Ef.III.6 ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΕΡΔΟΥΣ (Β)

ΠΑΡΑΓΩΓΗ-ΚΟΣΤΟΣ

Προβλήματα 1.Δύο εισροές-Μία εκροή 2.Παραγωγή τύπου Cobb-Douglas 3.Δύο εκροές-Μία εισροή 4.Συμφέρουσες τιμές 5.Διαφοροποίηση τιμών

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

6. Βέλτιστη παραγωγή τύπου C-D 7.Εξωτερικότητες 8.Εισροές-Εκροές

ΠΑΡΑΓΩΓΗ-ΚΟΣΤΟΣ

Προβλήματα

Σε μια παραγωγική διαδικασία έχουμε συνήθως πολλούς **συντελεστές παραγωγής** ως **εισροές** και πολλά **παραγόμενα προϊόντα** ως **εκροές**. Οι εισροές έχουν κόστος και οι εκροές αποφέρουν έσοδο. Η διαφορά τους δίνει το κέρδος. Θα ασχοληθούμε με τα παρακάτω προβλήματα μεγιστοποίησης του κέρδους:

1. Στην παραγωγή και διάθεση ενός προϊόντος με δύο συντελεστές παραγωγής και συνάρτηση παραγωγής τύπου Cobb-Douglas, σε συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού όπου οι αμοιβές των συντελεστών και η τιμή του προϊόντος είναι δοσμένα εξωγενώς ως παράμετροι

2. Στην παραγωγή δύο προϊόντων με τετραγωνική συνάρτηση κόστους, σε συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού όπου οι τιμές των προϊόντων είναι δοσμένες εξωγενώς ως παράμετροι.

3. Στη διάθεση ενός προϊόντος σε δύο αγορές σε συνθήκες ελλιπούς ανταγωνισμού όπου οι τιμές τους δεν είναι δοσμένες αλλά εξαρτώνται από τη ζήτηση που μπορεί να είναι διαφορετική στις δύο αγορές.

4. Τέλος θα εξετάσουμε και μια απλή περίπτωση όπου εκτός από προϊόντα έχουμε και παραγωγή μη αγαθών, όπως είναι ο ρύπος, που συνεπάγονται εξωτερικά κόστη.

1 Δύο εισροές-Μία εκροή

Θεωρούμε μια παραγωγική διαδικασία με δύο συντελεστές παραγωγής τους οποίους συμβατικά θα ονομάσουμε *κεφάλαιο* και *εργασία*, αντίστοιχα:

$$\{K, L\}$$

και ένα παραγόμενο προϊόν, με συνάρτηση παραγωγής:

$$Q = Q(K, L)$$

Επίσης, θα υποθέσουμε **ανταγωνιστικές αγορές στους συντελεστές και στο προϊόν**, με την έννοια ότι τα μοναδιαία κόστη των συντελεστών $\{v, w\}$ και η μοναδιαία τιμή του προϊόντος p είναι δοσμένα, εξωγενώς καθορισμένα. Το σταθερό κόστος, αν υπάρχει, θα το παραλείψουμε για ευκολία, διότι ως γνωστό δεν επηρεάζει την λύση μέγιστου κέρδους, εφόσον υποθέσουμε ότι το σταθερό κόστος υπάρχει και χωρίς παραγωγή. Κατεβάζει μόνο το κέρδος κατά το μέγεθος της ζημιάς που αντιστοιχεί στο σταθερό κόστος. Έτσι έχουμε κόστος και έσοδο, αντίστοιχα:

$$C = vK + wL, \quad R = pQ(K, L)$$

Το πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους τίθεται στη μορφή:

$$\max_{K,L}\{\Pi = R - C = pQ(K, L) - vK - wL \,\|\, K \geq 0, L \geq 0\}$$

Η συνθήκη στασιμότητας για **εσωτερική λύση:** $\{K > 0, L > 0\}$, γράφεται:

$$\left.\begin{matrix} \Pi_K = 0 \\ \Pi_L = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} R_K = C_K \\ R_L = C_L \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} pQ_K = v \\ pQ_L = w \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} Q_K(K, L) = v / p \\ Q_L(K, L) = w / p \end{matrix}\right\}$$

Δηλαδή:

η συμμετοχή του κάθε συντελεστή αυξάνει μέχρι το φθίνον οριακό έσοδό του να κατέβει στο ύψος του αντίστοιχου μοναδιαίου κόστους, υποθέτοντας ότι αρχίζει ψηλότερα.

Παρατήρηση. Οι συνθήκες κυρτότητας δεύτερης τάξης θα είναι ίδιες με τις συνθήκες κυρτότητας της συνάρτησης παραγωγής, διότι το κόστος είναι γραμμική συνάρτηση και οι δεύτερες παράγωγές του μηδενίζονται. Επομένως σε **εσωτερικό μέγιστο** θα πρέπει να ικανοποιούνται και οι συνθήκες:

$$\Pi'' \le 0 \Rightarrow Q'' \le 0 : \{Q_{KK} \le 0,\ Q_{LL} \le 0,\ \Delta_Q = Q_{KK}Q_{LL} - Q_{KL}^2 \ge 0\}$$

Μάλιστα, αν η συνάρτηση παραγωγής ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες σόλα τα σημεία τότε θα είναι κοίλη, οπότε η συνάρτηση κέρδους θα είναι επίσης κοίλη, έχουμε πρόβλημα Κυρτού Προγραμματισμού, και το στάσιμο θα είναι ολικό μέγιστο.

▲

Οι παραπάνω δύο εξισώσεις στασιμότητας περιέχουν εκτός των μεταβλητών επιλογής $\{K,L\}$, και τις παραμέτρους $\{v,w,p\}$. Συμβολίζοντας με μικρά γράμματα τις παραμέτρους καθώς και τις βέλτιστες ποσότητες των διαφόρων μεγεθών, η λύση θα εξαρτάται από τις παραμέτρους και θα εκφράζεται σε μορφή συναρτήσεων:

$$\left.\begin{array}{l} k = K(v,w,p) \\ l = L(v,w,p) \end{array}\right\} :$$ **ζήτηση συντελεστών** (factor demand)

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε και το μέγεθος:

$q = Q(k,l) = q(v,w,p)$: **προσφορά προϊόντος** (product supply)

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις στασιμότητας εξαρτώνται μόνο από τους λόγους: $\{v/p, w/p\}$. Συμπεραίνουμε ότι το ίδιο θα ισχύει για τις λύσεις, δηλαδή:

Η ζήτηση συντελεστών και η προσφορά προϊόντος εξαρτώνται μόνο από τους λόγους:

$$\frac{v}{p},\ \frac{w}{p}$$

Εκφράζουμε την παραπάνω ιδιότητα λέγοντας ότι **δεν υπάρχει ψευδαίσθηση χρήματος.** Δηλαδή αν εκφράσουμε το χρήμα σε διαφορετική μονάδα αυτό δεν θα αλλάξει την ζήτηση των συντελεστών και την προσφορά του προϊόντος. Τέλος, αντικαθιστώντας στη συνάρτηση κέρδους, βρίσκουμε και το μέγιστο κέρδος ως συνάρτηση των παραμέτρων:

$\pi = pq - vk - wl = \pi(v,w,p)$: **μέγιστο κέρδος** (maximal profit)

Παρατήρηση. Επισημαίνουμε τη διάκριση μεταξύ των παρακάτω δύο συναρτήσεων κέρδους:

1. $\Pi(K,L) = pQ(K,L) - vK - wL$, **άμεση συνάρτηση κέρδους** (direct profit function).

Για τις δεδομένες τιμές $\{v,w,p\}$, εκφράζει το δυνητικό κέρδος *αν οι συντελεστές χρησιμοποιηθούν στις τυχαίες ποσότητες* $\{K,L\}$.

2. $\pi(v,w,p) = \Pi(k,l) = pq - vk - wl$, **έμμεση συνάρτηση κέρδους** (indirect profit function)

Καλείται και **συνάρτηση μέγιστου κέρδους** (maximal profit function). Για τις δεδομένες τιμές $\{v,w,p\}$ εκφράζει το πραγματοποιούμενο κέρδος, *όταν οι συντελεστές χρησιμοποιούνται στις βέλτιστες ποσότητες* $\{k,l\}$.

Παράδειγμα. $Q = 2\sqrt{K} + \sqrt{L} \Rightarrow \Pi(K,L) = p(2\sqrt{K} + \sqrt{L}) - vK - wL$ με $\{p > 0,\ v > 0,\ w > 0\}$

Είναι χωριζόμενων μεταβλητών σε ορθογώνια περιοχή. Οι επιμέρους συναρτήσεις είναι κοίλες σε διάστημα, με λύση στάσιμη που δίνει ολικό μέγιστο:

$$\max\{\Pi_1(K) = p2\sqrt{K} - vK \,\|\, K \ge 0\} \Rightarrow \Pi_1' = \frac{p}{\sqrt{K}} - v = 0 \Rightarrow k = \frac{p^2}{v^2}$$

$$\max\{\Pi_2(L) = p\sqrt{L} - wL \,\|\, L \ge 0\} \Rightarrow \Pi_2'(L) = \frac{p}{2\sqrt{L}} - w = 0 \Rightarrow l = \frac{p^2}{4w^2}$$

Βρήκαμε την ζήτηση συντελεστών. Η προσφορά του προϊόντος, το κόστος της παραγωγής, και το μέγιστο κέρδος, ως συναρτήσεις των παραμέτρων, είναι αντίστοιχα:

$$q = p\left(\frac{2}{v} + \frac{1}{2w}\right),\ c = p^2\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{4w}\right),\ \pi = pq - c = p^2\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{4w}\right)$$

Ως συνάρτηση των παραμέτρων, το (μέγιστο) κέρδος είναι: $p-$ αύξουσα, κυρτή, $\{v,w\}-$φθίνουσα, κυρτή.

▲

2. Παραγωγή τύπου Cobb-Douglas (C-D)

Θα μελετήσουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης του κέρδους με ανταγωνιστικές τιμές των συντελεστών και του προϊόντος, και με συνάρτηση παραγωγής τύπου C-D :

$$Q = K^{\alpha}L^{\beta} \Rightarrow \Pi = pK^{\alpha}L^{\beta} - vK - wL \quad \text{με} \quad \alpha > 0,\ \beta > 0$$

Η συνάρτηση παραγωγής έχει την ιδιότητα ότι αν αυξήσουμε αμφότερα τα $\{K,L\}$ κατά το ίδιο ποσοστό, π.χ. πολλαπλασιάζοντας με τον ίδιο συντελεστή $t > 1$, τότε η παραγωγή θα αυξηθεί κατά τον συντελεστή:

$$Q(tK,tL) = (tK)^{\alpha}(tL)^{\beta} = t^{\alpha+\beta}Q(K,L)$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. $\alpha + \beta < 1$, ***φθίνουσα απόδοσης κλίμακας.*** Η συνάρτηση παραγωγής αυξάνει κατά μικρότερο ποσοστό. Η συνάρτηση κέρδους είναι κοίλη, γνήσια κοίλη στο εσωτερικό: $K > 0, L > 0$. Το μέγιστο κέρδος θα βρίσκεται στο στάσιμο.

2. $\alpha + \beta > 1$, ***αύξουσα απόδοσης κλίμακας.*** Η συνάρτηση παραγωγής αυξάνει κατά μεγαλύτερο ποσοστό. Η συνάρτηση κέρδους έχει στάσιμο που είναι σαγματικό και επομένως δεν είναι μέγιστο. Το μέγιστο κέρδος βρίσκεται στο άπειρο.

3. $\alpha + \beta = 1$, ***σταθερή απόδοσης κλίμακας.*** Η συνάρτηση παραγωγής αυξάνει κατά το ίδιο ποσοστό. Η συνάρτηση κέρδους είναι κοίλη, όχι γνήσια. Γενικά το μέγιστο βρίσκεται στο μηδέν ή στο άπειρο, εκτός αν επικρατούν κάποιες πολύ ειδικές συνθήκες οπότε έχουμε ολόκληρη ακτίνα στάσιμων σημείων με μέγιστη τιμή μηδενική.

Στο παράρτημα αυτού του κεφαλαίου δίνουμε την γενική λύση στα προβλήματα με παραγωγή τύπου C-D

Παρατήρηση. Σε προβλήματα μεγιστοποίησης κέρδους ακόμη και σε συνθήκες Κυρτού Προγραμματισμού, η λύση μπορεί να είναι συνοριακή, δηλαδή κάποιος συντελεστής να μη χρησιμοποιείται ως σχετικά ακριβός ή και αμφότεροι να μην χρησιμοποιούνται αν είναι σχετικά ακριβοί. Σαυτή την περίπτωση δεν θα ικανοποιούνται οι συνθήκες στασιμότητας, αλλά συνοριακές συνθήκες, όπως θα δούμε παρακάτω.

3. Δύο εκροές-μια εισροή

Θεωρούμε τώρα μια σύνθετη παραγωγή με δύο παραγόμενα προϊόντα σε ποσότητες: $\{X,Y\}$, με κόστος:

$$C(X,Y)$$

Θα υποθέσουμε ανταγωνιστικές αγορές στα προϊόντα, με την έννοια ότι οι μοναδιαίες τιμές τους $\{v,w\}$ είναι εξωγενώς καθορισμένες. Έτσι έχουμε έσοδο:

$$R = vX + wY$$

και το πρόβλημα μεγιστοποίησης του κέρδους τίθεται στη μορφή:

$$\max_{X,Y}\{\Pi = R - C = vX + wY - C(X,Y) \,||\, X \geq 0,\ Y \geq 0\}$$

Υποθέτοντας ότι στο μέγιστο κέρδος παράγονται αμφότερα τα προϊόντα: $\{X > 0,\ Y > 0\}$, η λύση θα είναι εσωτερική και επομένως θα ικανοποιεί την συνθήκη στασιμότητας:

$$\left.\begin{matrix}\Pi_X = 0\\ \Pi_Y = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}R_X = C_X\\ R_Y = C_Y\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}v = C_X\\ w = C_Y\end{matrix}\right\}$$

Δηλαδή:

η παραγωγή του κάθε προϊόντος αυξάνει μέχρι το αύξον οριακό του κόστος να ανέβει στο ύψος της μοναδιαίας τιμής του.

Παρατήρηση. Οι συνθήκες δεύτερης τάξης αυτές είναι αντίθετες από τις συνθήκες κυρτότητας της συνάρτησης κόστους διότι το κόστος εμφανίζεται με αρνητικό πρόσημο. Επομένως στο στάσιμο θα πρέπει να ικανοποιούνται και οι συνθήκες:

$$\Pi'' \leq 0 \quad \text{ή ισοδύναμα:} \quad C'' \geq 0 \Rightarrow \{C_{XX} \geq 0,\ C_{YY} \geq 0,\ \Delta_C = C_{XX}C_{YY} - C_{XY}^2 \geq 0\}$$

Μάλιστα, αν η συνάρτηση κόστους ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες σόλα τα σημεία τότε θα είναι κυρτή, οπότε η συνάρτηση κέρδους θα είναι κοίλη και το στάσιμο θα είναι ολικό μέγιστο. ▲

Στις παραπάνω εξισώσεις εμφανίζονται οι μεταβλητές επιλογής $\{X, Y\}$ και οι παράμετροι $\{v, w\}$, οπότε η λύση θα εξαρτάται από τις παραμέτρους. Συμβολίζοντας με μικρά γράμματα τις παραμέτρους καθώς και τις βέλτιστες ποσότητες των διαφόρων μεγεθών, η λύση θα παριστάνεται με συναρτήσεις:

$$\left.\begin{array}{l} x = X(v, w) \\ y = Y(v, w) \end{array}\right\}$$: **προσφορά προϊόντων** (product supply)

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε και το αντίστοιχο κέρδος:

$\pi = \Pi(x, y) = vx + wy - C(x, y) = \pi(v, w)$: **μέγιστο κέρδος** (maximal profit)

Παρατήρηση. Όπως και προηγουμένως, διακρίνουμε τις δύο συναρτήσεις κέρδους:

$$\Pi(X, Y) = vX + wY - C(X, Y), \quad \pi(v, w) = \Pi(x, y) = vx + wy - C(x, y)$$

Η πρώτη είναι η **άμεση συνάρτηση κέρδους** (direct profit function). Για τις δεδομένες τιμές $\{v, w\}$, εκφράζει το δυνητικό κέρδος, αν τα προϊόντα παραχθούν στις *τυχαίες ποσότητες* $\{X, Y\}$. Η δεύτερη είναι η **έμμεση συνάρτηση κέρδους** ή **συνάρτηση μέγιστου κέρδους.** Εκφράζει το πραγματοποιούμενο κέρδος, όπου τα προϊόντα παράγονται στις *βέλτιστες ποσότητες* $\{x, y\}$ που μεγιστοποιούν το κέρδος, για τις δεδομένες τιμές $\{v, w\}$.

▲

4. Συμφέρουσες τιμές

Σε ορισμένες περιπτώσεις ένα προϊόν μπορεί να μην παράγεται, αν η τιμή του δεν είναι συμφέρουσα, δηλαδή αν είναι «χαμηλή» σε σχέση με το ελάχιστο οριακό του κόστος. Τώρα εκτός των συνθηκών στασιμότητας θα έχουμε και τις γνωστές συνοριακές συνθήκες 1ης τάξης, οπότε διακρίνουμε τέσσερες περιπτώσεις, ως εξής:

1. Λύση εσωτερική στάσιμη. **Παράγονται αμφότερα τα προϊόντα:**

$$\left.\begin{array}{l} \Pi_X = 0 \text{ με } X > 0 \\ \Pi_Y = 0 \text{ με } Y > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v = C_X \text{ με } x > 0 \\ w = C_Y \text{ με } y > 0 \end{array}\right\}$$

2. Λύση συνοριακή με $X = 0$. **Παράγεται μόνο το Y προϊόν:**

$$\left.\begin{array}{l} X = 0 \text{ με } \Pi_X \le 0 \\ \Pi_Y = 0 \text{ με } Y > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \text{ με } v \le C_X \\ w = C_Y \text{ με } y > 0 \end{array}\right\}, \text{ η τιμή } v \text{ του } X \text{ είναι χαμηλή}$$

3. Λύση συνοριακή με $Y = 0$. **Παράγεται μόνο το X προϊόν:**

$$\left.\begin{array}{l} \Pi_X = 0 \text{ με } X > 0 \\ Y = 0 \text{ με } \Pi_Y \le 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v = C_X \text{ με } x > 0 \\ y = 0 \text{ με } w \le C_Y \end{array}\right\}, \text{ η τιμή } w \text{ του } Y \text{ είναι χαμηλή}$$

4. Λύση συνοριακή με $\{X = 0, Y = 0\}$. **Δεν παράγεται κανένα προϊόν:**

$$\left.\begin{array}{l} X = 0 \text{ με } \Pi_X \le 0 \\ Y = 0 \text{ με } \Pi_Y \le 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \text{ με } v \le C_X \\ y = 0 \text{ με } w \le C_Y \end{array}\right\}, \text{ οι τιμές } \{v, w\} \text{ των } \{X, Y\} \text{ είναι χαμηλές}$$

Το κάθε σύστημα αποτελείται από δύο εξισώσεις που μας δίνουν την λύση, και δύο ανισότητες που πρέπει να ικανοποιούνται για να είναι η λύση αποδεκτή. Μάλιστα αν η συνάρτηση κόστους είναι κυρτή τότε η συνάρτηση κέρδους είναι κοίλη οπότε οιαδήποτε από τις παραπάνω συνθήκες $1^{ης}$ τάξης ικανοποιείται δίνει ολικό μέγιστο. Δεν χρειάζεται να ελέγξουμε τις υπόλοιπες, που σε κάθε περίπτωση δεν θα ικανοποιούνται.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την παραγωγή δύο προϊόντων με συνάρτηση κόστους:

$$C = X + 2Y + X^2 + Y^2 \Rightarrow \{C_X = 1 + 2X,\ C_Y = 2 + 2Y\},\quad X \geq 0,\ Y \geq 0$$

και με μοναδιαίες τιμές $\{v, w\}$. Η συνάρτηση κόστους είναι κυρτή, οπότε οι παραπάνω συνθήκες $1^{ης}$ τάξης δίνουν ολικό μέγιστο του κέρδους. Το πρόβλημα μεγιστοποίησης του κέρδους

$$\max\{\Pi = (vX + wY) - (X + 2Y + X^2 + Y^2) \| X \geq 0, Y \geq 0\}$$

έχει τις παρακάτω λύσεις.

1. Στάσιμη εσωτερική: $\left.\begin{array}{l}\Pi_X = v - 1 - 2X = 0\\ \Pi_Y = w - 2 - 2Y = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x = (v-1)/2\\ y = (w-2)/2\end{array}\right\}$ αν $\left.\begin{array}{l}x > 0\\ y > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}v > 1\\ w > 2\end{array}\right\}$

Αμφότερες οι τιμές είναι συμφέρουσες και παράγονται αμφότερα τα προϊόντα.

2. Συνοριακή με $X = 0$: $\left.\begin{array}{l}X = 0\\ \Pi_Y = w - 2 - 2Y = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x = 0\\ y = (w-2)/2\end{array}\right\}$ αν $\left.\begin{array}{l}\Pi_X = v - 1 \leq 0\\ y > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}v \leq 1\\ w > 2\end{array}\right\}$

Η $X-$τιμή v δεν είναι συμφέρουσα. Παράγεται μόνο το $Y-$προϊόν

3. Συνοριακή με $Y = 0$: $\left.\begin{array}{l}\Pi_X = v - 1 - 2X = 0\\ Y = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x = (v-1)/2\\ y = 0\end{array}\right\}$ αν $\left.\begin{array}{l}x > 0\\ \Pi_Y = w - 2 \leq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}v > 1\\ w \leq 2\end{array}\right\}$

Η $Y-$τιμή w δεν είναι συμφέρουσα. Παράγεται μόνο το $X-$προϊόν

4. Συνοριακή με $\{X = 0,\ Y = 0\}$: $\left.\begin{array}{l}x = 0\\ y = 0\end{array}\right\}$ αν $\left.\begin{array}{l}\Pi_X = (v-1) - 2X = (v-1) \leq 0\\ \Pi_Y = (w-2) - 2Y = (w-2) \leq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}v \leq 1\\ w \leq 2\end{array}\right\}$

Αμφότερες οι τιμές είναι μη συμφέρουσες και δεν παράγεται κανένα προϊόν.

Καλύφτηκαν όλες οι δυνατές τιμές των παραμέτρων $\{v, w\}$. Συμπεραίνουμε ότι παράγονται αμφότερα τα προϊόντα: $\{X > 0,\ Y > 0\}$ μόνο αν οι τιμές τους είναι αρκετά υψηλές: $\{v > 1,\ w > 2\}$. Αυτές είναι οι ελάχιστες συμφέρουσες τιμές.

Παρατήρηση.

1. Εναλλακτικά, διαπιστώνουμε ότι το πρόβλημα είναι του τύπου **χωριζόμενων μεταβλητών:**

$$\Pi = (vX + wY) - (X + 2Y + X^2 + Y^2) = (vX - X - X^2) + (wY - 2Y + Y^2)$$

Είναι ισοδύναμο με τα παρακάτω δύο, και μπορεί να λυθεί χωριστά ως προς X και ως προς Y:

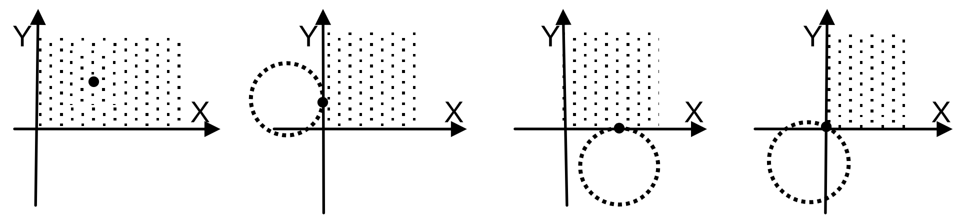
$$\max\{\Pi_1(X) = vX - X - X^2 \| X \geq 0\} \quad \text{και} \quad \max\{\Pi_2(Y) = wY - 2Y + Y^2 \| Y \geq\}$$

Συνδυάζοντας τις λύσεις, βρίσκουμε την λύση του προβλήματος όπως και προηγουμένως.

2. Μπορούμε να βρούμε τη λύση και γραφικά όπως στο παρακάτω σχήμα. Παρατηρούμε καταρχήν ότι η συνάρτηση κέρδους είναι μια παραβολική συνάρτηση σε ολόκληρο το επίπεδο με ολικό μέγιστο στο στάσιμο σημείο, το οποίο όμως δεν είναι πάντοτε στην περιοχή βελτιστοποίησης:

$$x_0 = (v-1)/2,\quad y_0 = (w-2)/2$$

Αν είναι αμφότερα θετικά μας δίνουν την λύση. Γενικότερα, συμπληρώνοντας τα τετράγωνα βρίσκουμε ότι οι ισοσταθμικές είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο το στάσιμο, και με τιμή που μικραίνει καθώς απομακρυνόμαστε. Έτσι ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται το παραπάνω κέντρο το μέγιστο θα βρίσκεται στον μικρότερο κύκλο που συναντάει την θετική περιοχή.



1. $v > 1,\ w > 2$, $x > 0, y > 0$ **2.** $v \leq 1,\ w > 2$, $x = 0, y > 0$ **3.** $v > 1,\ w \leq 2$, $x > 0, y = 0$ **4.** $v \leq 1,\ w \leq 2$, $x = 0, y = 0$

συνοριακά ακρότατα

▲

5. Διαφοροποίηση τιμών

Το προηγούμενο παράδειγμα αφορά συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού όπου οι τιμές των προϊόντων είναι δοσμένες. Στη γενικότερη περίπτωση του ελλιπούς ανταγωνισμού οι τιμές μπορεί να εξαρτώνται από τις ποσότητες σύμφωνα με κάποια εξίσωση ζήτησης, οπότε η συνάρτηση εσόδου θα έχει γενικότερη μορφή. Θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου τα $\{X, Y\}$ αφορούν στη πραγματικότητα ποσότητες του ίδιου προϊόντος οι οποίες διατίθενται σε **δύο διαφορετικές αγορές**, ενδεχόμενα με διαφορετικές μοναδιαίες τιμές, λόγω διαφορετικής ζήτησης. Θα μελετήσουμε ένα τέτοιο πρόβλημα, με έσοδο:

$$R = VX + WY$$

Θα υποθέσουμε ότι η συνάρτηση ζήτησης μπορεί να είναι διαφορετική στις δύο αγορές αλλά **εξαρτάται μόνο από την τιμή στην κάθε αγορά:**

$$V = V(X), \quad W = W(Y)$$

Θα εξετάσουμε δύο προβλήματα βελτιστοποίησης, ως εξής:

1. Μεγιστοποίηση του κέρδους με **διαφοροποίηση τιμών:**

$$\max\{\Pi = R - C = V(X)X + W(Y)Y - C(X, Y)\}$$

2. Μεγιστοποίηση του κέρδους με **ενιαία τιμή:**

$$\max\{\Pi = R - C = V(X)X + W(Y)Y - C(X, Y) \mid V(X) = W(Y)\}$$

Το πρώτο πρόβλημα θα δώσει μεγαλύτερο κέρδος διότι ***δεν έχει περιορισμούς*** *οπότε επιτρέπει ευρύτερη επιλογή συνδυασμών* $\{X, Y\}$. Θα βρούμε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί η λύση του πρώτου προβλήματος υποθέτοντας ότι:

1. Το συνολικό κόστος εξαρτάται μόνο από τη συνολική παραγωγή:

$$C = C(Q) \quad \text{όπου } Q = X + Y$$

2. Στη βέλτιστη λύση **διατίθενται ποσότητες σε αμφότερες τις αγορές**, δηλαδή η λύση είναι εσωτερική και επομένως στάσιμη.

Οι συνθήκες γράφονται:

$$\left.\begin{array}{l}\Pi_X = 0\\ \Pi_Y = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}R_X = C'\\ R_Y = C'\end{array}\right\} \Rightarrow R_X = R_Y = C' > 0$$

διότι το οριακό κόστος C' είναι γνήσια θετικό. Διαπιστώνουμε ότι:

Σε συνθήκες μεγιστοποίησης του κέρδους με διαφοροποίηση τιμών και υποθέτοντας διάθεση του προϊόντος σε αμφότερες τις αγορές, οι ποσότητες διάθεσης θα είναι τέτοιες ώστε το οριακό έσοδο στις δύο αγορές θα είναι το ίδιο, θα είναι γνήσια θετικό και ίσο με το οριακό κόστος παραγωγής.

Παρατήρηση.

1. Αν το οριακό κόστος είναι σταθερό:

$$C(Q) = \alpha Q + \beta \Rightarrow C' = \alpha$$

τότε οι παραπάνω συνθήκες στασιμότητας είναι στην πραγματικότητα οι συνθήκες μεγιστοποίησης του κέρδους χωριστά στην κάθε αγορά. Εξάλλου σαυτή την περίπτωση η συνάρτηση κέρδους είναι **χωριζόμενων μεταβλητών:**

$$\max\{\Pi = V(X)X + W(Y)Y - [\alpha(X + Y)] = [V(X)X - \alpha X] + [W(Y)Y - \alpha Y]$$

οπότε αρκεί να λύσουμε τα απλά προβλήματα βελτιστοποίησης στην κάθε αγορά χωριστά.

2. Αν η λύση είναι συνοριακή, οπότε το προϊόν διατίθεται μόνο στη μια αγορά, π.χ. μόνο στη δεύτερη: $\{X = 0,\ Y > 0\}$, τότε οι συνθήκες γίνονται:

$$\left.\begin{array}{l}\Pi_X(0, Y) \le 0\\ \Pi_Y(0, Y) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}R_X(0) \le C'(Y)\\ R_Y(Y) = C'(Y)\end{array}\right\} \Rightarrow R_X(0) \le R_Y(Y) = C'(Y), \text{ με } R_Y > 0$$

Δηλαδή, λειτουργώντας τη δεύτερη αγορά σε συνθήκη μέγιστου κέρδους το οριακό έσοδο παραμένει μεγαλύτερο από το αρχικό οριακό έσοδο στην πρώτη αγορά, οπότε δεν συμφέρει καθόλου η διάθεση στην πρώτη αγορά.

Παράδειγμα. Με τις παρακάτω γραμμικές συναρτήσεις ζήτησης και κόστους:

$$V = 4 - 2X,\quad W = 5 - Y,\quad C(Q) = 2 + 2Q,$$

η συνάρτηση κέρδους γράφεται :

$$\Pi = VX + WY - C(X,Y) = (4-2X)X + (5-Y)Y - [2 + 2(X+Y)]$$
$$= -2 + 2X + 3Y - 2X^2 - Y^2$$

Είναι χωριζόμενων μεταβλητών κοίλη, με μέγιστο στο στάσιμο:

$$\left.\begin{matrix}\Pi_X = 2 - 4X = 0 \\ \Pi_Y = 3 - 2Y = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0.5,\ v = 3 \\ y = 1.5,\ w = 3.5\end{matrix}\right\} \quad \text{με} \quad \pi = 0.75$$

Η τιμή διάθεσης είναι μικρότερη στη πρώτη αγορά.

▲

Παράδειγμα. Αν θεωρήσουμε μεγιστοποίηση κέρδους χωρίς διαφοροποίηση τιμών τότε θα έχουμε το πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης με ισοτικό περιορισμό:

$$\max\{\Pi(X,Y) \mid V(X) = W(Y)\}$$

Για το συγκεκριμένο πρόβλημα του προηγούμενου παραδείγματος μπορούμε να το λύσουμε με απλή αντικατάσταση από τον περιορισμό:

$$W(X) = V(Y) \Rightarrow (4 - 2X) = (5 - Y) = 0 \Rightarrow Y = 1 + 2X$$

Το κέρδος δίνεται από την κοίλη συνάρτηση:

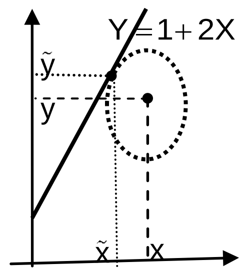
$$\Pi = -2 + 2X + 3(1+2X) - 2(1+2X)^2 - (1+2X)^2$$

και έχει μέγιστο όταν

$$\Pi'(X) = 2 + 6 - 4(1+2X)2 - 2(1+2X)2 = 4 - 12X = 0 \Rightarrow X = 1/3 = 0.33$$

Η λύση είναι

$$\{\tilde{x} = 0.33, \tilde{y} = 1.66\} \quad \text{με} \quad \tilde{v} = \tilde{w} = 3.33 \quad \text{και} \quad \tilde{\pi} = 6/9 = 0.66$$



Παρατήρηση. Η αρχική συνάρτηση κέρδους $\Pi(X,Y)$ είναι βέβαια η ίδια στις δύο περιπτώσεις, με ολικό μέγιστο στη λύση $(x = 1/2, y = 3/2)$ που βρήκαμε προηγουμένως όταν οι τιμές ήταν ελεύθερες να διαφοροποιηθούν. Οι ισοσταθμικές είναι ελλειπτικές, της τετραγωνικής συνάρτησης:

$$\Pi = -2 + 2X + 3Y - 2X^2 - Y^2 = \frac{3}{4} - 2\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(Y - \frac{3}{2}\right)^2$$

Όπως φαίνεται και στο γράφημα, στη δεύτερη περίπτωση που οι τιμές υποχρεωτικά ταυτίζονται, το μέγιστο βρίσκεται στο σημείο επαφής μιας ισοσταθμικής της $\Pi(X,Y)$ με την ευθεία του περιορισμού:

$$Y = 1 + 2X$$

Σε σχέση με την πρώτη περίπτωση, στη δεύτερη που η τιμή υποχρεώνεται να είναι ενιαία:

- **το κέρδος είναι μικρότερο**
- **η μοναδιαία τιμή είναι ενδιάμεση, δηλαδή:**
  1. **αυξάνει στην φτηνή X – αγορά οπότε αντίστοιχα ελαττώνεται η ποσότητα**
  2. **ελαττώνεται στην ακριβή Y – αγορά, οπότε αντίστοιχα αυξάνει η ποσότητα.**

▲

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

6. Βέλτιστη παραγωγή τύπου Cobb-Douglas (C-D)

Θα μελετήσουμε το αρχικό πρόβλημα μεγιστοποίησης του κέρδους με ανταγωνιστικές τιμές των συντελεστών και του προϊόντος, και με συνάρτηση παραγωγής τύπου C-D :

$$Q = K^{\alpha}L^{\beta} \Rightarrow \Pi = pK^{\alpha}L^{\beta} - vK - wL \quad \text{με} \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

Θα εξετάσουμε χωριστά 3 περιπτώσεις

Περίπτωση Ι. $Q = K^{\alpha}L^{\beta}$ με $\alpha + \beta < 1$

Η παραγωγή είναι φθίνουσας απόδοσης κλίμακας. Δηλαδή, αν αυξήσουμε αμφότερα τα $\{K,L\}$ κατά το ίδιο ποσοστό, η παραγωγή θα αυξηθεί κατά γνήσια μικρότερο ποσοστό. Όπως διαπιστώσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο της θεωρίας, η συνάρτηση παραγωγής είναι γνήσια κοίλη και το μέγιστο κέρδος βρίσκεται στη στάσιμη εσωτερική λύση, που υπάρχει:

$$\left.\begin{aligned} pQ_K &= v \\ pQ_L &= w \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} p\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} &= v \\ p\beta K^{\alpha}L^{\beta-1} &= w \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} (\alpha-1)\ln K + \beta \ln L &= \ln(v/p\alpha) \\ \alpha \ln K + (\beta-1)\ln L &= \ln(w/p\beta) \end{aligned}\right\}$$

Παίρνοντας λογαρίθμους κάναμε το σύστημα **γραμμικό**. Η λύση του μας δίνει τις συναρτήσεις ζήτησης:

$$k = p^{\frac{1}{1-s}}\left(\frac{v}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{s-1}-1}\left(\frac{w}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{s-1}}, \quad l = p^{\frac{1}{1-s}}\left(\frac{v}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{s-1}}\left(\frac{w}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{s-1}-1}, \text{ όπου } s = \alpha + \beta < 1$$

Τώρα η ζήτηση του κάθε συντελεστή είναι φθίνουσα συνάρτηση των τιμών αμφοτέρων των συντελεστών. Αντικαθιστώντας βρίσκουμε τη συνάρτηση προσφοράς του προϊόντος, και τη συνάρτηση μέγιστου κέρδους:

$$q = p^{\frac{s}{1-s}}\left(\frac{v}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{s-1}}\left(\frac{w}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{s-1}}, \quad \pi = (1-s)p^{\frac{s}{1-s}}\left(\frac{v}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{s-1}}\left(\frac{w}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{s-1}}$$

Περίπτωση ΙΙ. $Q = K^{\alpha}L^{\beta}$ με $\alpha + \beta > 1$

Η παραγωγή είναι αύξουσας απόδοσης κλίμακας. Δηλαδή, αν αυξήσουμε αμφότερα τα $\{K,L\}$ κατά το ίδιο ποσοστό, η παραγωγή θα αυξηθεί κατά γνήσια μεγαλύτερο ποσοστό. Όπως διαπιστώσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο η συνάρτηση παραγωγής δεν είναι κοίλη. Το παραπάνω στάσιμο του κέρδους ισχύει αλλά τώρα είναι σαγματικό και δεν δίνει μέγιστο. Το μέγιστο βρίσκεται στο άπειρο. Πράγματι αν π.χ. χρησιμοποιήσουμε ίση ποσότητα εργασίας και κεφαλαίου: $L = K$, το κέρδος θα είναι:

$$\Pi = pK^{\alpha+\beta} - (w+v)K \to \infty \quad \text{όταν } K \to +\infty$$

διότι στο άπειρο υπερισχύει ο όρος με τον υψηλότερο βαθμό $\alpha + \beta > 1$. Δηλαδή, το κέρδος αυξάνει απεριόριστα καθώς $L = K \to +\infty$.

Περίπτωση ΙΙΙ. $Q = K^{\alpha}L^{\beta}$, $\alpha + \beta = 1$.

Η παραγωγή είναι σταθερής απόδοσης κλίμακας. Δηλαδή, αν αυξήσουμε αμφότερα τα $\{K,L\}$ κατά το ίδιο ποσοστό, η παραγωγή θα αυξηθεί κατά το ίδιο αυτό ποσοστό. Η συνάρτηση κέρδους είναι κοίλη, όχι γνήσια και επομένως τα στάσιμα σημεία, αν υπάρχουν δίνουν μέγιστο. Οι γενικές λύσεις που βρήκαμε παραπάνω για στάσιμο δεν ορίζονται διότι έχουμε $s = \alpha + \beta = 1$. Πρέπει να ξαναδούμε τις εξισώσεις στασιμότητας:

$$\left.\begin{aligned} (\alpha-1)\ln K + \beta \ln L &= \ln(v/p\alpha) \\ \alpha \ln K + (\beta-1)\ln L &= \ln(w/p\beta) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -\beta \ln K + \beta \ln L &= \ln(v/p\alpha) \\ \alpha \ln K - \alpha \ln L &= \ln(w/p\beta) \end{aligned}\right\}, \qquad \text{διότι } \{\alpha - 1 = -\beta,\ \beta - 1 = -\alpha\}$$

Οι δύο εξισώσεις γράφονται:

$$\ln\frac{L}{K} = \frac{1}{\beta}\ln\frac{v}{p\alpha}, \quad \ln\frac{L}{K} = -\frac{1}{\alpha}\ln\frac{w}{p\beta}, \quad \text{με } \alpha + \beta = 1$$

Έχουν το ίδιο αριστερό μέρος, οπότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, ως εξής:

ΙΙΙ.1 Αν τα δεξιά μέρη είναι επίσης ίσα, δηλαδή αν ικανοποιείται η συνθήκη:

$$\frac{1}{\beta}\ln\frac{v}{p\alpha} = -\frac{1}{\alpha}\ln\frac{w}{p\beta} \Rightarrow \left(\frac{v}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w}{\beta}\right)^{\beta} = p \quad \text{με } \alpha+\beta=1$$

τότε οι δύο εξισώσεις συμπίπτουν και οι στάσιμες λύσεις μέγιστου κέρδους σχηματίζουν μια ολόκληρη ακτίνα. Όλα τα σημεία της ακτίνας δίνουν ολικό μέγιστο διότι η συνάρτηση είναι κοίλη, με την ίδια τιμή, που θα πρέπει να είναι μηδενική όπως είναι και στο σημείο $(0,0)$ που ανήκει στην ακτίνα. Η παραγωγή δεν είναι συμφέρουσα.

ΙΙΙ.2 Αν τα δεξιά μέρη δεν είναι ίσα, δηλαδή αν δεν ικανοποιείται η παραπάνω συνθήκη, οπότε θα έχουμε:

$$\left(\frac{v}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w}{\beta}\right)^{\beta} > p \quad \text{ή} \quad \left(\frac{v}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w}{\beta}\right)^{\beta} < p$$

τότε δεν υπάρχουν στάσιμα και το μέγιστο βρίσκεται στο σύνορο $(0,0)$ με μηδενικό κέρδος, ή στο άπειρο με άπειρο κέρδος.

7. Εξωτερικότητες

Βασικό χαρακτηριστικό των παραγόμενων προϊόντων ως αγαθών είναι ότι η παραγωγή τους έχει κόστος και η διάθεσή τους αποφέρει έσοδο. Ενίοτε έχουμε και παραγόμενα προϊόντα που είναι **μη αγαθά.** Ένα τέτοιο προϊόν είναι π.χ. ο *ρύπος*. Θεωρούμε μια παραγωγή η οποία εκτός από ένα αγαθό X παράγει και ρύπο Y. Το κόστος της παραγωγής είναι αύξουσα συνάρτηση της ποσότητας του παραγόμενου αγαθού αλλά φθίνουσα συνάρτηση της ποσότητας του παραγόμενου ρύπου, τουλάχιστον στην αρχή, π.χ. διότι η ελάττωσή του απαιτεί την χρήση αντιρρυπαντικής τεχνολογίας που αυξάνει το κόστος:

$$C = C(X,Y) \quad \text{με} \quad \{C_X > 0,\ C_Y < 0\}$$

Με μοναδιαία τιμή του προϊόντος p, το έσοδο από την διάθεσή του θα είναι:

$$R = pX$$

Το πρόβλημα μεγιστοποίησης του κέρδους μας δίνει τις συνθήκες στασιμότητας:

$$\max_{X,Y}\{\Pi = R - C = pX - C(X,Y)\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} R_X = C_X \\ R_Y = C_Y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} p = C_X \\ 0 = C_Y \end{matrix}\right\}$$

Δηλαδή, η μονάδα θα παράγει επιπλέον ρύπο εφόσον αυτό μειώνει το κόστος μέχρι του επιπέδου που δεν επηρεάζει πλέον το κόστος. Εκφράζουμε το παραπάνω λέγοντας ότι η παραγωγή του ρύπου δεν επιφέρει κόστος. Στην πραγματικότητα η παραγωγή του ρύπου έχει κόστος σε άλλες δραστηριότητες οπότε λέμε ότι όσον αφορά την συγκεκριμένη μονάδα το κόστος έχει **εξωτερικευτεί.** Η επιβολή **πρόστιμου** t ανά μονάδα εκπομπής ρύπου είναι ένας έμμεσος τρόπος **εσωτερίκευσης** του κόστους. Τώρα το έσοδο θα είναι:

$$R = pX - tY$$

και η μεγιστοποίηση του κέρδους θα μας δώσει τις συνθήκες:

$$\max_{X,Y}\{\Pi = R - C = pX - tY - C(X,Y)\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} R_X = C_X \\ R_Y = C_Y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} p = C_X \\ t = -C_Y \end{matrix}\right\}$$

Τώρα η μονάδα θα αυξάνει τον ρύπο μέχρι το οριακό του όφελος $-C_Y$ να αντισταθμίζεται από το οριακό του κόστος t που θα πρέπει να συσχετίζεται με το προκαλούμενο εξωτερικό κόστος.

8. Εισροές-Εκροές

Γενικά, μια σύνθετη παραγωγική διαδικασία μπορεί να αφορά πολλές εισροές και πολλές εκροές. Τις παριστάνουμε συνήθως με κάτω δείκτες, π.χ.

$$\{X_1, X_2, \cdots\},\ \{Y_1, Y_2 \cdots\}$$

για τις εισροές και εκροές αντίστοιχα, με αντίστοιχες τιμές σε συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού:

$$\{w_1, w_2, \cdots\},\ \{p_1, p_2 \cdots\}$$

Ενδεικτικά θεωρούμε μία παραγωγική διαδικασία με μία εισροή και δύο εκροές, και με αντίστοιχες συναρτήσεις παραγωγής:

$$Y_1 = Q_1(X_1),\ \ Y_2 = Q_2(X_1)$$

Το πρόβλημα μεγιστοποίησης του κέρδους τίθεται στη μορφή:

$$\max_{X_1}\{\Pi = p_1Q_1(X_1) + p_2Q_2(X_1) - w_1X_1 \mid X_1 \geq 0\}$$

Είναι ένα πρόβλημα ελεύθερης βελτιστοποίησης με μία ανεξάρτητη μεταβλητή, δηλαδή μιας διάστασης. Εναλλακτικά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σύνολο των μεταβλητών, εισροές και εκροές, συνδέονται μεταξύ τους μέσω των σχέσεων παραγωγής, οπότε η μεγιστοποίηση του κέρδους μπορεί να διατυπωθεί εναλλακτικά στη μορφή:

$$\max_{X_1,Y_1,Y_2}\left\{\Pi = p_1Y_1 + p_2Y_2 - w_1X_1 \mid Y_1 = Q_1(X_1),\ Y_2 = Q_2(X_1),\ X_1 \geq 0\right\}$$

Τώρα έχουμε μια ισοδύναμη διατύπωση ως ένα πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης με τρεις μεταβλητές και δύο ισοτικούς περιορισμούς, δηλαδή πάλι μιας διάστασης. Η δεύτερη αυτή μορφή μπορεί να διατυπωθεί ώστε να καλύψει και τη γενικότερη περίπτωση των ανισοτικών περιορισμών στην παραγωγή:

$$\max_{X_1,Y_1,Y_2}\left\{\Pi = p_1Y_1 + p_2Y_2 - w_1X_1 \mid Y_1 \leq Q_1(X_1),\ Y_2 \leq Q_2(X_1),\ X_1 \geq 0\right\}$$

Μπορεί να γενικευτεί και περαιτέρω σε μια διατύπωση που δεν κάνει καταρχήν διάκριση μεταξύ εισροών και εκροών, θεωρώντας τις εισροές ως αρνητικές εκροές. Πχ στο παραπάνω χρησιμοποιούμε τις μεταβλητές:

$Z_1 = Y_1,\ Z_2 = Y_2,\ Z_3 = -X_1$ με μοναδιαίες τιμές: $p_1, p_2, p_3 = -w$

Τώρα το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί στη γενική μορφή ενός προβλήματος **Μαθηματικού Προγραμματισμού** με τρεις μεταβλητές και τρεις ανισοτικούς περιορισμούς ως εξής:

$$\max_{Z_1,Z_2,Z_3}\left\{\Pi = p_1Z_1 + p_2Z_2 + p_3Z_3 \mid E_1(Z_1,Z_3) \leq 0,\ E_2(Z_2,Z_3) \leq 0,\ Z_3 \leq 0\right\}$$

όπου: $E_1 = Z_1 - Q_1(-Z_3),\quad E_2 = Z_2 - Q_2(-Z_3)$

Η διατύπωση αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην γενική περίπτωση των σύνθετων παραγωγικών διαδικασιών που αφορούν κλάδους της οικονομίας στις οποίες κάποια προϊόντα μπορεί να είναι εισροές σε κάποια τμήματα της παραγωγής και εκροές σε κάποια άλλα. Οι μεταβλητές Z_i αντιστοιχούν τώρα στις καθαρές εκροές/εισροές όσον αφορά το σύνολο της παραγωγής. Τελικά μια **καθαρή εκροή** (net output) θα είναι γνήσια θετικό μέγεθος και θα συμβάλει στο έσοδο ενώ μια **καθαρή εισροή** (net input) θα είναι γνήσια αρνητικό μέγεθος και θα συμβάλει στο κόστος.