Φροντιστήριο. IV(A)

1

Θεωρούμε την εξίσωση: $y=(x+1)^{1/3}$ **, στη θετική περιοχή:** $\{x\ge 0,\ y\ge 0\}$

1. Να γίνει το γράφημά της

2. Να βρεθεί γραφικά και αναλυτικά το σημείο ισοελαστικότητας του x **ως προς** y **(αν υπάρχει)**

2

Θεωρούμε την εξίσωση: $y=(x-1)^{1/3}$ **, στη θετική περιοχή:** $\{x\ge 0,\ y\ge 0\}$

1. Να γίνει το γράφημά της

2. Να βρεθεί γραφικά και αναλυτικά το σημείο ισοελαστικότητας του x **ως προς** y **(αν υπάρχει)**

3

Θεωρούμε την εξίσωση: $x^3+y^3=2$ **, στη θετική περιοχή:** $\{x\ge 0,\ y\ge 0\}$

1. Να γίνει το γράφημά της

2. Να βρεθεί γραφικά και αναλυτικά το σημείο ισοελαστικότητας του x **ως προς** y **(αν υπάρχει)**

4

Θεωρούμε την εξίσωση: $y=1-x^3$ **, στη θετική περιοχή:** $\{x\ge 0,\ y\ge 0\}$

1. Να γίνει το γράφημά της

2. Να βρεθεί γραφικά και αναλυτικά το σημείο ισοελαστικότητας του y **ως προς** x **(αν υπάρχει)**

3. Να προσδιοριστεί η περιοχή ανελαστικότητας y **ως προς** x**, είτε γραφικά είτε αναλυτικά.**

5

Θεωρούμε την εξίσωση: $y=1-x^{1/2}$ **, στη θετική περιοχή:** $\{x\ge 0,\ y\ge 0\}$

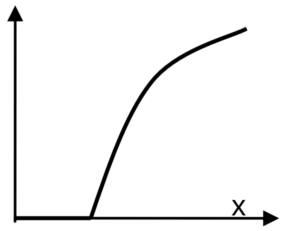
1. Να γίνει το γράφημά της

2. Να βρεθεί γραφικά και αναλυτικά το σημείο ισοελαστικότητας του x **ως προς** y **(αν υπάρχει)**

3. Να προσδιοριστεί το τμήμα της καμπύλης με ανελαστικότητα του x **ως προς** y

6

Η συνάρτηση $f(x)$ **είναι ορισμένη στο διάστημα** $x\ge 0$**, και έχει το γράφημα του παραπλεύρως σχήματος.**



1. Να βρεθεί γραφικά το σημείο ισοελαστικότητας

2. Να γίνουν στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τα γραφήματα των συναρτήσεων

Οριακή τιμή: $Mf(x)=f'(x)$**, Μέση τιμή:** $Af(x)=f(x)/x$

7

Τα $\{x,y\}$ **συνδέονται μεταξύ τους, όπου η ελαστικότητα του** y **ως προς** x **είναι** $E_x y=-3$**. Αν το** y **ελαττωθεί κατά** 2% **, να εκτιμηθεί πόσο θα μεταβληθούν τα μεγέθη:**

1. x **2.** $u=y/x$

8

Οι θετικές μεταβλητές $\{x\ge 0, y\ge 0\}$ **συνδέονται με την εξίσωση:** $x+2y=2$**.**

1. Να βρεθούν τα σημεία ανελαστικότητας του y **ως προς** x**.**

2. Να βρεθούν τα σημεία ελαστικότητας του x **ως προς** y**.**

9

Θεωρούμε την εξίσωση: $x^{1/2}+y^{1/2}=2$ **, στη θετική περιοχή:** $\{x\ge 0,\ y\ge 0\}$

1. Να γίνει το γράφημά της

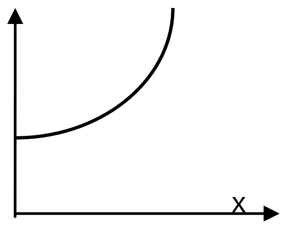
2. Να βρεθεί γραφικά και αναλυτικά το σημείο ισοελαστικότητας του y **ως προς** x

10

Οι μεταβλητές $\{x, y\}$ συνδέονται με μια εξίσωση. Για $x = 10$ έχουμε $y = 5$. Να εκτιμηθεί η τιμή του y όταν $x = 12$, αν η ελαστικότητα του x ως προς y είναι $\varepsilon = -2$

11

Η συνάρτηση $f(x)$ είναι ορισμένη στο θετικό διάστημα $x \geq 0$, και έχει το γράφημα του παραπλεύρως σχήματος.



1. Να βρεθεί γραφικά το σημείο ισοελαστικότητας

2. Να γίνουν στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τα γραφήματα των συναρτήσεων

Οριακής τιμής: $Mf(x) = f'(x)$ **, Μέσης τιμής:** $Af(x) = f(x)/x$

12

Το y είναι συνάρτηση του x με τιμές $\{y_1 = 4, y_2 = 6\}$ όταν $\{x_1 = 2, x_2 = 4\}$.

Να εκτιμηθούν τα παρακάτω:

1. Ο οριακός ρυθμός μεταβολής του y ως προς x: $m = D_x y = \dfrac{dy}{dx}$ **(παράγωγος)**

2. Η ελαστικότητα μεταβολής του y ως προς x: $\varepsilon = E_x y = \dfrac{dy/y}{dx/x}$

3. Ο σχετικός ρυθμός μεταβολής του y ως προς x: $r = R_x y = \dfrac{dy/y}{dx}$

13

Το y είναι συνάρτηση του x με τιμές $\{y_1 = 4, y_2 = 6\}$ όταν $\{x_1 = 2, x_2 = 4\}$.

Να εκτιμηθούν η παράγωγος και η ελαστικότητα του x ως προς y

14

Να υπολογιστούν:

1. Το όριο του $x\ln x$ όταν $x \to 0$, και να γίνει το γράφημα της συνάρτησης: $f(x) = x\ln x$

2. Το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x\ln x dx$.

15.

Να υπολογιστεί το παρακάτω ολοκλήρωμα, σχεδιάζοντας και το γράφημα της συνάρτησης.

$$\int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x-1}} dx$$

16.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \ln(1/x) dx$.

17 Να υπολογιστούν:

1. το όριο $\lim xe^{-2x}$ **όταν** $x \to +\infty$**, και να γίνει το γράφημα της συνάρτησης:** $f(x) = xe^{-2x}$ **για** $x \geq 0$

2. το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} xe^{-2x} dx$.

18

Το y είναι συνάρτηση του x με τιμές $\{y_1 = 6, y_2 = 4\}$ όταν $\{x_1 = 2, x_2 = 4\}$. Αντίστοιχα. Να εκτιμηθούν η παράγωγος και η ελαστικότητα του y ως προς x

19.

Αν τα μεγέθη $\{x, y, z\}$ αυξάνουν ετησίως με ρυθμούς $\{2\%, 1\%, 3\%\}$ αντίστοιχα, να βρεθεί πώς μεταβάλλεται το μέγεθος $w = xy/z$.

20

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_{o}^{\pi/2} \sin(2x - \pi) dx$

21

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

22

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \frac{x}{x+1}dx$

23

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \frac{2x^2+1}{2x-1}$

24

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int x\sin x dx$

25

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \sin 2x \cos x dx$

26

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4+x^2} dx$

27

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int x^2 e^{-x} dx$

Φροντιστήριο.IV(A)-Λύσεις

Παρατήρηση

1. Το σημείο ισοελαστικότητας του x ως προς y είναι ίδιο με το σημείο ισοελαστικότητας του y ως προς x. Στη **θετική περιοχή,** η συνθήκη θα είναι:

$\varepsilon = xy'/y = +1 \Rightarrow y' = y/x$ για αύξουσες

$\varepsilon = xy'/y = -1 \Rightarrow -y' = y/x$ για φθίνουσες,

2. Γενικά, η σχετική μεταβολή μιας μεταβλητής μεγαλώνει καθώς η τιμή της μικραίνει. Ειδικά στα σημεία τομής με τους άξονες βρίσκουμε:

$\{x = 0 \Rightarrow E_x y = 0\} \quad \{y = 0 \Rightarrow E_x y = \infty\}$

Εκτός αν έχουμε απροσδιοριστία, οπότε θα πρέπει να υπολογιστεί.

<u>**1**</u>

Θεωρούμε την εξίσωση: $y = (x+1)^{1/3}$ **, στη θετική περιοχή:** $\{x \geq 0,\ y \geq 0\}$

1. Να γίνει το γράφημά της

2. Να βρεθεί γραφικά και αναλυτικά το σημείο ισοελαστικότητας του x ως προς y (αν υπάρχει)

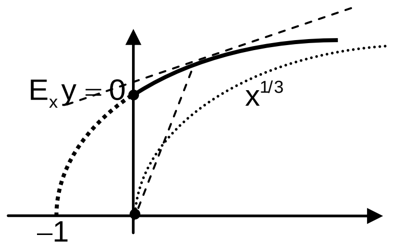
<u>**Λύση**</u>

1. Προκύπτει με οριζόντια μετατόπιση της $x^{1/3}$ κατά -1

2. Είναι αύξουσα, οπότε το σημείο ισοελαστικότητας ικανοποιεί:

$$\varepsilon = 1 \Rightarrow y' = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{1}{3}(x+1)^{-2/3} = (x+1)^{1/3}/x$$

$$\Rightarrow x = 3(x+1) \Rightarrow x = -3/2$$



Δεν έχει σημείο ισοελαστικότητας στη θετική περιοχή.

Παρατήρηση. Η y είναι παντού ανελαστική ως προς x, διότι όπως φαίνεται στο γράφημα η ακτίνα y/x είναι πιο απότομη από την εφαπτομένη, σε κάθε σημείο. Επομένως η x είναι παντού ελαστική ως προς y

<u>**2**</u>

Θεωρούμε την εξίσωση: $y = (x-1)^{1/3}$ **, στη θετική περιοχή:** $\{x \geq 0,\ y \geq 0\}$

1. Να γίνει το γράφημά της

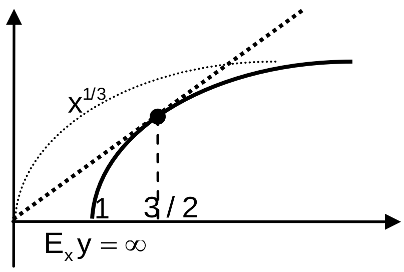
2. Να βρεθεί γραφικά και αναλυτικά το σημείο ισοελαστικότητας του x ως προς y (αν υπάρχει)

<u>**Λύση.**</u>

1. Προκύπτει με οριζόντια μετατόπιση της $x^{1/3}$ κατά $+1$, προς τα δεξιά.

2. Είναι αύξουσα, οπότε η συνθήκη ισοελαστικότητας ικανοποεί:

$$\varepsilon = 1 \Rightarrow y' = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{1}{3}(x-1)^{-2/3} = (x-1)^{1/3}/x \Rightarrow x = 3(x-1) \Rightarrow x = 3/2$$



Είναι το σημείο όπου η ακτίνα συμπίπτει με την εφαπτομένη.

Παρατήρηση. Η y είναι ελαστική ως προς x για $x < 3/2$. Αντίθετα η x είναι ανελαστική ως προς y στο ίδιο διάστημα.

<u>3</u>

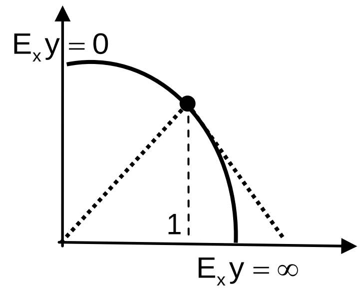
Θεωρούμε την εξίσωση: $x^3+y^3=2$ **, στη θετική περιοχή:** $\{x\geq 0,\ y\geq 0\}$

1. Να γίνει το γράφημά της

2. Να βρεθεί γραφικά και αναλυτικά το σημείο ισοελαστικότητας του x **ως προς** y **(αν υπάρχει)**

Λύση

1. Είναι της γνωστής μορφής: $x^\rho+y^\rho=c$ με $\rho>1$



2. Παραγωγίζοντας πλεγμένα, βρίσκουμε: $3x^2+3y^2y'=0\Rightarrow y'=-x^2/y^2$

Είναι φθίνουσα, οπότε η συνθήκη ισοελαστικότητας γράφεται:

$$\varepsilon=-1\Rightarrow y'=-y/x\Rightarrow -\frac{x^2}{y^2}=-\frac{y}{x}\Rightarrow y^3=x^3\Rightarrow y=x$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση, βρίσκουμε:

$$x^3+y^3=2\Rightarrow 2x^3=2\Rightarrow x=1>0$$

Το σημείο όπου η ακτίνα και η εφαπτομένη έχουν την ίδια κλίση, στο μέτρο.

Παρατήρηση. Η y είναι ανελαστική ως προς x στα μικρά $x<1$**.** Αντίθετα η x είναι ελαστική ως προς y στο ίδιο διάστημα.

<u>4</u>

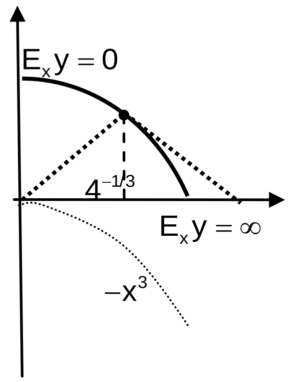
Θεωρούμε την εξίσωση: $y=1-x^3$ **, στη θετική περιοχή:** $\{x\geq 0,\ y\geq 0\}$

1. Να γίνει το γράφημά της

2. Να βρεθεί γραφικά και αναλυτικά το σημείο ισοελαστικότητας του y **ως προς** x **(αν υπάρχει)**

3. Να προσδιοριστεί η περιοχή ανελαστικότητας y **ως προς** x**, είτε γραφικά είτε αναλυτικά.**

<u>**Λύση**</u>.



1. Προκύπτει από την αρνητική της x^3 με ανέβασμα κατά $+1$.

Σε κάθε περίπτωση είναι φθίνουσα κοίλη:

$$y'=-3x^2<0,\ y''=-6x<0$$, στο θετικό διάστημα

2. Η συνθήκη ισοελαστικότητας μας δίνει το σημείο:

$$\varepsilon=-1\Rightarrow y'=-y/x\Rightarrow -3x^2=-\frac{1-x^3}{x}\Rightarrow -3x^3=-1+x^3\Rightarrow 4x^3=1\Rightarrow x=4^{-1/3}$$

3. Έχουμε ανελαστικότητα του y ως προς x στο τμήμα όπου η κλίση της καμπύλης είναι μικρότερη από την κλίση της ακτίνας, στα μικρά x**:** $0\leq x<4^{-1/3}$**.** Πράγματι:

$$|E_x y|=-E_x y=-\frac{xy'}{y}-\frac{x(-3x^2)}{1-x^3}<1\Rightarrow 3x^3<1-x^3\Rightarrow 4x^3<1\Rightarrow x<4^{-1/3}$$

<u>5</u>

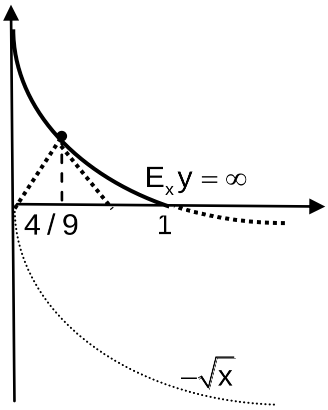
Θεωρούμε την εξίσωση: $y=1-x^{1/2}$ **, στη θετική περιοχή:** $\{x\ge 0,\ y\ge 0\}$

1. Να γίνει το γράφημά της

2. Να βρεθεί γραφικά και αναλυτικά το σημείο ισοελαστικότητας του x **ως προς** y **(αν υπάρχει)**

3. Να προσδιοριστεί το τμήμα της καμπύλης με ανελαστικότητα του x **ως προς** y

Λύση.



1. Προκύπτει από την αρνητική της $x^{1/2}$ με ανέβασμα κατά $+1$.
Σε κάθε περίπτωση είναι φθίνουσα κυρτή:

$$y'=-x^{-1/2}/2<0,\ y''=x^{-3/2}/4>0$$

2. Είναι φθίνουσα, οπότε η συνθήκη ισοελαστικότητας γράφεται:

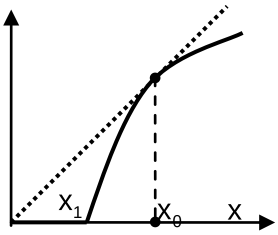
$$\varepsilon=-1\Rightarrow y'=-y/x\Rightarrow -\frac{x^{-1/2}}{2}=-\frac{1-x^{1/2}}{x}\Rightarrow x^{1/2}=2-2x^{1/2}\Rightarrow x=4/9$$

3. Έχουμε ανελαστικότητα του x ως προς y όπου έχουμε ελαστικότητα του y ως προς x, δηλαδή στα μικρά y και μεγάλα x**:** $4/9<x\le 1$**.**

Πράγματι, για αρνητική ελαστικότητα βρίσκουμε:

$$E_x y=\frac{xy'}{y}=\frac{x(-x^{-1/2}/2)}{1-x^{1/2}}=\frac{-x^{1/2}}{2(1-x^{1/2})}<-1\Rightarrow x^{1/2}>2(1-x^{1/2})\Rightarrow 3x^{1/2}>2\Rightarrow x>4/9$$

<u>6</u>



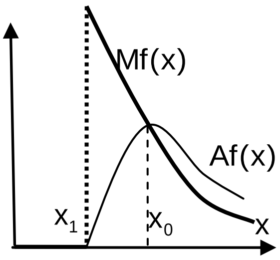
Η συνάρτηση $f(x)$ **είναι ορισμένη στο διάστημα** $x\ge 0$**, και έχει το γράφημα του παραπλεύρως σχήματος.**

1. Να βρεθεί γραφικά το σημείο ισοελαστικότητας

2. Να γίνουν στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τα γραφήματα των συναρτήσεων

Οριακή τιμή: $Mf(x)=f'(x)$**, Μέση τιμή:** $Af(x)=f(x)/x$

<u>Λύση</u>.



1. Το σημείο ισοελαστικότητας είναι στο x_0 όπου η ακτίνα είναι και εφαπτόμενη.
2. Η οριακή τιμή $Mf(x)$ δίνεται από την κλίση της εφαπτομένης. Είναι μηδενική μέχρι το x_1, όπου αυξάνει απότομα εμφανίζοντας ασυνέχεια (η καμπύλη της συνάρτησης έχει γωνία). Μετά είναι συνεχώς φθίνουσα θετική.
3. Η μέση τιμή $Af(x)$ δίνεται από την κλίση της ακτίνας. Είναι μηδενική μέχρι το x_1 . Μετά αρχίζει να αυξάνει συνεχώς, αλλά μένοντας χαμηλότερα από την οριακή τιμή μέχρι το σημείο ισοελαστικότητας όπου συμπίπτουν. Μετά είναι συνεχώς φθίνουσα αλλά μεγαλύτερη από την οριακή τιμή.

Παρατήρηση. Η μέση τιμή αυξάνει όταν η οριακή είναι μεγαλύτερη, και μειώνεται όταν η οριακή είναι μικρότερη, με το μέγιστο της μέσης εκεί όπου συμπίπτει με την οριακή, δηλαδή στο σημείο ισοελαστικότητας .

<u>7</u>

Τα $\{x,y\}$ **συνδέονται μεταξύ τους, όπου η ελαστικότητα του** y **ως προς** x **είναι** $E_x y=-3$**. Αν το** y **ελαττωθεί κατά** 2% **, να εκτιμηθεί πόσο θα μεταβληθούν τα μεγέθη:**

1. x **2.** $u=y/x$

Λύση. Οι εκτιμήσεις των μεταβολών δίνονται από τα διαφορικά.. Έχουμε:

1. $y=y(x)\Rightarrow \%dy=(E_x\,y)(\%dx)\Rightarrow -2=(-3)(\%dx)\Rightarrow \%dx=2/3\approx 0.66\%$, αύξηση

2. $u=y/x\Rightarrow \%du=\%dy-\%dx=-2-(2/3)=-8/3\approx -2.66\%$, μεταβολή λόγου, αύξηση

Εναλλακτικά, μπορούμε να υπολογίσουμε πρώτα την ελαστικότητα του $u=y/x$ ως προς x:

$E_x u=E_x y-E_x x=-3-1=-4$, οπότε έχουμε: $\%du=(E_x\,u)(\%dx)=(-4)(2/3)=-8/3\approx -2.66\%$

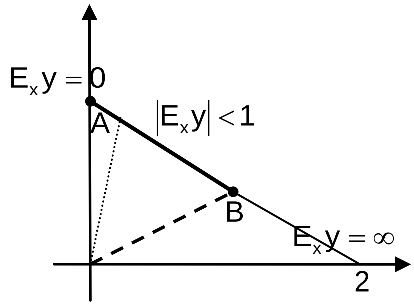
<u>8</u>

Οι θετικές μεταβλητές $\{x \geq 0, y \geq 0\}$ **συνδέονται με την εξίσωση:** $x + 2y = 2$**.**

1. Να βρεθούν τα σημεία ανελαστικότητας του y **ως προς** x**.**

2. Να βρεθούν τα σημεία ελαστικότητας του x **ως προς** y**.**

Λύση. Τα σημεία στο 2 συμπίπτουν με αυτά στο 1, οπότε θα εξετάσουμε μόνο το 1.



Γραφικά. Η ισοελαστικότητα βρίσκεται στο ενδιάμεσο σημείο $B: x = 1$, όπου η κλίση της ακτίνας και της καμπύλης είναι ίσες, σε απόλυτη τιμή. Η ανελαστικότητα βρίσκεται στα μικρά $x: \ 0 \leq x < 1$, όπου η κλίση της ευθείας είναι μικρότερη σε μέτρο από την κλίση της ακτίνας. Ειδικά στην κορυφή A: $x = 0$, είναι μηδενική:

Αναλυτικά. Έχουμε την παρακάτω συνάρτηση στο θετικό τεταρτημόριο, με αρνητική κλίση:

$$x + 2y = 2 \Rightarrow y = (2 - x)/2 \Rightarrow y' = -1/2$$

Η συνθήκη ανελαστικότητας γράφεται:

$$|y'| < |y/x| \Rightarrow -y' < y/x \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{2-x}{2x} \Rightarrow x < 1$$

<u>9</u>

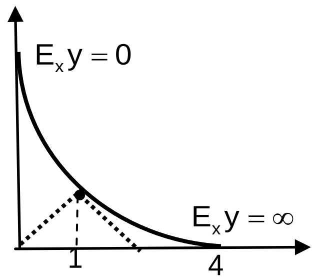
Θεωρούμε την εξίσωση: $x^{1/2} + y^{1/2} = 2$ **, στη θετική περιοχή:** $\{x \geq 0, \ y \geq 0\}$

1. Να γίνει το γράφημά της

2. Να βρεθεί γραφικά και αναλυτικά το σημείο ισοελαστικότητας του y **ως προς** x

Λύση

1. Είναι της γνωστής μορφής: $x^{\rho} + y^{\rho} = c$ με $\rho < 1$



2. Παραγωγίζοντας πλεγμένα ως προς την συνάρτηση $y = y(x)$, βρίσκουμε:

$$x^{-1/2}/2 + y^{-1/2}y'/2 = 0 \Rightarrow y' = -x^{-1/2}/y^{-1/2} = -y^{1/2}/x^{1/2}$$

Η πλεγμένη συνάρτηση είναι φθίνουσα με αρνητική παράγωγο. Η συνθήκη ισοελαστικότητας μας δίνει:

$$\varepsilon = -1 \Rightarrow -y' = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y^{1/2}}{x^{1/2}} = \frac{y}{x} \Rightarrow x^{1/2} = y^{1/2} \Rightarrow y = x$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση, βρίσκουμε το σημείο:

$$x^{1/2} + y^{1/2} = 2 \Rightarrow 2x^{1/2} = 2 \Rightarrow \{x = 1, \ y = 1\}$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να βρούμε πρώτα την συνάρτηση:

$$x^{1/2} + y^{1/2} = 2 \Rightarrow y = (2 - x^{1/2})^2 \Rightarrow y' = 2(2 - x^{1/2})(-x^{-1/2}/2) = -x^{-1/2}(2 - x^{1/2})$$

οπότε η συνθήκη μας δίνει:

$$-y' = y/x \Rightarrow x^{-1/2}(2 - x^{1/2}) = (2 - x^{1/2})^2/x \Rightarrow x^{1/2} = 2 - x^{1/2} \Rightarrow 2x^{1/2} = 2 \Rightarrow x = 1$$

10

Οι μεταβλητές $\{x, y\}$ συνδέονται με μια εξίσωση. Για $x = 10$ έχουμε $y = 5$. Να εκτιμηθεί η τιμή του y όταν $x = 12$, αν η ελαστικότητα του x ως προς y είναι $\varepsilon = -2$

Λύση. Μπορούμε να δουλέψουμε είτε με μεταβολές και παραγώγους, είτε με ποσοστιαίες μεταβολές και ελαστικότητες.

Με ελαστικότητα. Εφόσον έχουμε αρνητική ελαστικότητα, και το x αυξήθηκε, το y θα πρέπει να ελαττωθεί. Το x μεταβλήθηκε κατά:

$$\Delta x = dx = 12 - 10 = 2 \Rightarrow \Delta x / x = 2/10 = 0.2$$, σχετική μεταβολή του x

Οι σχετικές μεταβολές συνδέονται με την ελαστικότητα:

$$\frac{\Delta y}{y} / \frac{\Delta x}{x} \approx E_x y \Rightarrow \frac{\Delta y}{y} \approx E_x y \frac{\Delta x}{x} = (-\frac{1}{2})(0.2) = -0.1 \quad \text{όπου: } E_x y = 1/E_y x = 1/-2 = -1/2$$

Επομένως το y θα μεταβληθεί κατά: $\Delta y \approx (-0.4)y = (-0.1)5 = -0.5$

Και η νέα τιμή του y θα είναι περίπου: $y \approx 5 - 0.5 = 4.5$

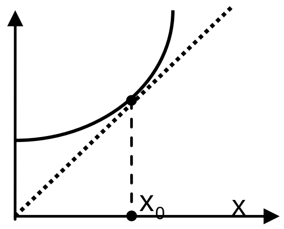
Με παράγωγο. Εκτιμούμε την παράγωγο:

$$E_x y = \frac{y'}{y/x} \Rightarrow y' = (E_x y)\frac{y}{x} = -\frac{1}{2}\frac{5}{10} = -\frac{1}{4} = -0.25, \quad \text{όπου: } E_x y = 1/E_y x = 1/-2 = -1/2$$

Επομένως το y θα μεταβληθεί κατά $\Delta y \approx y'\Delta x = (-0.25)2 = -0.5$

Και η νέα τιμή του y θα είναι περίπου: $y \approx 5 - 0.5 = 4.5$

11

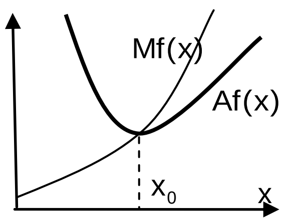


Η συνάρτηση $f(x)$ είναι ορισμένη στο θετικό διάστημα $x \geq 0$, και έχει το γράφημα του παραπλεύρως σχήματος.

1. Να βρεθεί γραφικά το σημείο ισοελαστικότητας

2. Να γίνουν στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τα γραφήματα των συναρτήσεων

Οριακής τιμής: $Mf(x) = f'(x)$, Μέσης τιμής: $Af(x) = f(x)/x$



Λύση

1. Το σημείο ισοελαστικότητας είναι στο x_0 όπου η ακτίνα συμπίπτει με την εφαπτόμενη.

2. Η οριακή τιμή $Mf(x)$ δίνεται από την κλίση της εφαπτομένης. Αρχίζει από τιμή περίπου μηδενική ή λίγο θετική, και αυξάνει συνεχώς.

Η μέση τιμή $Af(x)$ δίνεται από την κλίση της ακτίνας. Αρχικά είναι άπειρη και φθίνει συνεχώς μέχρι το x_0 όπου συμπίπτει με την οριακή τιμή. Μετά είναι αύξουσα αλλά μικρότερη από την οριακή.

Παρατήρηση. Η μέση τιμή μικραίνει όταν η οριακή τιμή είναι μικρότερη, και μεγαλώνει όταν η οριακή τιμή είναι μεγαλύτερη, με ελάχιστο στο σημείο ισοελαστικότητας όπου συμπίπτουν.

<u>12</u>

Το y **είναι συνάρτηση του** x **με τιμές** $\{y_1 = 4, y_2 = 6\}$ **όταν** $\{x_1 = 2, x_2 = 4\}$**.**

Να εκτιμηθούν τα παρακάτω:

1. Ο οριακός ρυθμός μεταβολής του y **ως προς** x**:** $m = D_x y = \dfrac{dy}{dx}$ **(παράγωγος)**

2. Η ελαστικότητα μεταβολής του y **ως προς** x**:** $\varepsilon = E_x y = \dfrac{dy/y}{dx/x}$

3. Ο σχετικός ρυθμός μεταβολής του y **ως προς** x**:** $r = R_x y = \dfrac{dy/y}{dx}$

Λύση. Έχουμε: $\Delta x = x_2 - x_1 = 4 - 2 = 2,\ \Delta y = y_2 - y_1 = 6 - 4 = 2$

1. $m \approx \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2}{2} = 1$

2. $\varepsilon \approx \dfrac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \dfrac{\Delta y / y_1}{\Delta x / x_1} = \dfrac{x_1 \Delta y}{y_1 \Delta x} = \dfrac{2 \cdot 2}{4 \cdot 2} = 0.5$ ή $\varepsilon \approx \dfrac{\Delta \ln y}{\Delta \ln x} = \dfrac{\ln y_2 - \ln_1 y_1}{\ln x_2 - \ln x_1} = \dfrac{\ln(y_2 / y_1)}{\ln(x_2 / x_1)} = \dfrac{\ln 3/2}{\ln 2} = \dfrac{\ln 3}{\ln 2} - 1$

3. $r \approx \dfrac{\Delta y / y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{y_1 \Delta x} = \dfrac{2}{4 \cdot 2} = \dfrac{1}{4} = 0.25$ ή $r \approx \dfrac{\ln y_2 - \ln_1 y_1}{(x_2 - x_1)} = \dfrac{\ln(y_2 / y_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{\ln 3/2}{2}$

(Ως αρχικές τιμές, αντί των $\{x_1, y_1\}$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα ενδιάμεσα $(x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2$ })

<u>13</u>

Το y **είναι συνάρτηση του** x **με τιμές** $\{y_1 = 4, y_2 = 6\}$ **όταν** $\{x_1 = 2, x_2 = 4\}$**.**

Να εκτιμηθούν η παράγωγος και η ελαστικότητα του x **ως προς** y

<u>Λύση.</u> (test IV, ασκ.12)

Έχουμε: $\Delta x = x_2 - x_1 = 4 - 2 = 2,\ \Delta y = y_2 - y_1 = 6 - 4 = 2$

1. παράγωγος: $m \approx \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{2}{2} = 1$

2. ελαστικότητα: $\varepsilon \approx \dfrac{\Delta x / x}{\Delta y / y} = \dfrac{(x_2 - x_1)/x_1}{(y_2 - y_1)/y_1} = \dfrac{y_1(x_2 - x_1)}{x_1(y_2 - y_1)} = \dfrac{4 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 2$

εναλλακτικά: $\varepsilon \approx \dfrac{\ln x_2 - \ln x_1}{\ln y_2 - \ln y_1} = \dfrac{\ln 4 - \ln 2}{\ln 6 - \ln 4} = \dfrac{\ln 2}{\ln 3/2}$

<u>14</u>

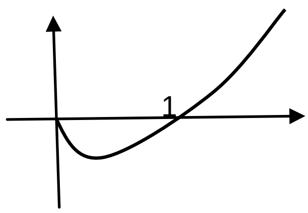
Να υπολογιστούν:

1. Το όριο του $x \ln x$ **όταν** $x \to 0$**, και να γίνει το γράφημα της συνάρτησης:** $f(x) = x \ln x$

2. Το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x \ln x\, dx$**.**

Λύση

1. Έχουμε: $x \ln x \to 0 \cdot (-\infty)$**,** απροσδιόριστη μορφή. Η δύναμη υπερισχύει του λογαρίθμου, οπότε το όριο θα είναι 0. Πράγματι με τον κανόνα L'Hopital βρίσκουμε:



$$x \ln x = \frac{\ln x}{1/x} \to \frac{\infty}{\infty} \sim \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \frac{1/x}{-1/x^2} = -x \to 0$$

Η συνάρτηση έχει μηδενική τιμή στα σημεία $\{0,1\}$, αρνητικές ενδιάμεσα, και αύξουσα θετική για $x \geq 1$

2. Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες: $\left.\begin{matrix} f'(x) = x \\ g(x) = \ln x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(x) = x^2/2 \\ g'(x) = 1/x \end{matrix}\right\}$

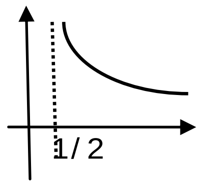
$$\int_0^1 x \ln x\, dx = x^2(\ln x)/2\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x}\frac{x^2}{2} dx = 0 - \frac{x^2}{4}\Big|_0^1 = -1/4$$

διότι: $x^2 \ln x = x(x \ln x) \to 0 \cdot 0 = 0$ όταν $x \to 0$

<u>15</u>.

Να υπολογιστεί το παρακάτω ολοκλήρωμα, σχεδιάζοντας και το γράφημα της συνάρτησης.

$$\int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx$$



<u>Λύση</u> $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{x-1/2}}$,

υπερβολική μετατοπισμένη κατά 1/2 προς τα δεξιά.

Ολοκληρώνουμε απευθείας βρίσκοντας την παράγουσα

$$\int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx = \int_{1/2}^{+\infty}(2x-1)^{-1/2}dx = \frac{1}{1/2}(2x-1)^{1/2}\frac{1}{2}\Big|_{1/2}^{+\infty} \to +\infty$$

Εναλλακτικά μπορούμε να κάνουμε αντικατάσταση: $\{v = 2x-1,\ dv = 2dx\}$, οπότε αντικαθιστώντας και τα νέα όρια $x:\{1/2,\ +\infty\} \Rightarrow v:\{0,\ +\infty\}$, βρίσκουμε :

$$\int_{v=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{v}}\frac{1}{2}dv = \frac{1}{2}\int_{v=0}^{+\infty} v^{-1/2}dx = \frac{1}{2}\frac{1}{1/2}v^{1/2}\Big|_{0}^{+\infty} \to +\infty$$

Το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.

<u>16</u>.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \ln(1/x)dx$**.**

<u>Λύση</u> $\ln(1/x) = -\ln x$.

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη βρίσκουμε:

$$\left.\begin{matrix} f' = 1 \\ g = \ln x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f = x \\ g' = 1/x \end{matrix}\right\}$$

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int 1dx = x\ln x - x \Rightarrow -\int_0^1 \ln x = (x - x\ln x)\Big|_0^1 = 1-(-0\ln 0) = 1$$

διότι ο κανόνας L' Hopital μας δίνει:

$$x\ln x = \frac{\ln x}{1/x} \to \frac{-\infty}{\infty} \sim \frac{1/x}{-1/x^2} = x \to 0 \text{ όταν } x \to 0$$

<u>17</u> Να υπολογιστούν:

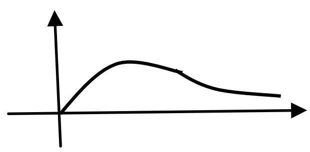
1. το όριο $\lim xe^{-2x}$ **όταν** $x \to +\infty$**, και να γίνει το γράφημα της συνάρτησης:** $f(x) = xe^{-2x}$ **για** $x \geq 0$

2. το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} xe^{-2x}dx$**.**

<u>Λύση.</u> $xe^{-2x} = \frac{x}{e^{2x}} \to 0$ όταν $x \to +\infty$, διότι υπερισχύει το άπειρο του εκθετικού.

Εξάλλου με τον κανόνα L'Hopital, βρίσκουμε: $\frac{x}{e^{2x}} \to \frac{\infty}{\infty} \sim \frac{(x)'}{(e^{2x})'} = \frac{1}{2e^{2x}} \to \frac{1}{\infty} = 0$

Η συνάρτηση έχει θετικές τιμές, και μηδενίζεται στα $\{0,+\infty\}$



2. Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες: $\left.\begin{matrix} f'(x) = e^{-2x} \\ g(x) = x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(x) = -e^{-2x}/2 \\ g'(x) = 1 \end{matrix}\right\}$

$$\int_0^{\infty} xe^{-2x}dx = -x\frac{e^{-2x}}{2}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\frac{e^{-2x}}{2}dx \quad = 0 - \frac{e^{-rx}}{4}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{4}$$

18

Το y **είναι συνάρτηση του** x **με τιμές** $\{y_1 = 6, y_2 = 4\}$ **όταν** $\{x_1 = 2, x_2 = 4\}$**. Αντίστοιχα. Να εκτιμηθούν η παράγωγος και η ελαστικότητα του** y **ως προς** x

Λύση. Με **αρχικές** τιμές (x_1, y_1) και μεταβολές: $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ βρίσκουμε:

παράγωγος: $m \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-6}{4-2} = \frac{-2}{2} = -1$

ελαστικότητα: $\varepsilon \approx \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{(y_2 - y_1)/y_1}{(x_2 - x_1)/x_1} = \frac{(y_2 - y_1)x_1}{(x_2 - x_1)y_1} = \frac{(4-6)2}{(4-2)6} = \frac{(-2)\cdot 2}{2\cdot 6} = -\frac{1}{3} = -0.33$

Εναλλακτικά έχουμε και τις παρακάτω εκτιμήσεις:

1. Θεωρώντας ως αρχικές τιμές τις ενδιάμεσες:

$$\bar{x} = (x_1 + x_2)/2 = (2+4)/2 = 3,\ \bar{y} = (y_1 + y_2)/2 = (6+4)/2 = 5$$

$$\varepsilon \approx \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{(y_2 - y_1)/\bar{y}}{(x_2 - x_1)/\bar{x}} = \frac{(y_2 - y_1)\bar{x}}{(x_2 - x_1)\bar{y}} = \frac{(4-6)3}{(4-2)5} = \frac{(-2)\cdot 3}{2\cdot 5} = -\frac{3}{5} = -0.6$$

2. Χρησιμοποιώντας την λογαριθμική κλίμακα:

$$\varepsilon \approx \frac{\Delta \ln y}{\Delta \ln x} = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{\ln x_2 - \ln x_1} = \frac{\ln 4 - \ln 6}{\ln 4 - \ln 2} = \frac{\ln(2/3)}{\ln 2} = 1 - \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx -0.585$$

19.

Αν τα μεγέθη $\{x, y, z\}$ **αυξάνουν ετησίως με ρυθμούς** $\{2\%, 1\%, 3\%\}$ **αντίστοιχα, να βρεθεί πώς μεταβάλλεται το μέγεθος** $w = xy/z$**.**

Λύση. Οι ποσοστιαίοι ρυθμοί προστίθενται στον πολλαπλασιασμό και αφαιρούνται στη διαίρεση. Επομένως:

$$\%r_w = \%r_x + \%r_y - \%r_z = 2 + 1 - 3 = 0$$

Το w δεν μεταβάλλεται.

20

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2x - \pi)dx$$

Λύση.,

Λύση 1. Βρίσκουμε απευθείας την παράγουσα:

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2x - \pi)dx = -\cos(2x - \pi)/2\Big|_0^{\pi/2} = -[\cos(0) - \cos(-\pi)]/2 = -[1 - (-1)] = -1$$

Λύση 2. Κάνουμε την παρακάτω αλλαγή μεταβλητής, βρίσκοντας και τα νέα όρια:

$$t = 2x - \pi \Rightarrow x = \frac{1}{2}t + \frac{\pi}{2},\quad x'(t) = \frac{1}{2},\quad x: \{0, \pi/2\} \to t: \{-\pi, 0\}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2x - \pi)dx = \int_{-\pi}^0 \sin t/2dt = -\cos t/2\Big|_{-\pi}^0 = -[\cos 0 - \cos(-\pi)]/2 = -[1 - (-1)]/2 = -1$$

Λύση3. Θα ,μπορούσαμε και να απλοποιήσουμε την συνάρτηση χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$$\sin(2x - \pi) = \sin 2x \cos \pi - \sin \pi \cos 2x = -\sin 2x$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2x - \pi)dx = \int_0^{\pi/2} -\sin 2xdt = \cos 2x/2\Big|_0^{\pi/2} = [\cos \pi - \cos(0)]/2 = -1$$

▲

21

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$$

Λύση. Κάνουμε την αντικατάσταση: $v = x+1 \Rightarrow x = v-1,\ x'(v) = 1$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \int \frac{v-1}{\sqrt{v}}dv = \int \left(\sqrt{v} - \frac{1}{\sqrt{v}}\right)dv = \int v^{1/2}dv - \int v^{-1/2}dv$$

$$= \frac{1}{3/2}v^{3/2} - \frac{1}{1/2}v^{1/2} = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - 2(x+1)^{1/2} = \frac{2}{3}(x+1)^{1/2}\,(x-2)$$

▲

22

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x}{x+1}dx$$

Λύση

Λύση 1. Κάνουμε πρώτα την διαίρεση, και μετά ολοκληρώνουμε:

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} \Rightarrow \int \frac{x}{x+1}dx = \int 1dx - \int \frac{dx}{x+1} = x - \ln|x+1|$$

Λύση 2. Κάνουμε την αντικατάσταση: $v = x+1 \Rightarrow x = v-1$

$$\int \frac{x}{x+1}dx = \int \frac{v-1}{v}dv = \int 1dv - \int \frac{1}{v}dv = v - \ln|v| = x+1-\ln|x+1|$$

Ως παράγουσες της ίδιας συνάρτησης μπορούν να διαφέρουν μεταξύ τους κατά μια σταθερά.

▲

23

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{2x^2+1}{2x-1}$$

Λύση 1. Κάνουμε πρώτα την διαίρεση και μετά ολοκληρώνουμε:

$$\frac{2x^2+1}{2x-1} = x + \frac{1}{2} + \frac{3/2}{2x-1}$$

$$\int \frac{2x^2+1}{2x-1} = \int \left(x + \frac{1}{2}\right)dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{2x-1}dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\ln|2x-1|$$

Λύση 2. Κάνουμε την αντικατάσταση: $v = 2x-1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(v+1)$

$$\int \frac{2x^2+1}{2x-1}dx = \int \frac{2(v+1)^2/4+1}{v}\frac{1}{2}dv = \frac{1}{4}\int \frac{(v+1)^2+2}{v}dv$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{v^2+2v+3}{v}dv = \frac{1}{4}\int vdv + \frac{1}{2}\int dv + \frac{3}{4}\int \frac{1}{v}dv$$

$$= \frac{1}{8}v^2 + \frac{1}{2}v + \frac{3}{4}\ln|v| = \frac{1}{8}(2x-1)^2 + \frac{1}{2}(2x-1) + \frac{3}{4}\ln|2x-1|$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8} + \frac{3}{4}\ln|2x-1|$$

Τα δύο ολοκληρώματα που βρήκαμε διαφέρουν κατά μία σταθερά.

▲

24

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int x\sin x dx$

Λύση. Με ολοκλήρωση κατά μέρη: $\{f'=\sin x,\ g=x\}\Rightarrow\{f=-\cos x,\ g'=1\}$

Αντικαθιστούμε στον τύπο, και βρίσκουμε:

$$\int x\sin x dx=(-\cos x)(x)-\int(-\cos x)(1)dx=-x\cos x+\sin x$$

▲

25

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \sin 2x\cos x dx$

Λύση. Αντικαθιστούμε από την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin 2x\cos x=\frac{1}{2}\sin(2x-x)+\frac{1}{2}\sin(2x+x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\sin 3x$$

Βρίσκουμε:

$$\int \sin 2x\cos x dx=\frac{1}{2}\int\sin x dx-\frac{1}{2}\int\sin 3x dx=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{6}\cos 3x$$

▲

26

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4+x^2}dx$

Λύση

Λύση 1. Βρίσκουμε πρώτα την παράγουσα

$$\int\frac{1}{4+x^2}dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+(x/2)^2}dx=\frac{2}{4}\int\frac{1/2}{1+(x/2)^2}dx=\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τα όρια:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4+x^2}dx=\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

Λύση 2. Μπορούμε πρώτα να εφαρμόσουμε την αλλαγή μεταβλητής:

$$x=2u\Rightarrow dx=2du$$

με τα ίδια άπειρα όρια, οπότε βρίσκουμε πάλι:

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{u=-\infty}^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{2}\arctan u\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

▲

27

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int x^2e^{-x}dx$$

Λύση. Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες: $\{f'=e^{-x},g=x^2\}\Rightarrow\{f=-e^{-x},g'=2x\}$

$$\int x^2e^{-x}dx=\int e^{-x}x^2dx \text{ με } \{f'=e^{-x},g=x^2\}\Rightarrow\{f=-e^{-x},g'=2x\}$$

$$=-e^{-x}x^2-\int(-e^{-x})2xdx=-x^2e^{-x}+2\int e^{-x}xdx$$

Θα κάνουμε πάλι ολοκλήρωση κατά παράγοντες για το ολοκλήρωμα : $\int e^{-x}xdx$

$$\{f'=e^{-x},g=x\}\Rightarrow\{f=-e^{-x},g'=1\}$$

$$\int e^{-x}xdx=-e^{-x}x-\int_0^1(-e^{-x})1dx=-xe^{-x}-e^{-x}$$

Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε τελικά:

$$\int x^2e^{-x}dx=-x^2e^{-x}+2(-xe^{-x}-e^{-x})=-e^{-x}(x^2+2x+2)$$

▲