

Φροντιστήριο Εφ.Π (B)

1

Θεωρούμε τη συνάρτηση παραγωγής: $Q(K,L) = K^{3/2} + 8L^{3/2}$ όπου $\{K \geq 0, L \geq 0\}$ είναι οι ποσότητες συμμετοχής των δύο συντελεστών παραγωγής. Να γίνουν τα γραφήματα μιας καμπύλης ισοπαραγωγής, και της διανυσματικής παραγωγού, και να διερευνηθεί αν η συνάρτηση α) ορίζει αύξοντα ή φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης, β) είναι οιονεί κοίλη ή οιονεί κυρτή, και γ) είναι κοίλη ή κυρτή.

2.

Θεωρούμε τη συνάρτηση παραγωγής: $Q(K,L) = (K^{3/2} + L^{3/2})^{2/3}$ με $\{K \geq 0, L \geq 0\}$.

Να γίνει το γράφημα μιας καμπύλης ισοπαραγωγής, και να διερευνηθεί αν η συνάρτηση παραγωγής είναι οιονεί κοίλη ή οιονεί κυρτή και αν ορίζει αύξοντα ή φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης των συντελεστών παραγωγής.

3.

Ένα μονοπώλιο διαθέτει το προϊόν του σε δύο αγορές, σε ποσότητες $\{X, Y\}$ με μοναδιαίες τιμές $\{V, W\}$ και με εξισώσεις ζήτησης: $\{V = 5 - Y, W = 4 - 2X\}$ αντίστοιχα, και με ενιαίο συνολικό κόστος: $C = 2 + 2(X + Y)$.

Να βρεθεί η συνάρτηση κέρδους $\Pi(X, Y)$, και να σκιαγραφηθούν οι ισοσταθμικές της.

4.

Ένα μονοπώλιο διαθέτει το προϊόν του σε δύο αγορές, σε ποσότητες $\{X, Y\}$ με μοναδιαίες τιμές $\{V, W\}$ και με εξισώσεις ζήτησης $\{V = 1 - 2X, W = 4 - Y\}$ αντίστοιχα, και με ενιαίο συνολικό κόστος $C = 2 + 2(X + Y)$.

Να διατυπωθεί η συνάρτηση κέρδους, και να σκιαγραφηθούν οι ισοσταθμικές της.

5.

Μια επιχείρηση διαθέτει το ίδιο προϊόν σε διαφορετικές αγορές, σε ποσότητες $\{X, Y\}$ αντίστοιχα, με συνολικό κόστος $C = X + Y$, και εξισώσεις ζήτησης: $V = 2 - X$ και $W = 4 - Y$ αντίστοιχα, όπου $\{w, v\}$ είναι οι αντίστοιχες μοναδιαίες τιμές.

Να βρεθεί η συνάρτηση κέρδους και να γίνει το γράφημα των ισοσταθμικών της.

6.

Θεωρούμε τη συνάρτηση χρησιμότητας: $U(X, Y) = \ln(X^{5/2} + 4Y^{5/2})$ όπου $\{X \geq 0, Y \geq 0\}$ είναι οι ποσότητες κατανάλωσης δύο αγαθών.

Να γίνει το γράφημα μιας καμπύλης αδιαφορίας.

7.

Ένας ωρομίσθιος εργαζόμενος εργάζεται L ώρες ημερησίως με χρησιμότητα: $U = \ln C + \ln T$, όπου $C \geq 0$ είναι το διαθέσιμο ποσό για ημερήσια κατανάλωση και $T = 16 - L$ ο ελεύθερος χρόνος. Να βρεθούν:

1. Το γράφημα των ισοσταθμικών της U στο επίπεδο $\{C, T\}$

2. Το γράφημα των ισοσταθμικών της U στο επίπεδο $\{C, L\}$.

8.

Θεωρούμε την συνάρτηση χρησιμότητας: $U = (X + 1)(Y - 2)$ με $X \geq 0, Y \geq 0$. Να γίνει το γράφημα της καμπύλης αδιαφορίας $U = (X + 1)(Y - 2) = u$

9.

Σε μια σύνθετη παραγωγή δύο προϊόντα παράγονται σε ποσότητες (X, Y) με συνάρτηση κόστους: $C(X, Y) = 1 + (X^{1/2} + Y^{1/2})^2$.

Να γίνει το γράφημα μιας καμπύλης ισοκόστους και να διερευνηθεί αν η συνάρτηση κόστους είναι οιονεί κοίλη ή οιονεί κυρτή, και αν ορίζει φθίνοντα ή αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης των προϊόντων στο κόστος.

10.

Μία επιχείρηση παράγει δύο προϊόντα σε ποσότητες $\{x, y\}$, με κόστος $C = x^2 + y$, και έσοδο $R = vx + wy$, όπου $\{v > 0, w > 0\}$ είναι οι μοναδιαίες τιμές τους.

Να γίνει το γράφημα της καμπύλης $C=1$, και το γράφημα των ισοσταθμικών της συνάρτησης εσόδου R , στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

Φροντιστήριο.Εφ.Π(Β)

1

Θεωρούμε τη συνάρτηση παραγωγής: $Q(K,L) = K^{3/2} + 8L^{3/2}$ όπου $\{K \geq 0, L \geq 0\}$ είναι οι ποσότητες συμμετοχής των δύο συντελεστών παραγωγής. Να γίνουν τα γραφήματα μιας καμπύλης ισοπαραγωγής, και της διανυσματικής παραγωγού, και να διερευνηθεί αν η συνάρτηση α) ορίζει αύξοντα ή φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης, β) είναι οιονεί κοίλη ή οιονεί κυρτή, και γ) είναι κοίλη ή κυρτή.

Λύση.

Η εξίσωση ισοπαραγωγής ανήκει στην γνωστή κατηγορία των εξισώσεων του τύπου:

$$\alpha x^r + \beta y^r = c, \text{ με } r > 1, \{ \alpha > 0, \beta > 0 \}$$

Παριστάνεται με την μαύρη γραμμή στο γράφημα.

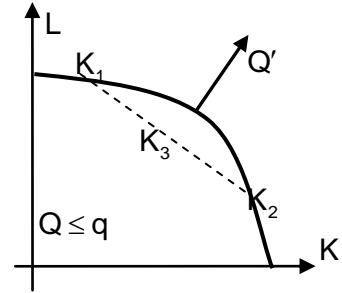
Η συγκεκριμένη συνάρτηση παραγωγής δεν είναι κανονική.

α) Ορίζει αύξοντα, αντί του φθίνοντος ρυθμού υποκατάστασης. Ο ρυθμός υποκατάστασης του L από το K αυξάνει με το K, διότι αυξάνει η κλίση της εφαπτομένης σε απόλυτη τιμή,

β) Είναι και οιονεί κυρτή αντί κοίλης, δηλαδή αντί των πάνω, οι κάτω σταθμικές: $\{Q \leq q\}$ είναι κυρτές περιοχές, με αποτέλεσμα,

όπως φαίνεται και από την διακεκομμένη γραμμή στο γράφημα, **ενδιάμεσοι συνδυασμοί των συντελεστών παραγωγής $\{K_3\}$ να είναι λιγότερο παραγωγικοί από ακραίους συνδυασμούς $\{K_1, K_2\}$.**

γ) Είναι κυρτή αντί κοίλη, διότι είναι άθροισμα κυρτών συναρτήσεων, δηλαδή τα οριακά προϊόντα των συντελεστών παραγωγής αυξάνουν με τους συντελεστές. Το ίδιο βρίσκουμε αν υπολογίσουμε τον εσσιανό πίνακα



2

Θεωρούμε τη συνάρτηση παραγωγής: $Q(K,L) = (K^{3/2} + L^{3/2})^{2/3}$ όπου $\{K \geq 0, L \geq 0\}$ είναι οι ποσότητες συμμετοχής των δύο συντελεστών παραγωγής. Να γίνουν τα γραφήματα μιας καμπύλης ισοπαραγωγής, και της διανυσματικής παραγωγού, και να διερευνηθεί αν η συνάρτηση είναι: α) οιονεί κυρτή ή οιονεί κοίλη β) ορίζει αύξοντα ή φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης.

Λύση.

Η Q είναι αύξων μετασχηματισμός της αντίστοιχης συνάρτησης στην παραπάνω άσκηση 1. Επομένως έχουν τις ίδιες ισοσταθμικές και τις ίδιες σταθμικές περιοχές. Οπότε έχει και τις ίδιες σχετικές ιδιότητες. Δηλαδή είναι οιονεί κυρτή με αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης.

Σημ. Για την κυρτότητα πρέπει να υπολογίσουμε τον εσσιανό πίνακα.

3

Ένα μονοπώλιο διαθέτει το προϊόν του σε δύο αγορές, σε ποσότητες $\{X, Y\}$ με μοναδιαίες τιμές $\{V, W\}$ και με εξισώσεις ζήτησης: $\{V = 5 - Y, W = 4 - 2X\}$ αντίστοιχα, και με ενιαίο συνολικό κόστος: $C = 2 + 2(X + Y)$.

Να βρεθεί η συνάρτηση κέρδους $\Pi(X, Y)$, και να σκιαγραφηθούν οι ισοσταθμικές της.

Λύση.

$$\begin{aligned} \Pi &= WX + VY - C = (4 - 2X)X + (5 - Y)Y - [2 + 2(X + Y)] \\ &= -2 + 2X + 3Y - 2X^2 - Y^2 \end{aligned}$$

Είναι παραβολική συνάρτηση με παραγώγους:

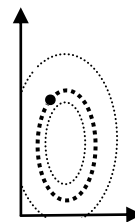
$$\left. \begin{aligned} \Pi_X &= 2 - 4X \\ \Pi_Y &= 3 - 2Y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \Pi_{XX} &= -4 < 0 \\ \Pi_{YY} &= -2 < 0 \\ \Pi_{XY} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta = \Pi_{XX}\Pi_{YY} - \Pi_{XY}^2 = (-4)(-2) - (0)^2 = 8 > 0$$

Ο εσσιανός πίνακας της δεύτερης παραγωγού είναι αρνητικά ορισμένος, και επομένως η συνάρτηση κέρδους είναι γνήσια κοίλη.

Οι ισοσταθμικές της είναι όρθιες ελλείψεις με το ίδιο κέντρο στο στάσιμο, όπου η συνάρτηση κέρδους θα έχει και την μέγιστη τιμή:

$$\left. \begin{aligned} \Pi_x = 2 - 4X = 0 \\ \Pi_y = 3 - 2Y = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} X_0 = 1/2 = 0.5 \\ Y_0 = 3/2 = 1.5 \end{aligned} \right\}$$

Οι ελλείψεις έχουν την μεγάλη ακτίνα στη y -κατεύθυνση διότι ο συντελεστής του Y^2 είναι μικρότερος από τον συντελεστή του X^2 . Βέβαια, από την κάθε ισοσταθμική ισχύει μόνο το τμήμα της έλλειψης που βρίσκεται στη θετική περιοχή, όπως φαίνεται στο γράφημα.



Παρατήρηση. Μπορούμε να βρούμε τις ισοσταθμικές και συμπληρώνοντας τα τετράγωνα:

$$\begin{aligned} \Pi &= -2 + 2X + 3Y - 2X^2 - Y^2 = -2(X^2 - X) - (Y^2 + 3Y) - 2 \\ &= -2[X^2 - 2(1/2)X + (1/2)^2 - (1/2)^2] - [Y^2 - 2(3/2)Y + (3/2)^2 - (3/2)^2] - 2 \\ &= -2(x - 1/2)^2 - (Y - 3/2)^2 + 2(1/4) + (9/4) \\ &= -2(x - 1/2)^2 - (Y - 3/2)^2 + 11/4 \end{aligned}$$

Οι ισοσταθμικές δίνονται από τις ελλείψεις:

$$\begin{aligned} \Pi &= -2(x - 1/2)^2 - (Y - 3/2)^2 + 11/4 = c \\ \Rightarrow 2(x - 1/2)^2 + (Y - 3/2)^2 &= 11/4 - c, \text{ με } c \leq 11/4 \end{aligned}$$

4

Ένα μονοπώλιο διαθέτει το προϊόν του σε δύο αγορές, σε ποσότητες $\{X, Y\}$ με μοναδιαίες τιμές $\{V, W\}$ και με εξισώσεις ζήτησης $\{V = 1 - 2X, W = 4 - Y\}$ αντίστοιχα, και με ενιαίο συνολικό κόστος $C = 2 + 2(X + Y)$.

Να διατυπωθεί η συνάρτηση κέρδους, και να σκιαγραφηθούν οι ισοσταθμικές της.

Λύση.

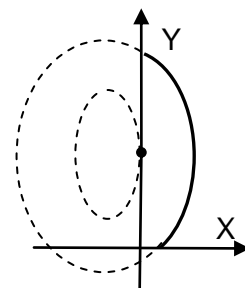
Συνάρτηση κέρδους:

$$\begin{aligned} \Pi &= R - C = VX + WY - C = (1 - 2X)X + (4 - Y)Y - [2 + 2(X + Y)] \\ &= -2 - X + 2Y - 2X^2 - Y^2 \end{aligned}$$

Είναι παραβολική κοίλη με στάσιμο εκτός της θετικής περιοχής, στο στάσιμο:

$$\left. \begin{aligned} f_x = -1 - 4X = 0 \\ f_y = +2 - 2Y = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} X = -1/4 < 0 \\ Y = 1 > 0 \end{aligned} \right\}$$

και με ελλειπτικές ισοσταθμικές όπως στο γράφημα, το τμήμα τους που βρίσκεται στη θετική περιοχή και σημειώνεται με μαύρη γραμμή. Ο μεγάλος άξονας είναι στην y -κατεύθυνση διότι ο συντελεστής του Y^2 είναι μικρότερος από τον συντελεστή του X^2 . Οι τιμές τους πέφτουν καθώς η ακτίνα μεγαλώνει



5

Μια επιχείρηση διαθέτει το ίδιο προϊόν σε διαφορετικές αγορές, σε ποσότητες $\{X, Y\}$ αντίστοιχα, με συνολικό κόστος $C = X + Y$, και εξισώσεις ζήτησης: $V = 2 - X$ και $W = 4 - Y$ αντίστοιχα, όπου $\{w, v\}$ είναι οι αντίστοιχες μοναδιαίες τιμές.

Να βρεθεί η συνάρτηση κέρδους και να γίνει το γράφημα των ισοσταθμικών της.

Λύση

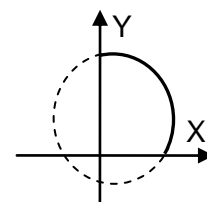
$$\Pi = (2 - X)X + (4 - Y)Y - (X + Y) = X + 3Y - X^2 - Y^2$$

Οι ισοσταθμικές είναι κυκλικές με κέντρο στο στάσιμο σημείο:

$$\Pi_x = 1 - 2X = 0 \Rightarrow X_0 = 1/2$$

$$\Pi_y = 3 - 2Y = 0 \Rightarrow Y_0 = 3/2$$

Ισχύει μόνο το τμήμα στη θετική περιοχή που σημειώνεται με μαυρη γραμμή. Το κέντρο μπορεί να βρεθεί και με συμπλήρωση τετραγώνων

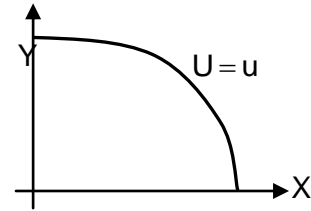


6

Θεωρούμε τη συνάρτηση χρησιμότητας: $U(X, Y) = \ln(X^{5/2} + 4Y^{5/2})$ όπου $\{X \geq 0, Y \geq 0\}$ είναι οι ποσότητες κατανάλωσης δύο αγαθών. Να γίνει το γράφημα μιας καμπύλης αδιαφορίας, και να διερευνηθεί η κανονικότητα της.

Λύση.

Οι ισοσταθμικές της είναι ίδιες με τις ισοσταθμικές της συνάρτησης CES: $V = X^{5/2} + 4Y^{5/2}$, που ως γνωστό έχουν το γράφημα του παραπλεύρως σχήματος, διότι η δύναμη $5/2$ είναι μεγαλύτερη της μονάδος. Ειδικότερα η συνάρτηση χρησιμότητας δεν είναι κανονική, είναι οιονεί κυρτή αντί οιονεί κοίλη, οπότε ενδιάμεσοι συνδυασμοί των αγαθών είναι λιγότερο επιθυμητοί από ακραίους συνδυασμούς.



7

Ένας ωρομίσθιος εργαζόμενος εργάζεται L ώρες ημερησίως με χρησιμότητα: $U = \ln C + \ln T$, όπου $C \geq 0$ είναι το διαθέσιμο ποσό για ημερήσια κατανάλωση και $T = 16 - L$ ο ελεύθερος χρόνος. Να βρεθούν:

1. Το γράφημα των ισοσταθμικών της U στο επίπεδο $\{C, T\}$

2. Το γράφημα των ισοσταθμικών της U στο επίπεδο $\{C, L\}$.

Λύση.

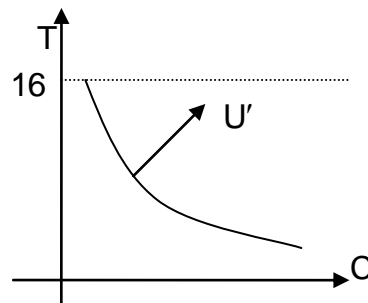
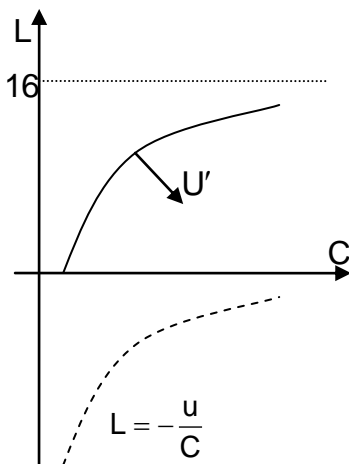
1. $U = \ln C + \ln T = \ln CT$: όπως φαίνεται στο δεύτερο γράφημα, οι ισοσταθμικές είναι οι υπερβολές: $CT = u$, περιορισμένες στη περιοχή:

$$0 \leq C, 0 \leq T \leq 16,$$

2. $U = \ln C + \ln(16 - L) = \ln C(16 - L)$: οι ισοσταθμικές είναι οι εξισώσεις:

$$C(16 - L) = u \Rightarrow L = 16 - \frac{u}{C} \text{ στη περιοχή } 0 \leq C, 0 \leq L \leq 16$$

Είναι η αρνητική υπερβολή $L = -u/C$, μετατοπισμένη προς τα πάνω κατά 16 , όπως φαίνεται στο πρώτο γράφημα.



Η κατανάλωση υποκαθιστά τον ελεύθερο χρόνο στο δεξιό γράφημα, αλλά αντισταθμίζει την εργασία στο δεξί. Όσο πλησιάζουμε το πάνω όριο $L \rightarrow 16$, η επιπλέον κατανάλωση αντισταθμίζει όλο και λιγότερη επιπλέον εργασία, ή ισοδύναμα όλο και περισσότερη κατανάλωση απαιτείται για να αντισταθμίσει επιπλέον εργασία.

8.

Θεωρούμε την συνάρτηση χρησιμότητας: $U = (X+1)(Y-2)$ με $X \geq 0, Y \geq 0$. Να γίνει το γράφημα της καμπύλης αδιαφορίας $U = (X+1)(Y-2) = u$

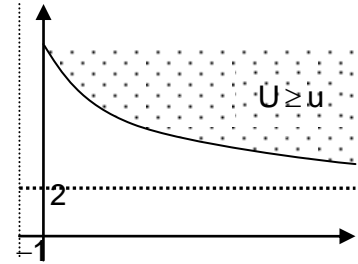
Λύση.

Η ισοσταθμική είναι η υπερβολή μετατοπισμένη στο σημείο:

$$\{X+1=0, Y-2=0\} \Rightarrow \{X_0 = -1, Y_0 = 2\}$$

Γραφικά διαπιστώνουμε ότι:

1. Η κατανάλωση του Y είναι πάντοτε μεγαλύτερη του 2.
2. Η κατανάλωση του X μπορεί και να μηδενιστεί.



9.

Σε μια σύνθετη παραγωγή δύο προϊόντα παράγονται σε ποσότητες (X, Y) με συνάρτηση κόστους: $C(X, Y) = 1 + (X^{1/2} + Y^{1/2})^2$.

Να γίνει το γράφημα μιας καμπύλης ισοκόστους και να διερευνηθεί αν η συνάρτηση κόστους είναι οιονεί κοίλη ή οιονεί κυρτή, και αν ορίζει φθίνοντα ή αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης των προϊόντων στο κόστος.

Λύση. Έχουμε: $C = 1 + H^2$ όπου: $H(X, Y) = X^{1/2} + Y^{1/2}$

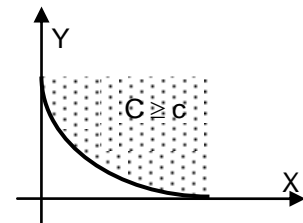
Οι ισοσταθμικές της C είναι ίδιες με τις ισοσταθμικές της H . Η συνάρτηση H είναι της γνωστής μορφής

$$x^a + y^a \text{ με } a < 1$$

και οι ισοσταθμικές της έχουν το γνωστό σχήμα παραπλεύρως, με τις πάνω σταθμικές κυρτές. Το ίδιο θα ισχύει για τις σταθμικές της αρχικής C . Συμπεραίνουμε ότι, όπως και η H :

H C είναι οιονεί κοίλη και ορίζει φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης.

Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση κόστους δεν είναι κανονική ως προς την κυρτότητα. Ενδιάμεσες ποσότητες παραγωγής έχουν υψηλότερο κόστος.



10

Μία επιχείρηση παράγει δύο προϊόντα σε ποσότητες $\{x, y\}$, με κόστος $C = x^2 + y$, και έσοδο $R = vx + wy$, όπου $\{v > 0, w > 0\}$ είναι οι μοναδιαίες τιμές τους.

Να γίνει το γράφημα της καμπύλης $C=1$, και το γράφημα των ισοσταθμικών της συνάρτησης εσόδου R , στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

Λύση:

Η καμπύλη ισοκόστους είναι παραβολή

$$C = x^2 + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x^2$$

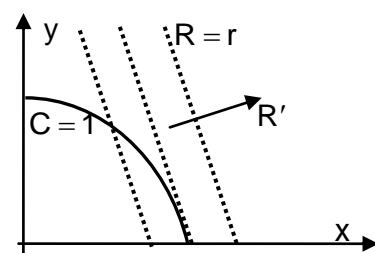
Η συνάρτηση εσόδου έχει ισοσταθμικές:

$$R = vx + wy = r,$$

παράλληλες ευθείες με κλίση γνήσια αρνητική:

$$-v/w,$$

Το έσοδο R αυξάνει στην κατεύθυνση της αντίστοιχης διανυσματικής κλίσης R'



▲