Φροντιστήριο.IV(B)

1

Να διαπιστωθεί ότι η συνάρτηση $f(x,y)=\sqrt{x+2y}$ **είναι ομογενής και να διατυπωθεί η αντίστοιχη εξίσωση Euler.**

2

Τα μεγέθη $\{x,y,z\}$ **συνδέονται με την εξίσωση:** $z=4x^{3/4}y^{1/4}$**. Να εκτιμηθεί η ποσοστιαία μεταβολή του** z**, αν τα** $\{x,y\}$ **ελαττωθούν αμφότερα κατά** 2%**.**

3

Θεωρούμε τη σχέση $z=x^2y$**. Αν από κάποιες αρχικές τιμές** (x,y)**, το** x **ελαττωθεί κατά** 1%**, να εκτιμηθεί πόσο πρέπει να μεταβληθεί το** y **ώστε να μην αλλάξει η τιμή του** z

4

Η εξίσωση $\alpha^2\beta+\alpha x-x^2=2$ **ορίζει πλεγμένα το** x **ως συνάρτηση των** $\{\alpha,\beta\}$**. Να βρεθούν η παράγωγος και η ελαστικότητα του** x **ως προς** α**, στις τιμές:** $\{\alpha=1,\beta=2,x=1\}$**.**

5

Να διαπιστωθεί ότι η $f(x,y)=(x+y)/y^2$ **είναι ομογενής και να επαληθευτεί η αντίστοιχη εξίσωση Euler.**

6

Η εξίσωση $x^2y+xz-z^2=2$**, ορίζει πλεγμένα το** x **ως συνάρτηση των** $\{y,z\}$**. Να υπολογιστούν η παράγωγος και η ελαστικότητα του** x **ως προς** y**, στις τιμές:** $\{x=1,y=2,z=1\}$**.**

7

Τα μεγέθη $\{x,y,z\}$ **συνδέονται με την εξίσωση:** $z=4x^{3/4}y^{1/4}$**. Να εκτιμηθεί η μεταβολή του** z**, αν to** x **ελαττωθεί κατά** 2%**, και το** y **αυξηθεί κατά** 2% **.**

Φροντιστήριο.IV(Β)-Λύσεις

1

Να διαπιστωθεί ότι η συνάρτηση $f(x,y)=\sqrt{x+2y}$ είναι ομογενής και να διατυπωθεί η αντίστοιχη εξίσωση Euler.

Λύση. Είναι ομογενής βαθμού $\kappa=1/2$, διότι:

$$f(tx,ty)=\sqrt{tx+2ty}=t^{1/2}\sqrt{x+2y}=t^{1/2}f(x,y)$$

Θα ικανοποιεί την εξίσωση Euler βαθμού $\kappa=1/2$:

$$xf_x+yf_y=f/2$$

2

Τα μεγέθη $\{x,y,z\}$ συνδέονται με την εξίσωση: $z=4x^{3/4}y^{1/4}$. Να εκτιμηθεί η ποσοστιαία μεταβολή του z, αν τα $\{x,y\}$ ελαττωθούν αμφότερα κατά 2%.

Λύση. Είναι συνάρτηση C-D με ελαστικότητα κλίμακας το άθροισμα των βαθμών: $\varepsilon_r=\varepsilon_x+\varepsilon_y=3/4+1/4=1$

Επομένως η ποσοστιαία μεταβολή του z θα είναι: $\%\Delta z\approx\%dz=(1)(-2\%)=-2\%$

Δηλαδή το z θα ελαττωθεί επίσης κατά 2% περίπου

Παρατήρηση. Οι (οριακές) ποσοστιαίες μεταβολές, δηλαδή τα ποσοστιαία διαφορικά, συνδέονται με την σχέση:

$$\%dz=\varepsilon_x(\%dx)+\varepsilon_y(\%dy)$$

όπου:

$$\varepsilon_x=E_xz=3/4,\quad \varepsilon_y=E_yz=1/4,\quad \%dx=\%\Delta x=-2\%,\quad \%dy=\%\Delta y=-2\%$$

3

Θεωρούμε τη σχέση $z=x^2y$. Αν από κάποιες αρχικές τιμές (x,y), το x ελαττωθεί κατά 1%, να εκτιμηθεί πόσο πρέπει να μεταβληθεί το y ώστε να μην αλλάξει η τιμή του z

Λύση1. Για σταθερό z, θα έχουμε:

$$z=x^2y=c\Rightarrow y=cx^{-2}$$

Δηλαδή, η ελαστικότητα του y ως προς x με σταθερό z, είναι $\varepsilon=-2$. Επομένως με σταθερό z το y πρέπει να μεταβληθεί περίπου κατά:

$$\%dy=\varepsilon(\%dx)=-2(-1)=2\%$$

Λύση 2. Η συνάρτηση $z=x^2y$ είναι C-D. Επομένως οι ελαστικότητες δίνονται από τους αντίστοιχους εκθέτες, και τα ποσοστιαία διαφορικά θα ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\%dz=(\varepsilon_x)(\%dx)+(\varepsilon_y)(\%dy)=0\Rightarrow\%dy=-\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y}(\%dx)=-\frac{2}{1}(-1)=2\%$$

4

Η εξίσωση $\alpha^2\beta+\alpha x-x^2=2$ ορίζει πλεγμένα το x ως συνάρτηση των $\{\alpha,\beta\}$. Να βρεθούν η παράγωγος και η ελαστικότητα του x ως προς α, στις τιμές: $\{\alpha=1,\beta=2,x=1\}$.

Λύση. Ελέγχουμε ότι οι τιμές ικανοποιούν την εξίσωση. Στη συνέχεια θεωρούμε την εξίσωση:

$$f(\alpha,\beta,x)=\alpha^2\beta+\alpha x-x^2=2\Rightarrow x=x(\alpha,\beta),$$

οπότε ο τύπος πλεγμένης παραγώγισης μας δίνει:

Παράγωγο: $\dfrac{\partial x}{\partial\alpha}=-\dfrac{f_\alpha}{f_x}=-\dfrac{2\alpha\beta+x}{\alpha-2x}=\dfrac{2\cdot1\cdot2+1}{1-2\cdot1}=-5,$

Ελαστικότητα: $E_\alpha x=\dfrac{\alpha x_\alpha}{x}=\dfrac{1(-5)}{1}=-5$

Παρατήρηση. Η παράγωγος μπορεί να υπολογιστεί και με πλεγμένη παραγώγιση στην εξίσωση, ως προς α με σταθερό β:

$$\alpha^2\beta + \alpha x - x^2 = 2 \Rightarrow 2\alpha\beta + (x + \alpha x_\alpha) - 2xx_\alpha = 0 \Rightarrow x_\alpha = -\frac{2\alpha\beta + x}{\alpha - 2x} = -5$$

<u>**5**</u>

Να διαπιστωθεί ότι η $f(x,y) = (x+y)/y^2$ είναι ομογενής και να επαληθευτεί η αντίστοιχη εξίσωση Euler.

Λύση. Η $f(x,y) = \dfrac{x+y}{y^2} = \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{1}{y} = xy^{-2} + y^{-1}$, είναι ομογενής βαθμού -1, διότι ικανοποιεί:

$$f(tx,ty) = \frac{tx+ty}{(ty)^2} = \frac{1}{t}\frac{x+y}{y^2} = t^{-1}f(x,y)$$

Επαληθεύεται και η εξίσωση Euler βαθμού -1:

$$xf_x + yf_y = -f \Rightarrow xy^{-2} + y\left(-2xy^{-3} - y^{-2}\right) = xy^{-2} - 2xy^{-2} - y^{-1} = -xy^{-2} - y^{-1} = -f(x,y)$$

<u>**6**</u>

Η εξίσωση $x^2y + xz - z^2 = 2$, ορίζει πλεγμένα το x ως συνάρτηση των $\{y,z\}$. Να υπολογιστούν η παράγωγος και η ελαστικότητα του x ως προς y, στις τιμές: $\{x=1, y=2, z=1\}$.

Λύση. Ελέγχουμε πρώτα ότι οι τιμές ικανοποιούν την εξίσωση: $1^2 2 + 1\cdot 1 - 1^2 = 2$.

Η παράγωγος μπορεί να υπολογιστεί με τον τύπο πλεγμένης παραγώγισης:

$$f = x^2y + xz - z^2 \Rightarrow \{f_x = 2xy + z = 5, f_y = x^2 = 1\} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_x} = -\frac{1}{5} = -0.2$$

Εναλλακτικά μπορεί να υπολογιστεί με πλεγμένη παραγώγιση ως προς y, θεωρώντας το z σταθερό:

$$(x^2y + xz - z^2)' = 2' \Rightarrow (2xx_y y + x^2) + x_y z = 0 \Rightarrow 5x_y + 1 = 0 \Rightarrow x_y = -0.2$$

Τέλος υπολογίζουμε και την ελαστικότητα:

$$E_y x = \frac{yx_y}{x} = \frac{2}{1}\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{2}{5} = -0.4$$

<u>**7**</u>

Τα μεγέθη $\{x,y,z\}$ συνδέονται με την εξίσωση: $z = 4x^{3/4}y^{1/4}$. Να εκτιμηθεί η μεταβολή του z, αν το x ελαττωθεί κατά 2%, και το y αυξηθεί κατά 2%.

<u>**Λύση.**</u> Είναι συνάρτηση C-D με ελαστικότητες τους αντίστοιχους εκθέτες. Έχουμε:

$$\varepsilon_x = E_x z = 3/4,\ \varepsilon_y = E_y z = 1/2,\quad \%dx = \%\Delta x = -2\%,\quad \%dy = \%\Delta y = 2\%.$$

Επομένως η αντίστοιχη μεταβολή του z θα είναι:

$$\%\Delta z \approx \%dz = \varepsilon_x(\%dx) + \varepsilon_y(\%dy) = 3/4(-2) + 1/4(+2) = -3/2 + 1/2 = -1\%$$

Δηλαδή το z θα ελαττωθεί κατά 1% περίπου (διότι το x έχει μεγαλύτερη βαρύτητα).

▲