Ef.III.7 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

1. Εισοδηματικός περιορισμός

Υποθέτοντας ανταγωνιστικές συνθήκες στην αγορά αγαθών με την έννοια ότι οι μοναδιαίες τιμές τους είναι εξωγενώς καθορισμένες και δεν επηρεάζονται από την ζήτηση, το κόστος κατανάλωσης δύο αγαθών σε ποσότητες $\{X, Y\}$ με μοναδιαίες τιμές $\{v, w\}$, θα είναι:

$$C = vX + wY$$

Αν το διαθέσιμο εισόδημα προς κατανάλωση είναι c, τότε οι *επιτρεπτοί* συνδυασμοί κατανάλωσης είναι αυτοί που ικανοποιούν την ανισότητα:

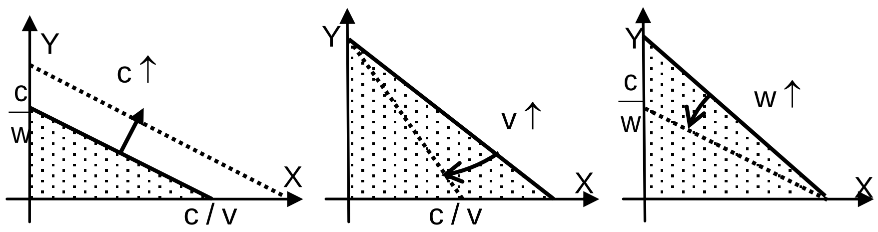
$$C = vX + wY \le c \quad \text{με} \quad X \ge 0,\ Y \ge 0$$

Σχηματίζουν την **περιοχή κατανάλωσης.** Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα τα αντίστοιχα σημεία ορίζουν μια τριγωνική περιοχή του επιπέδου που είναι η κάτω σταθμική της αντίστοιχης ευθείας ισοκόστους (isocost), η οποία αποτελεί και τον **εισοδηματικό περιορισμό** (budget constraint):

$$C = vX + wY = c \Rightarrow Y = -\frac{v}{w}X + \frac{c}{w} \Rightarrow \frac{dY}{dX} = -\frac{v}{w}$$

Ο ρυθμός υποκατάστασης μεταξύ των αγαθών με *διατήρηση του κόστους* είναι σταθερός ίσος με την κλίση των ευθειών ισοκόστους. Όσο πιο ακριβό είναι ένα αγαθό τόσο μεγαλύτερος ο ρυθμός υποκατάστασης που ορίζει, δηλαδή τόσο μεγαλύτερη μείωση της συμμετοχής του άλλου αγαθού συνεπάγεται κάθε αύξησή της συμμετοχής του :

$$C = vX + wY = c$$
$$\Rightarrow dC = vdX + wdY = 0$$
$$\Rightarrow \frac{dY}{dX} = -\frac{v}{w}$$



εισοδηματικός περιορισμός: $C = vX + wY \le c$

Παρατήρηση. Η περιοχή κατανάλωσης έχει τις παρακάτω ιδιότητες:
1. Όταν **αυξάνει το εισόδημα** c η ευθεία ισοκόστους μετατοπίζεται παράλληλα στον εαυτό της προς τα έξω. Η περιοχή κατανάλωσης **μεγαλώνει** όπως στο πρώτο γράφημα παραπάνω.
2. Όταν **αυξάνει η τιμή** v **του αγαθού** X στον οριζόντιο άξονα, τότε η κλίση της μεγαλώνει καθώς περιστρέφεται περί το σημείο τομής με τον κατακόρυφο άξονα. Η περιοχή κατανάλωσης **μικραίνει** όπως στο δεύτερο γράφημα, μειώνοντας την συμμετοχή του X -αγαθού.
3. Όταν **αυξάνει η τιμή** w **του αγαθού** Y στον κατακόρυφο άξονα, τότε η κλίση της μικραίνει καθώς περιστρέφεται περί το σημείο τομής με τον οριζόντιο άξονα. Η περιοχή κατανάλωσης **μικραίνει** όπως στο τρίτο γράφημα, μειώνοντας την συμμετοχή του Y – αγαθού.

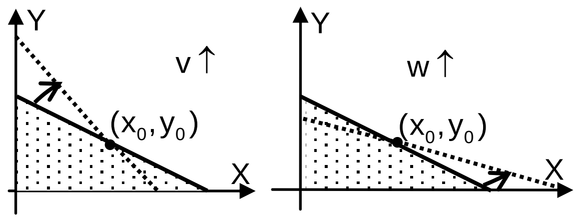
▲

Παρατήρηση. Παραπάνω εξετάσαμε εισοδηματικούς περιορισμούς της μορφής:

$$vx + wy = c$$

όπου οι τρεις παράμετροι $\{v, w, c\}$ είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Σε πολλές περιπτώσεις το εισόδημα είναι σε μορφή κατοχής ποσότητας του ενός η αμφοτέρων των αγαθών οπότε εξαρτάται από τις τιμές τους. Έτσι αν υποθέσουμε ότι ο καταναλωτής κατέχει **αρχικό πλούτο** (initial endowment) στη μορφή ποσότητας αγαθών (x_0, y_0) τις οποίες μπορεί να διαθέσει στις τρέχουσες τιμές, τότε ο εισοδηματικός περιορισμός γράφεται:

$$vx + wy = vx_0 + wy_0$$



Είναι μια ευθεία που διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0). Καθώς οι τιμές μεταβάλλονται ο εισοδηματικός περιορισμός περιστρέφεται όπως και προηγουμένως αλλά τώρα γύρω από αυτό το σταθερό σημείο Γίνεται πιο κατακόρυφος όταν αυξάνει το v όπως στο πρώτο γράφημα, και πιο οριζόντιος όταν αυξάνει το w όπως στο δεύτερο γράφημα. Σαυτά τα προβλήματα κατανάλωσης με αρχικές ποσότητες κατοχής, διακρίνουμε τα εξής:

- **συνολική ζήτηση** (total demand) που είναι οι τελικές ποσότητες: (x, y)
- **καθαρή ζήτηση** (net demand) που είναι η διαφορά τους από τις αρχικές ποσότητες: $(x - x_0, y - y_0)$.

Αν η καθαρή ζήτηση είναι θετική έχουμε αγορά, ενώ αν είναι αρνητική έχουμε πώληση. Επίσης: *η συμπεριφορά της ζήτησης ως προς μεταβολές στις τιμές είναι τώρα πιο πολύπλοκη, διότι μια αύξηση στην τιμή ενός προιόντος και το κάνει πιο ακριβό αλλά και αυξάνει τον διαθέσιμο πλούτο.*

▲

2. Μεγιστοποίηση χρησιμότητας

Θεωρούμε δύο αγαθά $\{X, Y\}$ με μοναδιαίες τιμές $\{v, w\}$ και υποθέτουμε ότι η κατανάλωσή τους αποφέρει χρησιμότητα $U = U(X, Y)$ με δαπάνη $C = vX + wY$. Το βασικό πρόβλημα βελτιστοποίησης στην κατανάλωση αφορά την μεγιστοποίηση της χρησιμότητας με περιορισμό στη δαπάνη:

$$\max_{\{X,Y\}}\{U = U(X, Y) \,\|\, C = vX + wY \le c\}$$

Υποθέτοντας την συνάρτηση χρησιμότητας γνήσια αύξουσα *στην περιοχή δαπάνης που εξετάζουμε*, η βέλτιστη κατανάλωση θα εξαντλήσει τον εισοδηματικό περιορισμό του κόστους και έτσι θα βρούμε την ίδια λύση αν στον περιορισμό αντικαταστήσουμε την ανισότητα με ισότητα:

$$\max_{\{X,Y\}}\{U = U(X, Y) \,\|\, C = vX + wY = c\}$$

Η λύση του προβλήματος βρίσκεται *στο σημείο του εισοδηματικού περιορισμού που συναντάει την καμπύλη αδιαφορίας με την υψηλότερη χρησιμότητα.* Υποθέτοντας ότι η λύση είναι **εσωτερική,** δηλαδή καταναλώνονται αμφότερα τα αγαθά όπως στο πρώτο γράφημα του παρακάτω σχήματος, θα είναι περιορισμένη στάσιμη:

$$\left.\begin{aligned} \frac{U_X}{U_Y} &= \frac{C_X}{C_Y} \\ C &= c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{U_X}{U_Y} &= \frac{v}{w} \\ vX + wY &= c \end{aligned}\right\} \text{ ή } \left.\begin{aligned} \frac{U_X}{v} &= \frac{U_Y}{w} \\ vX + wY &= c \end{aligned}\right\}$$

Δηλαδή, *για μέγιστη χρησιμότητα διατηρώντας σταθερή την δαπάνη, έχουμε υποκατάσταση μεταξύ των δύο αγαθών μετακινούμενοι πάνω στην ευθεία ισοκόστους του εισοδηματικού περιορισμού, μέχρις ότου ικανοποιηθεί μια από τις παρακάτω **ισοδύναμες** συνθήκες:*

1. Ο ρυθμός υποκατάστασης στην χρησιμότητα είναι ίσος με τον ρυθμό υποκατάστασης στο κόστος, γραφικά μια καμπύλη αδιαφορίας εφάπτεται της ευθείας ισοκόστους του εισοδηματικού περιορισμού

2. Οι <u>οριακές χρησιμότητες ανά μονάδα δαπάνης</u> για τα δύο αγαθά είναι ίσες, και ως γνωστόν δίνουν τον πολλαπλασιαστή Lagrange της λύσης.

Γενικά θα παριστάνουμε την μεταβλητές με κεφαλαία γράμματα, την λύση και τις παραμέτρους με μικρά.

Απόδειξη. Η παραπάνω εξίσωση είναι η γνωστή συνθήκη περιορισμένης στασιμότητας. Αλλά μπορούμε να την ερμηνεύσουμε και απευθείας, χρησιμοποιώντας την έννοια της υποκατάστασης. Αν κάνουμε υποκατάσταση μεταβάλλοντας την συμμετοχή των αγαθών κατά $\{dX, dY\}$ διατηρώντας το κόστος σταθερό: $dC = 0$, τότε η μεταβολή της χρησιμότητας θα είναι:

$$dU = U_X dX + U_Y dY \quad \text{όπου} \quad dC = C_X dX + C_Y dY = vdX + wdY = 0 \Rightarrow dY = -\frac{v}{w}dX, \text{ υποκατάσταση}$$

Αντικαθιστώντας το dY από την δεύτερη στην πρώτη βρίσκουμε:

$$dU = U_X dX + U_Y\left(-\frac{v}{w}\right)dX = v\left(\frac{U_X}{v} - \frac{U_Y}{w}\right)dX$$

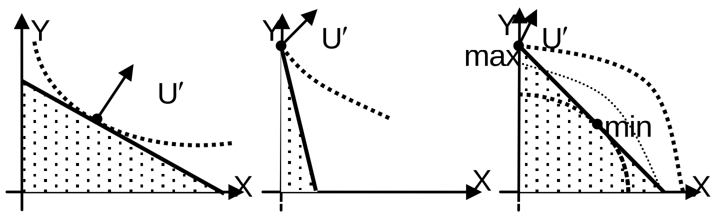
Αν ο όρος στην παρένθεση δεν είναι μηδενικός αλλά είναι π.χ. γνήσια αρνητικός οπότε το πρώτο αγαθό είναι **λιγότερο χρήσιμο ανά μονάδα δαπάνης,** τότε ελαττώνοντας την συμμετοχή του: $dX < 0$, μπορούμε να πετύχουμε μεγαλύτερη χρησιμότητα: $dU > 0$. Το αντίθετο αν είναι θετικός.

▲

Παρατήρηση. Γενικά στην βέλτιστη κατανάλωση η λύση είναι εσωτερική όπου καταναλώνονται αμφότερα τα αγαθά όπως στο πρώτο γράφημα παρακάτω, και ισχύει η συνθήκη περιορισμένης στασιμότητας. Σε ειδικές περιπτώσεις η λύση θα είναι συνοριακή.

Π.χ.

1. Όταν οι μοναδιαίες τιμές είναι ακραίες, όπως στο δεύτερο γράφημα όπου το πρώτο αγαθό X είναι πολύ ακριβότερο και δεν καταναλώνεται.



εσωτερική και συνοριακή κατανάλωση

2. Όταν η συνάρτηση χρησιμότητας *δεν είναι κανονική*, όπως στο τρίτο γράφημα. Το τελευταίο συμβαίνει όταν **δύο αγαθά είναι ασύμβατα** και δεν συνδυάζονται οπότε υπάρχει προτίμηση για ακραίους συνδυασμούς, ειδικότερα υπάρχει προτίμηση για κατανάλωση μόνο του ενός αγαθού, καθώς οι ενδιάμεσοι συνδυασμοί συμμετοχής των αγαθών στην κατανάλωση έχουν μικρότερη χρησιμότητα. Δηλαδή **η συνάρτηση χρησιμότητας έχει τις κάτω σταθμικές κυρτές αντί των πάνω,** *είναι οιονεί κυρτή αντί να είναι οιονεί κοίλη.* Τώρα η στάσιμη λύση Lagrange δίνει ελάχιστη χρησιμότητα όπως στο τρίτο γράφημα και το μέγιστο βρίσκεται στο σύνορο, με κατανάλωση μόνο του ενός αγαθού, εδώ του Y.

▲

3. Κανονική ζήτηση κατά Marshall

Θεωρούμε το γενικό πρόβλημα μεγιστοποίησης της χρησιμότητας με εισοδηματικό περιορισμό:

$$\max_{\{X,Y\}}\{U = U(X,Y) \,||\, C = vX + wY = c\} \quad \text{με παραμέτρους } \{v, w, c\}$$

Λύνοντας το πρόβλημα, π.χ. με αντικατάσταση από τον περιορισμό ή με τις εξισώσεις Lagrange, ή και γραφικά, βρίσκουμε τις βέλτιστες ποσότητες κατανάλωσης ως συναρτήσεις των παραμέτρων:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(v,w,c) \\ y &= y(v,w,c) \end{aligned}\right\} \quad \textbf{κανονικές συναρτήσεις ζήτησης (κατά Marshall)}$$

Είναι οι συναρτήσεις ζήτησης των δύο αγαθών εκφρασμένες μέσω των τιμών τους και του διαθέσιμου εισοδήματος. Παρατηρούμε ότι **εξαρτώνται μόνο από τους λόγους:** $\{v/c, w/c\}$. **Λέμε ότι δεν υπάρχει ψευδαίσθηση χρήματος.** Πράγματι, ο περιορισμός μπορεί να γραφτεί στην παρακάτω ισοδύναμη μορφή όπου εμφανίζονται μόνο οι παραπάνω λόγοι:

$$vX + wY = c \Leftrightarrow (v/c)X + (w/c)Y = 1$$

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη βέλτιστη κατανάλωση για τους παρακάτω τρεις χαρακτηριστικούς τύπους συνάρτησης χρησιμότητας, όπου οι συντελεστές $\{\alpha, \beta\}$ είναι γνήσια θετικοί:

1. $U = \alpha X + \beta Y$**, γραμμική**

2. $U = \min\{X/\alpha, Y/\beta\} = \begin{cases} X/\alpha & \text{αν } X/\alpha \le Y/\beta \\ Y/\beta & \text{αν } X/\alpha \ge Y/\beta \end{cases}$**, Leontief-min**

3. $U = \ln X^{\alpha}Y^{\beta} = \alpha \ln X + \beta \ln Y$**, λογαριθμική Cobb-Douglas (C-D)**

Παρατήρηση. Υπενθυμίζουμε ότι θα βρούμε τις ίδιες λύσεις (X,Y) αν αντί των παραπάνω χρησιμοποιήσουμε **διατακτικά ισοδύναμες** συναρτήσεις, δηλαδή γνήσια αύξοντες μετασχηματισμούς τους. Π.χ. αντί της παραπάνω λογαριθμικής C-D, τις συναρτήσεις:

$$s \ln X^{\alpha}Y^{\beta},\ X^{\alpha}Y^{\beta},\ (X^{\alpha}Y^{\beta})^{s} = X^{s\alpha}Y^{s\beta} \quad \text{με} \quad s > 0$$

Αυτό μας επιτρέπει να υποθέσουμε ότι στην λογαριθμική C-D οι συντελεστές $\{\alpha,\beta\}$ ικανοποιούν:

$$\alpha + \beta = 1,$$

διότι σε κάθε περίπτωση μπορούμε να την πολλαπλασιάσουμε με $s = 1/(\alpha+\beta)$. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε τους δύο συντελεστές ως **βάρη** όσον αφορά την προτίμηση στα δύο αγαθά.

▲

4. Γραμμική χρησιμότητα: $U = \alpha X + \beta Y$

Χαρακτηρίζεται από σταθερό ρυθμό υποκατάστασης μεταξύ των αγαθών στη χρησιμότητα:

$$U = \alpha X + \beta Y = u \Rightarrow dU = \alpha dX + \beta dY = 0 \Rightarrow \frac{dY}{dX} = -\frac{\alpha}{\beta}$$

όπου $\{\alpha, \beta\}$ είναι οι **οριακές χρησιμότητες** των $\{X, Y\}$ – αγαθών αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι::

- 1 *μονάδα του* X *– αγαθού υποκαθιστά* α/β *μονάδες του* Y *– αγαθού, με την ίδια χρησιμότητα* α
- β *μονάδες του* X *– αγαθού υποκαθιστούν* α *μονάδες του* Y *– αγαθού, με την ίδια χρησιμότητα* $\alpha\beta$

Λέμε ότι τα δύο αγαθά είναι **τέλεια υποκατάστατα** (perfect substitutes) στην κατανάλωση, με αποτέλεσμα να καταναλώνουμε **μόνο το ένα**, αυτό που είναι «σχετικά» φτηνότερο. Όπως φαίνεται και στα παρακάτω γραφήματα, *με γραμμική χρησιμότητα η λύση θα είναι συνοριακή*, οπότε δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις Lagrange. Μπορούμε να βρούμε τη λύση απευθείας αντικαθιστώντας από τον περιορισμό:

$$C = vX + wY = c$$

Εναλλακτικά μπορούμε να βρούμε την λύση είτε γραφικά, είτε ως την κορυφή με την μεγαλύτερη χρησιμότητα. Υπολογίζουμε πρώτα την χρησιμότητα στις δύο κορυφές:

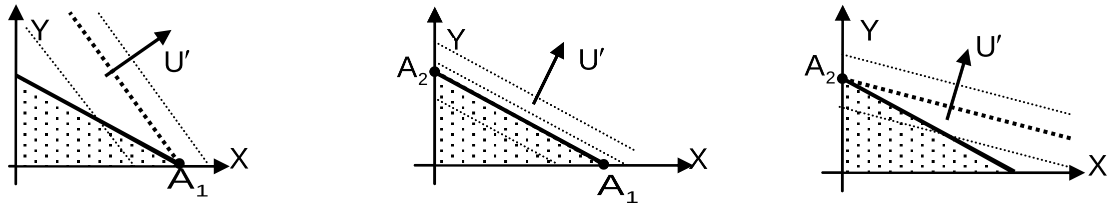
$$A_1 : \{X_1 = c/v,\ Y_1 = 0\} \Rightarrow U_1 = \alpha c/v, \qquad A_2 : \{X_2 = 0,\ Y_2 = c/w\} \Rightarrow U_2 = \beta c/w$$

Η λύση θα είναι:

$$\left\{ A_1 : (x = c/v,\ y = 0) \text{ αν } U_1 \ge U_2 \Rightarrow \frac{\alpha}{v} \ge \frac{\beta}{w} \right\} \text{ όπως στο πρώτο γράφημα}$$

$$\left\{ A_2 : (x = 0,\ y = c/w) \text{ αν } U_2 \ge U_1 \Rightarrow \frac{\beta}{w} \ge \frac{\alpha}{v} \right\} \text{όπως στο τρίτο γράφημα}$$

Αν ισχύει η ισότητα: $\alpha/v = \beta/w$, τότε η λύση βρίσκεται σε όλα τα σημεία της ευθείας ισοκόστους, όπως στο δεύτερο γράφημα. Όλα έχουν την ίδια χρησιμότητα.



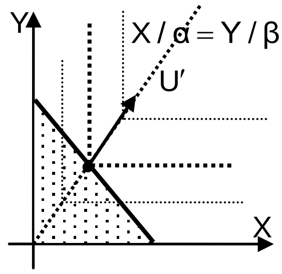
Παίρνοντας υπόψη τις οριακές χρησιμότητες: $\{\alpha,\beta\}$, και τις τιμές: $\{v,w\}$, παρατηρούμε ότι:

1. Καταναλώνουμε μόνο το αγαθό που είναι σχετικά προτιμότερο, με την έννοια ότι έχει <u>μεγαλύτερη χρησιμότητα ανά μονάδα δαπάνης</u>, ή αντιστρέφοντας:

2. Καταναλώνουμε μόνο το αγαθό που είναι σχετικά φθηνότερο, με την έννοια ότι είναι <u>φτηνότερο ανά μονάδα χρησιμότητας</u>.

Η ποσότητα κατανάλωσης εξαρτάται μόνο από την τιμή του αγαθού που καταναλώνεται. ▲

5. Χρησιμότητα τύπου Leontief-min:



$$U = \min\{X/\alpha,\ Y/\beta\} = \begin{cases} X/\alpha \text{ αν } X/\alpha \le Y/\beta \\ Y/\beta \text{ αν } X/\alpha \ge Y/\beta \end{cases}$$

Τώρα δεν υπάρχει *καθόλου υποκατάσταση* μεταξύ των δύο αγαθών. Τα αγαθά καταναλώνονται στη **σταθερή αναλογία** που δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{X}{\alpha} = \frac{Y}{\beta} \Rightarrow \frac{Y}{X} = \frac{\beta}{\alpha}$$

Οτιδήποτε περίσσευμα του ενός από την παραπάνω αναλογία δεν προσφέρει επιπλέον χρησιμότητα, αλλά βέβαια έχει κόστος. Επομένως η βέλτιστη λύση θα ικανοποιεί την παραπάνω σχέση. Και γραφικά διαπιστώνουμε ότι η λύση βρίσκεται πάντοτε στην κορυφή όπου η παραπάνω ευθεία κόβει τον εισοδηματικό περιορισμό.

$$\left\{\frac{X}{\alpha} = \frac{Y}{\beta},\ vX + wY = c\right\} \Rightarrow x = \frac{\alpha c}{\alpha v + \beta w},\ y = \frac{\beta c}{\alpha v + \beta w}$$

Λέμε ότι με χρησιμότητα τύπου Leontief τα δύο αγαθά είναι **τέλεια συμπληρώματα** (perfect complements) στην κατανάλωση. Ειδικότερα:

1. Για το κάθε αγαθό η ζήτηση είναι φθίνουσα ως προς τις τιμές <u>αμφοτέρων</u> των αγαθών λόγω συμπληρωματικότητας.

2. Το ποσοστό της δαπάνης για το κάθε αγαθό <u>αυξάνει</u> με την τιμή του, και <u>ελαττώνεται</u> με την τιμή του άλλου αγαθού λόγω αδυναμίας υποκατάστασης:

$$\frac{xv}{c} = \frac{\alpha v}{\alpha v + \beta w} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta(w/v)},\quad \frac{yw}{c} = \frac{\beta w}{\alpha v + \beta w} = \frac{\beta}{\alpha(v/w) + \beta}$$

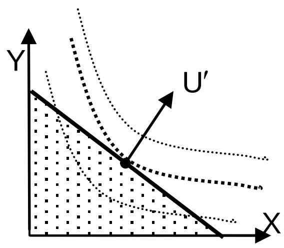
3.Ο λόγος των δαπανών είναι ανάλογος του λόγου των αντίστοιχων τιμών: $\frac{vx}{wy} = \frac{\alpha v}{\beta w}$

6. Χρησιμότητα τύπου Cobb-Douglas (C-D), λογαριθμική

$$U = \ln X^{\alpha} Y^{\beta} = \alpha \ln X + \beta \ln Y$$

Βρίσκεται ανάμεσα από τις άλλες δύο, καθώς τα δύο αγαθά δεν είναι ούτε τέλεια συμπληρώματα ούτε τέλεια υποκατάστατα. Αντίστοιχα, οι καμπύλες αδιαφορίας είναι ανάμεσα από τις δύο προηγούμενες, υπερβολικές, ίδιες με αυτές της ισοδύναμης συνάρτησης:

$$V = X^{\alpha} Y^{\beta} = c$$



Σε προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε την σημασία των συντελεστών $\{\alpha, \beta\}$|. Θα επανέλθουμε σε επόμενο κεφάλαιο στα πλαίσια της θεωρίας ελαστικότητας. Σε κάθε περίπτωση, η λύση είναι πάντοτε εσωτερική και επομένως περιορισμένη στάσιμη. Οι εξισώσεις στασιμότητας μας δίνουν:

$$\left.\begin{matrix} \frac{U_X}{U_Y} = \frac{v}{w} \\ C = c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{\alpha Y}{\beta X} = \frac{v}{w} \\ vX + wY = c \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{c}{v},\ y = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{c}{w}$$

Λέμε ότι με χρησιμότητα τύπου C-D τα δύο αγαθά είναι **ουδέτερα** μεταξύ τους, ως εξής:

1. Η ζήτηση του κάθε αγαθού είναι φθίνουσα συνάρτηση <u>μόνο</u> της τιμής του.

2. Η δαπάνη για το κάθε αγαθό είναι μια σταθερή αναλογία της συνολικής δαπάνης:

$$\frac{vx}{c} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta},\ \frac{wy}{c} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}c$$

3. Ο λόγος των δαπανών είναι σταθερός ανάλογος του λόγου των αντίστοιχων βαρών που εκφράζουν και την σχετική χρησιμότητα:

$$\frac{vx}{wy} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Παρατήρηση. Οι τρείς τύποι που εξετάσαμε ανήκουν σε μια ευρύτερη κατηγορία συναρτήσεων με διάφορους βαθμούς υποκατάστασης/συμπληρωματικότητας, όπως παρουσιάσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, ως συναρτήσεις Σταθερής Ελαστικότητας Υποκατάστασης **(CES)** στην παραγωγή. ▲

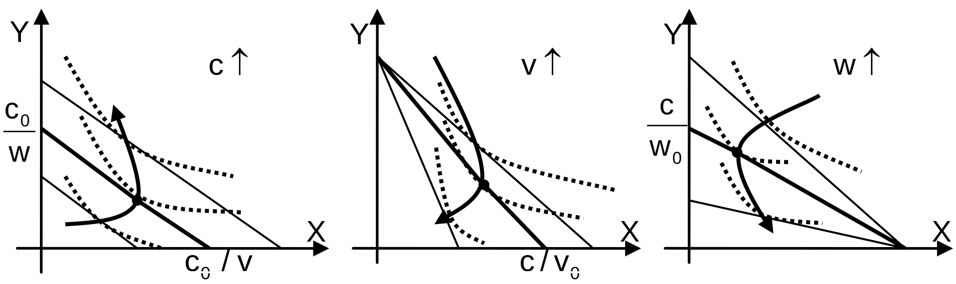
7. Χαρακτηρισμός αγαθών

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την εξάρτηση της ζήτησης των αγαθών από τις παραμέτρους. Καθώς μια από τις **παραμέτρους** $\{v,w,c\}$ μεταβάλλεται, η ευθεία του εισοδηματικού περιορισμού μετακινείται και ο καταναλωτής αντιμετωπίζει καινούργιους συνδυασμούς αγαθών, μεταξύ των οποίων καλείται να επιλέξει αυτόν με την μεγαλύτερη χρησιμότητα. Στο παρακάτω σχήμα δείχνουμε τα εξής:

1. Στο πρώτο γράφημα ο εισοδηματικός περιορισμός μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του καθώς αυξάνει μόνο το εισόδημα c.
2. Στο δεύτερο γράφημα ο εισοδηματικός περιορισμός περιστρέφεται προς μεγαλύτερη κλίση καθώς αυξάνει μόνο η τιμή v του αγαθού στον οριζόντιο άξονα
3. Στο τρίτο γράφημα ο εισοδηματικός περιορισμός περιστρέφεται προς μικρότερη κλίση καθώς αυξάνει μόνο η τιμή w του αγαθού στον κατακόρυφο άξονα.

Σε κάθε περίπτωση η λύση ορίζει ένα σημείο (x,y) στον εισοδηματικό περιορισμό, και καθώς μια παράμετρος μεταβάλλεται το σημείο αυτό μετακινείται στο επίπεδο σχηματίζοντας μια τροχιά η οποία καλείται γενικά **τροχιά ανάπτυξης** και ειδικότερα **τροχιά κατανάλωσης**. Στα παρακάτω τρία γραφήματα δείχνουμε με μαύρη καμπύλη ενδεικτικές τροχιές κατανάλωσης ως προς την διαθέσιμη δαπάνη c και ως προς τις τιμές των αγαθών. Χρησιμοποιούνται και οι παρακάτω ορολογίες:

- Καθώς η διαθέσιμη **δαπάνη** c αυξάνει λέμε ότι ένα αγαθό είναι **κανονικό** (normal) αν η κατανάλωσή του αυξάνει, και ότι είναι **κατώτερο** (inferior) αν η κατανάλωσή του ελαττώνεται.
- Καθώς η μοναδιαία τιμή του **ιδίου αγαθού** αυξάνει λέμε ότι το αγαθό είναι **συνηθισμένο** (ordinary) αν η κατανάλωσή του ελαττώνεται και τύπου **Giffen** αν η κατανάλωσή του αυξάνει.
- Καθώς η μοναδιαία τιμή του **άλλου αγαθού** αυξάνει, λέμε ότι **το αγαθό** είναι **υποκατάστατο** (substitute) αν η κατανάλωσή του αυξάνει και **συμπληρωματικό** (complement) αν ελαττώνεται.



τροχιές ανάπτυξης

Σχετικά με τις καταναλωτικές συμπεριφορές που αποτυπώνονται στα παραπάνω γραφήματα, παρατηρούμε τα εξής:

1. Στο πρώτο γράφημα καθώς η καταναλωτική δαπάνη c αυξάνει, το δεύτερο αγαθό Y είναι κανονικό διότι η κατανάλωσή του συνεχώς αυξάνει, ενώ το πρώτο αγαθό X είναι επίσης κανονικό για εισοδήματα μικρότερα του c_0, αλλά γίνεται κατώτερο για μεγαλύτερα εισοδήματα διότι η κατανάλωσή του πέφτει.

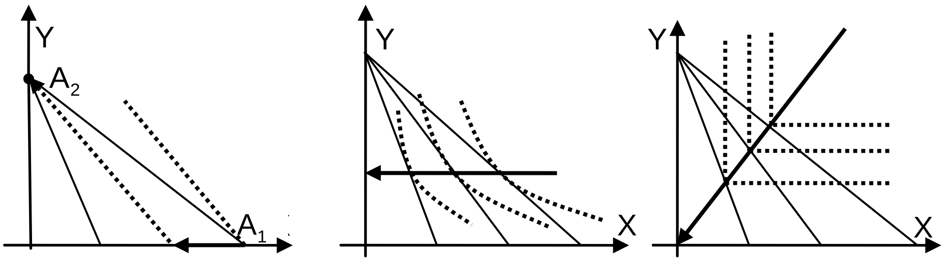
2. Στο δεύτερο γράφημα καθώς η τιμή v του πρώτου αγαθού X αυξάνει, το αγαθό είναι τύπου Giffen για τιμές μικρότερες του v_0 διότι η κατανάλωσή του αυξάνει, και συνηθισμένο για μεγαλύτερες, ενώ το δεύτερο αγαθό Y στον κατακόρυφο άξονα είναι συμπληρωματικό διότι η κατανάλωσή του συνεχώς ελαττώνεται καθώς η τιμή v του πρώτου αυξάνει.

3. Τέλος στο τρίτο γράφημα καθώς η τιμή w του αγαθού Y στον κατακόρυφο άξονα αυξάνει το ίδιο αγαθό είναι συνηθισμένο διότι η κατανάλωσή του πέφτει, ενώ το δεύτερο αγαθό X στον οριζόντιο άξονα είναι συμπληρωματικό για τιμές μικρότερες του w_0 διότι και η δική του κατανάλωση πέφτει και υποκατάστατο για μεγαλύτερες τιμές που η κατανάλωσή του αυξάνει.

Τα παραπάνω ισχύουν μόνο για τα συγκεκριμένα παραδείγματα.

▲

Παράδειγμα. Στα τρία γραφήματα του παρακάτω σχήματος δείχνουμε για τους τρεις τύπους συνάρτησης χρησιμότητας που εξετάσαμε πως μεταβάλλεται η ζήτηση για τα δύο αγαθά καθώς η τιμή v του πρώτου αγαθού X αυξάνει. Σόλες τις περιπτώσεις το $X-$αγαθό είναι συνηθισμένο ως προς την τιμή του, διότι η κατανάλωσή του πέφτει καθώς η τιμή του v αυξάνει.. Το ίδιο ισχύει και για το $Y-$αγαθό ως προς την τιμή του w. Για την μεταξύ τους σχέση, παρατηρούμε τα εξής:



γραμμική Cobb-Douglas Leontief

τροχιές κατανάλωσης όταν $v\uparrow$

1. Στην **γραμμική χρησιμότητα** για μικρά v βρισκόμαστε στο σημείο A_1 με μηδενική κατανάλωση του Y. Αλλά καθώς το v αυξάνει η κλίση της ευθείας εισοδηματικού περιορισμού αυξάνει, και μόλις η κλίση της ξεπεράσει την κλίση της χρησιμότητας:

$$\frac{v}{w} \geq \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \frac{\beta}{w} \geq \frac{\alpha}{v}$$

οπότε το δεύτερο αγαθό γίνεται σχετικά προτιμότερο, η κατανάλωση περνάει απότομα από την κορυφή A_1 στην κορυφή A_2, όπου καταναλώνεται μόνο το Y υποκαθιστώντας πλήρως το X. Επομένως, στην χρησιμότητα γραμμικού τύπου το κάθε αγαθό είναι *(πλήρως) υποκατάστατο* ως προς την τιμή του άλλου.

2. Στη χρησιμότητα τύπου **Cobb-Douglas**, η κατανάλωση του $Y-$κάθε αγαθού είναι φθίνουσα συνάρτηση μόνο της τιμής του, οπότε το κάθε αγαθό είναι *ουδέτερο* ως προς την τιμή του άλλου*:*

$$y = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{c}{w}$$, δεν εξαρτάται από το v

3. Στη χρησιμότητα τύπου **Leontief** η $Y-$κατανάλωση πέφτει καθώς το v αυξάνει, οπότε το κάθε αγαθό *(πλήρως) συμπληρωματικό*:

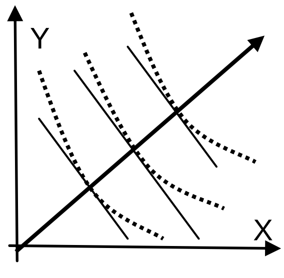
$$y = \frac{\beta c}{\alpha v + \beta w}$$

8. Καμπύλη Engel-Ομοθετική χρησιμότητα

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η **εισοδηματική τροχιά ανάπτυξης,** δηλαδή η εξέλιξη της κατανάλωσης καθώς αυξάνει το διαθέσιμο εισόδημα c. Καλείται και **καμπύλη Engel.** Στα τρία παραδείγματα που εξετάσαμε: γραμμική, Cobb-Douglas, και Leontief, διαπιστώσαμε ότι η εξάρτηση της κατανάλωσης από το εισόδημα είναι γραμμική ομογενής:

$$x = Ac,\ y = Bc$$

οπότε και η τροχιά ανάπτυξης ως προς το εισόδημα είναι ακτίνα, όπως φαίνεται στο γράφημα παραπλεύρως για χρησιμότητα τύπου C-D.



Οι τρείς αυτές συναρτήσεις χρησιμότητας έχουν την χαρακτηριστική ιδιότητα ότι οι καμπύλες αδιαφορίας έχουν σταθερή κλίση κατά μήκος κάθε ακτίνας διότι ο ρυθμός υποκατάστασης dY/dX *εξαρτάται μόνο από το λόγο* Y/X, *δηλαδή είναι σταθερός κατά μήκος μιας ακτίνας. Επομένως καθώς το εισόδημα* c *αυξάνει και η ευθεία του εισοδηματικού περιορισμού μετακινείται παράλληλα, το σημείο επαφής με τις καμπύλες αδιαφορίας θα σχηματίζει ως τροχιά την ευθεία της αντίστοιχης ακτίνας.*

Σε επόμενο κεφάλαιο θα αναφερθούμε στις **ομογενείς** και γενικότερα τις **ομοθετικές** συναρτήσεις που έχουν την παραπάνω ιδιότητα,**.** ▲

9. Ημιγραμμική χρησιμότητα (semilinear utility)

καλείται η συνάρτηση χρησιμότητας της μορφής:

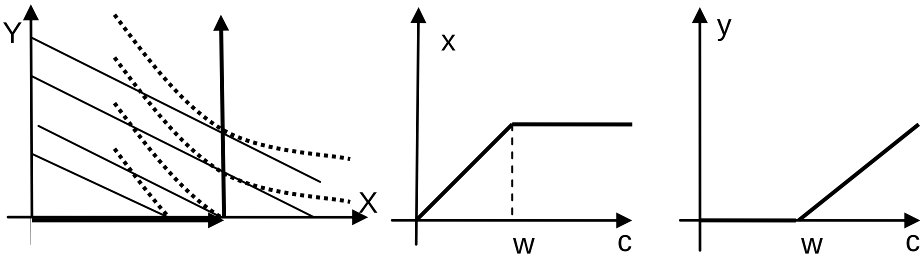
$$U = f(X) + \beta Y$$

Οι καμπύλες αδιαφορίας είναι κατακόρυφες μετατοπίσεις η μία της άλλης. Πράγματι, οι καμπύλες:

$$f(X) + \beta Y = u \Rightarrow Y = -f(X)/\beta + u/\beta$$

προκύπτουν από την $Y = -f(X)/\beta$ με κατακόρυφη μετατόπιση κατά u/β καθώς το u μεταβάλλεται, όπως οι διακεκομμένες γραμμές στο πρώτο γράφημα παρακάτω. Επομένως η κλίση θα είναι ίδια κατά μήκος της κάθε κατακόρυφης και συμπεραίνουμε όπως και στην προηγούμενη περίπτωση ότι καθώς το εισόδημα αυξάνει, η τροχιά ανάπτυξης θα είναι κατακόρυφη ευθεία, όπως φαίνεται στο παρακάτω γράφημα. Γραφικά διαπιστώνουμε ότι:

Στην ημιγραμμική χρησιμότητα, καθώς το εισόδημα c αυξάνει, στην αρχή έχουμε συνοριακή λύση $Y = 0$ ενώ αυξάνει η κατανάλωση μόνο του πρώτου αγαθού X, αλλά μετά από κάποιο εισόδημα η κατανάλωση του X παραμένει σταθερή και όλο το επιπλέον εισόδημα αναλώνεται στο δεύτερο αγαθό Y.



ημιγραμμική χρησιμότητα

Παράδειγμα. Για το παρακάτω πρόβλημα με ημιγραμμική συνάρτηση χρησιμότητας:

$$\max\{U = \ln X + Y \,||\, C = vX + wY = c\}, \text{ με } X \geq 0,\ Y \geq 0$$

αντικαθιστούμε από τον περιορισμό:

$$vX + wY = c \Rightarrow Y = (c - vX)/w, \text{ όπου: } 0 \leq X \leq c/v$$

και βρίσκουμε **κοίλη** συνάρτηση χρησιμότητας μιας μεταβλητής σε διάστημα:

$$U = \ln X + \frac{1}{w}(c - vX) \quad \text{με } 0 \leq X \leq c/v$$

Το αριστερό σύνορο $X = 0$, δεν δίνει **ποτέ** μέγιστο, διότι λόγω του λογαρίθμου, έχουμε: $U(0) \to -\infty$. Εξάλλου ούτε το σχετικό κριτήριο για αριστερό σύνορο ικανοποιείται, διότι έχουμε $U'(0) \to +\infty > 0$. Εξετάζουμε τις άλλες δύο περιπτώσεις:

1. Συνοριακή στο δεξιό σύνορο:

$$X = c/v \Rightarrow Y = 0, \text{ αν } U'(c/v) = \frac{v}{c} - \frac{v}{w} \geq 0 \Rightarrow c \leq w$$

2. Εσωτερική στάσιμη:

$$U' = \frac{1}{X} - \frac{v}{w} = 0 \Rightarrow \left\{X = \frac{w}{v},\ Y = \frac{c}{w} - 1\right\} \quad \text{αν} \quad Y = \frac{c}{w} - 1 > 0 \Rightarrow c > w$$

Εξαντλήσαμε τις τιμές των παραμέτρων, οπότε η λύση θα είναι:

1. Αν $c \leq w \Rightarrow \left\{x = \frac{c}{v},\ y = 0\right\}$ **2.** Αν $c > w \Rightarrow \left\{x = \frac{w}{v},\ y = \frac{c}{w} - 1\right\}$

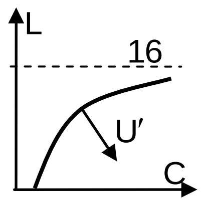
Δηλαδή εφόσον το εισόδημα είναι μικρό: $c \leq w$, αναλώνεται όλο στο πρώτο αγαθό X μέχρι ένα επίπεδο κατανάλωσης που στη συνέχεια μένει σταθερό, όπως φαίνεται στο δεύτερο γράφημα παραπάνω, οπότε όλο το επιπλέον εισόδημα αναλώνεται στο δεύτερο αγαθό Y όπως φαίνεται στο τρίτο γράφημα. Λέμε ότι **το πρώτο αγαθό είναι αναγκαίο και το δεύτερο πολυτελείας.**

▲

10. Λογαριθμική χρησιμότητα τύπου Stone-Geary

Σε πολλές περιπτώσεις η κατανάλωση ενός αγαθού μπορεί να προκαλεί βλάβη αντί για όφελος. Συχνά αυτό συμβαίνει σε μεγάλες ποσότητες κατανάλωσης οπότε λέμε ότι έχουμε **κορεσμό (**saturation), αλλά μπορεί να εμφανιστεί και σε άλλες περιπτώσεις με κατάλληλη διεύρυνση της έννοιας του «αγαθού» ώστε να καλύπτει και το **μη αγαθό**, *με αρνητική οριακή χρησιμότητα*.

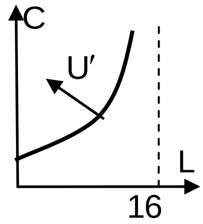
Παράδειγμα. Ένας εργαζόμενος εργάζεται L ώρες ημερησίως, έχει διαθέσιμο για κατανάλωση ποσό C ημερησίως, και συνάρτηση χρησιμότητας:



$$U = \ln[C(16-L)] = \ln C + \ln(16-L) \text{ με } 0 \le L \le 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_C = 1/C > 0 \\ U_L = -1/(16-L) < 0 \end{cases}, \text{ η εργασία είναι } \textbf{μη αγαθό}$$

Η παραπάνω καλείται **λογαριθμική χρησιμότητα τύπου Stone-Geary,** και έχει τις εξής ιδιότητες μονοτονίας και κυρτότητας, όπως φαίνεται και στο γράφημα:



1. Είναι $C-$αύξουσα, αλλά $L-$φθίνουσα, με καμπύλες αδιαφορίας:

$$C(16-L) = \alpha \Rightarrow L = 16 - \frac{\alpha}{C} \quad \text{ή} \quad C = \frac{\alpha}{16-L} \quad \text{με } \{0 \le C,\ 0 \le L \le 16\},\ \ \alpha > 0$$

Έχουν θετική κλίση και ορίζουν **αντιστάθμιση, δηλαδή η αύξηση της εργασίας αντισταθμίζεται με αύξηση της κατανάλωσης.**

2. Ορίζει αύξοντα ρυθμό υποκατάστασης (αντιστάθμισης) dC/dL. **Κάθε επιπλέον αύξηση της εργασίας απαιτεί για αντιστάθμιση όλο και μεγαλύτερη αύξηση της κατανάλωσης.**

2. Έχει τις πάνω σταθμικές κυρτές (οιονεί κοίλη), οπότε **ενδιάμεσοι συνδυασμοί κατανάλωσης-εργασίας είναι προτιμότεροι από ακραίους** όπου η εργασία και η κατανάλωση είναι αμφότερα πολύ μικρά ή αμφότερα πολύ μεγάλα. Στην πραγματικότητα είναι κοίλη, ως άθροισμα κοίλων συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

▲

Παράδειγμα. Όσον αφορά τα εισοδήματα, υποθέτουμε ότι ο εργαζόμενος του προηγούμενου παραδείγματος αμείβεται με ωρομίσθιο w, οπότε έχει ημερήσιο εισόδημα wL από την εργασία, ενώ έχει και ένα πρόσθετο **ημερήσιο εισόδημα** e από άλλες πηγές. Έχουμε πρόβλημα μεγιστοποίησης της χρησιμότητας όπου η κατανάλωση περιορίζεται από τον εισοδηματικό περιορισμό:

$$C \le wL + e \Rightarrow C - wL \le e$$

Ο εισοδηματικός περιορισμός είναι ευθεία με θετική κλίση το ωρομίσθιο w, όπως στα παρακάτω γραφήματα. Μπορούμε να αντικαταστήσουμε την ανισότητα με ισότητα διότι η χρησιμότητα είναι αύξουσα ως προς την κατανάλωση C και επομένως θα εξαντλήσει τον περιορισμό. Έχουμε το πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης:

$$\max_{\{X,Y\}}\{U = \ln C + \ln(16-L) \,|\, E = C - wL = e\}$$

Λύση1. Με αντικατάσταση του C από τον ισοτικό περιορισμό, βρίσκουμε την συνάρτηση του L:

$$C = wL + e \Rightarrow U(L) = \ln(wL+e) + \ln(16-L) \quad \text{με} \quad 0 \le L \le 16$$

Είναι *κοίλη ως άθροισμα κοίλων,* με παράγωγο:

$$U'(L) = \frac{w}{wL+e} - \frac{1}{16-L} \Rightarrow U'(0) = \frac{w}{e} - \frac{1}{16} = \frac{16w-e}{16e}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. $U'(0) \le 0 \Rightarrow w \le e/16$, η λύση θα είναι συνοριακή: $\ell = 0$

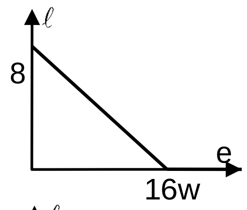
Η αμοιβή της εργασίας είναι χαμηλή σε σχέση με το διαθέσιμο εισόδημα, και το άτομο δεν ενδιαφέρεται να εργαστεί.

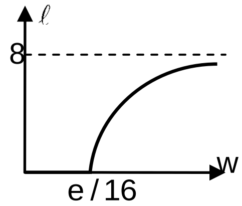
2. $U'(0) > 0 \Rightarrow w > e/16$, λύση στάσιμη εσωτερική: $U'(L) = 0 \Rightarrow \ell = \dfrac{16w-e}{2w} = 8 - \dfrac{e}{2w}$

Η αμοιβή της εργασίας είναι ικανοποιητική σε σχέση με το διαθέσιμο εισόδημα και το άτομο θα εργαστεί προσφέροντας ποσότητα εργασίας **μέχρι 8 ώρες το πολύ,** καθώς το ωρομίσθιο αυξάνει.

Παρατήρηση. Στην παραπάνω λύση εξαντλήσαμε τις τιμές των παραμέτρων, οπότε ως συνάρτηση των παραμέτρων: $\{w, e\}$, η λύση είναι:

$$\ell = \begin{cases} 0 & \text{αν } w \le e/16 \\ 8 - \dfrac{e}{2w} & \text{αν } w > e/16 \end{cases} \Rightarrow c = \begin{cases} e & \text{αν } w \le e/16 \\ \dfrac{e}{2} + 8w & \text{αν } w > e/16 \end{cases}$$





Στα γραφήματα παραπλεύρως δείχνουμε την **προσφορά εργασίας** ℓ ως φθίνουσα συνάρτηση του εισοδήματος e και ως αύξουσα συνάρτηση της αμοιβής w. Παρατηρούμε ότι από τις διαθέσιμες 16 ώρες η μέγιστη προσφορά εργασίας είναι 8 ώρες, ακόμη και με μηδενικό επιπλέον εισόδημα ή όσο και να αυξάνει η αμοιβή της.

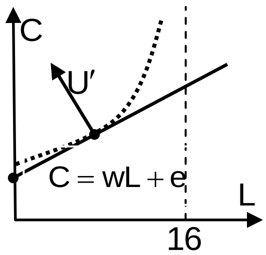
Λύση 2. Παραπλεύρως δίνουμε την γραφική λύση στο επίπεδο των $\{L, C\}$ του ίδιου προβλήματος:

$$\max_{\{X,Y\}}\{U = \ln C + \ln(16 - L) \mid E = C - wL = e\}$$

Ο περιορισμός δίνεται από την ευθεία:

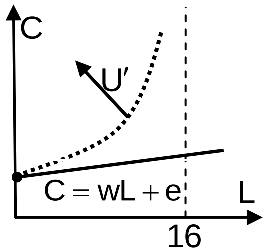
$$C = wL + e$$

και όπως διαπιστώνουμε προκύπτουν δύο περιπτώσεις:



- **Υψηλή αμοιβή:** $w > e/16$**,** όπως στο πρώτο γράφημα παραπλεύρως. Προσφέρεται εργασία, η λύση είναι εσωτερική και επομένως λύση περιορισμένης στασιμότητας των εξισώσεων Lagrange. .

$$\left\{\frac{U_C}{E_C} = \frac{U_L}{E_L},\ E = e\right\} \Rightarrow \left\{\frac{1}{C} = \frac{1}{w(16-L)},\ C - wL = e\right\} \Rightarrow \begin{cases} C = w16 - wL \\ C = wL + e \end{cases}$$



Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε την ίδια λύση:

$$\ell = \frac{16w - e}{2w} = 8 - \frac{e}{2w} > 0 \Rightarrow w > 16e$$

- **Χαμηλή αμοιβή:** $w \le e/16$**,** όπως στο δεύτερο γράφημα. Δεν προσφέρεται εργασία, η λύση είναι συνοριακή: $\ell = 0$

▲

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

11. Μη αγαθά

Θεωρούμε το πρόβλημα της βέλτιστης προσφοράς εργασίας που εξετάσαμε παραπάνω:

$$\max\{U = \ln C(16 - L) \,||\, E = C - wL = e,\ 0 \le C,\ 0 \le L \le 16\},$$

Η εργασία L είναι μη αγαθό που αντιστοιχεί σε προσφορά εργασίας και η «απόκτησή του» συνεπάγεται επιδότηση, δηλαδή αρνητική τιμή $-w$. Αλλάζουμε τώρα την προοπτική χρησιμοποιώντας αντί του μη αγαθού της εργασίας το αγαθό του ελεύθερου χρόνου, δηλαδή της **σχόλης (l**eisure):

$T = 16 - L$, **το αρνητικό ενός αγαθού είναι μη αγαθό και αντιστρόφως**

Αντικαθιστώντας και στην χρησιμότητα και στο περιορισμό, η διατύπωση του προβλήματος στο επίπεδο $\{C, T\}$ θα έχει την μορφή:

$$\max_{C,T}\{V = \ln CT \mid M = C + wT = e + w16,\ 0 \le C,\ 0 \le T \le 16\}$$

Τώρα **η σχόλη T είναι αγαθό και η απόκτησή του γίνεται με ωροκόστος w,** διότι μειώνει την εργασία**.** Ο εισοδηματικός περιορισμός εμφανίζεται τώρα στη μορφή με αρχικό πλούτο:

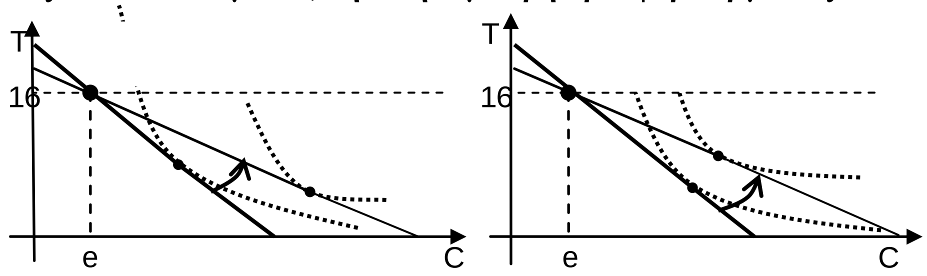
$$(C_0 = e, T_0 = 16) \Rightarrow C + wT = e + w16$$

Δηλαδή, εκτός από το αρχικό εισόδημα $C_0 = e$ έχει και ένα αρχικό απόθεμα σχόλης $T_0 = 16$ που αποτιμάται επίσης με μοναδιαία αξία w. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα το πρόβλημα είναι τώρα σε κανονική μορφή και καθώς το μοναδιαίο κόστος w του αγαθού T στον κατακόρυφο άξονα αυξάνει η εισοδηματική ευθεία περιστρέφεται γύρω από τον αρχικό πλούτο: $(C_0 = e, T_0 = 16)$ προς μικρότερη κλίση.

Υποθέτοντας ότι η σχόλη συμπεριφέρεται γενικά ως κανονικό και συνηθισμένο αγαθό, αύξηση του ωρομίσθιου $w\uparrow$ έχει δύο αντικρουόμενες συνέπειες.

1. Προκαλεί αύξηση του μοναδιαίου κόστους w του ελεύθερου χρόνου, και επομένως μείωση της ζήτησής του T ως συνηθισμένου αγαθού, δηλαδή μεγαλύτερη προσφορά εργασίας L.

2. Προκαλεί αύξηση του αρχικού πλούτου $16w$ στο δεξιό μέρος που οδηγεί σε αύξηση της ζήτησής του T ως κανονικού αγαθού, δηλαδή λιγότερη προσφορά εργασίας.



αύξηση εργασίας   μείωση εργασίας

αύξηση της αμοιβής: $w\uparrow$

Παρατήρηση Για την συγκεκριμένη συνάρτηση χρησιμότητας υπερισχύει η πρώτη επίδραση και είχαμε αύξηση της εργασίας με το ωρομίσθιο, όπως στο πρώτο γράφημα. Στο δεύτερο γράφημα δείχνουμε πως με διαφορετική συνάρτηση χρησιμότητας αύξηση του ωρομισθίου μπορεί να προκαλέσει αύξηση της σχόλης δηλαδή μείωση της προσφοράς εργασίας.

▲

12. Αντισταθμισμένη ζήτηση κατά Hicks

Λύνοντας το πρόβλημα για μέγιστη χρησιμότητα εκφράσαμε τις βέλτιστες ποσότητες κατανάλωσης των δύο αγαθών ως συναρτήσεις των μοναδιαίων τιμών τους και της διαθέσιμης δαπάνης:

$$\max\{U(X,Y) \,||\, C = vX + wY \le c\} \Rightarrow \begin{cases} x = X(v,w,c) \\ y = Y(v,w,c) \end{cases}$$

Βρήκαμε έτσι τις **κανονικές συναρτήσεις ζήτησης κατά Marshall** που είναι οι γνωστές συναρτήσεις ζήτησης αγαθών. Στη γενική θεωρία της κατανάλωσης εμφανίζεται και το **συμμετρικό** του παραπάνω προβλήματος που αφορά την ελαχιστοποίηση της δαπάνης για επιδιωκόμενη χρησιμότητα. Λύνοντας αυτό το πρόβλημα βρίσκουμε τις βέλτιστες ποσότητες κατανάλωσης ως συναρτήσεις των μοναδιαίων τιμών και της επιδιωκόμενης χρησιμότητας:

$$\min\{C = vX + wY \,||\, U(X,Y) \ge u\} \Rightarrow \begin{cases} x = X(v,w,u) \\ y = Y(v,w,u) \end{cases}$$

Καλούνται **αντισταθμισμένες συναρτήσεις ζήτησης κατά Hicks** (compensated demand).

Παράδειγμα. Θεωρούμε τα δύο συμμετρικά προβλήματα βελτιστοποίησης στην κατανάλωση με λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας τύπου C-D:

$$U = \ln X^{\alpha} Y^{\beta} = \alpha \ln X + \beta \ln Y$$

1. $\max\{U = \alpha \ln X + \beta \ln Y \,||\, C = vX + wY = c\}$

Σε προηγούμενο παράδειγμα βρήκαμε τις κανονικές συναρτήσεις ζήτησης κατά Marshall:

$$x = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{c}{v},\ y = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{c}{w}$$

2. $\min\{C = vX + wY \,||\, U = \alpha \ln X + \beta \ln Y \ge u\}$

Βρίσκουμε τις αντισταθμισμένες συναρτήσεις ζήτησης κατά Hicks:

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{v}{w} = \dfrac{U_X}{U_Y} \\ U = u \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \dfrac{v}{w} = \dfrac{\alpha Y}{\beta X} \\ X^{\alpha} Y^{\beta} = e^{u} \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow x = e^{\frac{u}{\alpha+\beta}} \left(\frac{v}{\alpha}\right)^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{w}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}},\ y = e^{\frac{u}{\alpha+\beta}} \left(\frac{v}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{w}{\beta}\right)^{\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}}$$

Συνήθως παίρνουμε: $\alpha + \beta = 1$, οπότε η λύση θα έχει την μορφή:

$$\Rightarrow x = e^{u} \left(\frac{v}{\alpha}\right)^{-\beta} \left(\frac{w}{\beta}\right)^{\beta},\ y = e^{\theta} \left(\frac{v}{\alpha}\right)^{\alpha} \left(\frac{w}{\beta}\right)^{-\alpha}$$

▲

Υπενθυμίζουμε ότι όσον αφορά την εξάρτηση των κανονικών συναρτήσεων ζήτησης κατά Marshall από τις παραμέτρους των μοναδιαίων τιμών των αγαθών και του διαθέσιμου εισοδήματος, η μονοτονία δεν είναι καθορισμένη. Όσον αφορά τις αντισταθμισμένες συναρτήσεις ζήτησης κατά Hicks, η μονοτονία της ως προς τις τιμές είναι καθορισμένη, ως εξής:

Ως προς τις τιμές των αγαθών, οι αντισταθμισμένες συναρτήσεις ζήτησης εξαρτώνται μόνο από τον λόγο των τιμών, όπου η ζήτηση για κάθε αγαθό είναι φθίνουσα ως προς την τιμή του και αύξουσα ως προς την τιμή του άλλου αγαθού.

Απόδειξη. Για εσωτερικές λύσεις η ιδιότητα είναι άμεση συνέπεια των εξισώσεων Lagrange όπου οι τιμές εμφανίζονται μόνο ως προς το λόγο τους. Γενικότερα, παρατηρούμε ότι αν πολλαπλασιάσουμε τις τιμές με τον ίδιο συντελεστή t τότε οι αντίστοιχες δαπάνες:

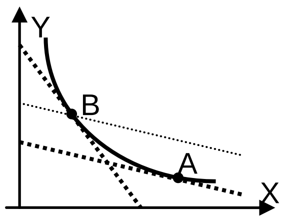
$$vX + wY,\quad (tv)X + (tw)Y = t(vX + wY)$$

θα έχουν μέγιστο στο ίδιο σημείο διότι η μία συνάρτηση κόστους είναι αύξων μετασχηματισμός της άλλης. Όσον αφορά την μονοτονία παρατηρούμε καταρχήν ότι η ζήτηση, την οποία για ευκολία υποθέτουμε εσωτερική (δηλαδή μη μηδενική), θα ικανοποιεί την συνθήκη περιορισμένης στασιμότητας:

$$\frac{U_x}{U_y} = \frac{v}{w},\ \text{με } U = u: \text{σταθερό}$$

Καθώς το v αυξάνει, το δεξιό επομένως και το αριστερό μέρος της πρώτης εξίσωσης θα πρέπει να αυξάνουν.

Παρατηρούμε τώρα ότι το αριστερό μέρος είναι η απόλυτη τιμή του ρυθμού υποκατάστασης της συνάρτησης χρησιμότητας για την οποία υποθέτουμε ότι είναι κανονική με φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης. Συμπεραίνουμε ότι όταν το αριστερό μέρος αυξάνει θα πρέπει η συμμετοχή του x να ελαττώνεται και του y να αυξάνει που είναι και το ζητούμενο, όπως φαίνεται και στο παρακάτω γράφημα.

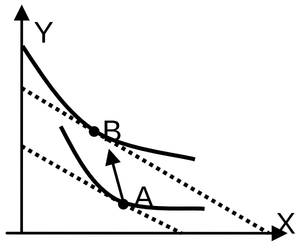


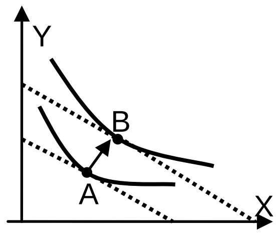
Παρατήρηση. Πράγματι, καθώς αυξάνει η τιμή v του πρώτου αγαθού, η αντισταθμισμένη ζήτηση για δοσμένη χρησιμότητα ελαττώνεται για το ίδιο και αυξάνει για το άλλο καθώς πηγαίνουμε από το A στο B. Παρατηρούμε επίσης ότι τώρα η δαπάνη είναι μεγαλύτερη, διότι όπως φαίνεται από το γράφημα είναι μεγαλύτερη ακόμη και με την αρχική χαμηλότερη τιμή του X. Δηλαδή:

Όταν η τιμή ενός αγαθού αυξάνει τότε προκειμένου να μείνουμε στο ίδιο επίπεδο χρησιμότητας θα πρέπει να αυξηθεί η δαπάνη ως αντιστάθμιση. Γιαυτό και καλούνται αντισταθμισμένες συναρτήσεις ζήτησης.

Παρατήρηση. Όσον αφορά την εξάρτηση από την χρησιμότητα η μονοτονία των συναρτήσεων αντισταθμισμένης ζήτησης δεν είναι καθορισμένη, οπότε έχουμε διάκριση σε **κανονικά** και **κατώτερα** αγαθά. Θεωρούμε τα παρακάτω γραφήματα που αφορούν:

ελαχιστοποίηση δαπάνης: $\min\{C = vX + wY \,||\, U(X,Y) \geq u\}$





- Στο πρώτο γράφημα δίνουμε ένα παράδειγμα όπου καθώς η επιδιωκόμενη χρησιμότητα αυξάνει, η αντισταθμισμένη ζήτηση του Y αυξάνει αλλά του X ελαττώνεται , καθώς πάμε από το A στο B. Έτσι το X είναι κατώτερο και το Y κανονικό. Αντίθετα στο δεύτερο γράφημα, η ζήτηση αμφότερων των αγαθών αυξάνει οπότε αμφότερα είναι κανονικά