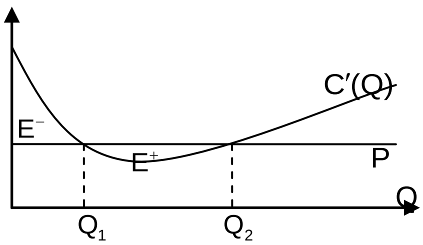
με $\Pi^{*\prime}(w) = -\frac{2}{w} + 1 < 0$, και $\Pi^{*\prime\prime}(w) = \frac{2}{w^2} > 0$

Στο $w = 2$ συμπιπτουν οι τιμές και οι παράγωγοι. Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση κέρδους είναι φθίνουσα κυρτή , γνήσια μέχρι το $w = 2$ και μετά σταθερή στο 0.



10.

Μία παραγωγική μονάδα λειτουργεί με οριακό κόστος $C'(Q)$, και με τιμή διάθεσης μιας μονάδας του προιόντος σταθερή: P, όπως στο παραπλεύρως σχήμα. Να διερευνηθεί αν η επιχείρηση είναι βιώσιμη.



<u>**Λύση.**</u> Το κέρδος και το οριακό κέρδος είναι:

$$\Pi(Q) = PQ - C(Q) \Rightarrow \Pi'(Q) = P - C'(Q)$$

Επομένως το λειτουργικό κέρδος ελαττώνεται μέχρι την παραγωγή Q_1 διότι έχουμε: $P < C'(Q)$, στη συνέχεια αυξάνει μέχρι την παραγωγή Q_2 διότι έχουμε: $P > C'(Q)$, και στη συνέχεια πάλι ελαττώνεται. Έτσι το μέγιστο λειτουργικό κέρδος βρίσκεται στην παραγωγή Q_2. Το μέγιστο αυτό λειτουργικό κέρδος ισούται με το προσημασμένο εμβαδό μεταξύ των δύο καμπύλων μέχρι το Q_2, δηλαδή με την διαφορά των δύο εμβαδών:

$$V\Pi^* = \int_0^{Q_2} \Pi'(Q)dQ = E^+ - E^-$$

Από το γράφημα διαπιστώνουμε ότι η παραπάνω διαφορά είναι γνήσια αρνητική: $E^- > E^+$, και επομένως η επιχείρηση δεν είναι βιώσιμη, με την έννοια ότι η τιμή δεν είναι συμφέρουσα διότι δίνει αρνητικό λειτουργικό κέρδος Πολύ περισσότερο αν έχουμε και σταθερό κόστος.

▲