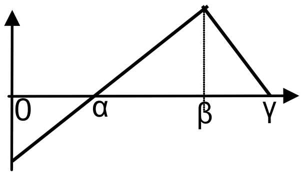
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Ι. **Σεπτέμβριος 2020**

διάρκεια εξέτασης: 1.30 ώρες

1. (4 μονάδες)

α). Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f(x)$ με τιμή: $f(0)=0$, της οποίας η παράγωγος $f'(x)$ έχει το παραπλεύρως γράφημα, στο διάστημα: $0 \le x \le \gamma$. Να βρεθούν τα σημεία:



1. καμπής

2. μέγιστης τιμής

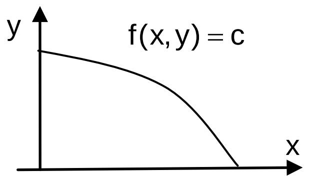
β). Να διαπιστωθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=x-2\sqrt{x}$ είναι κυρτή, και να βρεθεί η μέγιστη τιμή της στο διάστημα: $0 \le x \le 1$.

γ). Να σκιαγραφηθεί και να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής μεταξύ των γραφημάτων των συναρτήσεων $\{g(x)=x,\ h(x)=x^{-1}\}$ για $x \ge 0$, και του $y-$άξονα.

2. (4 μονάδες)

α) Οι εξισώσεις: $\{xy=-v,\ 2x+y=w\}$ ορίζουν πλεγμένα τα $\{x,y\}$ ως συναρτήσεις των $\{v,w\}$. Να βρεθεί η μερική παράγωγος του x ως προς v.

β) Μια συνάρτηση $f(x,y)$ είναι $x-$φθίνουσα και έχει ισοσταθμικές όπως στο παραπλεύρως σχήμα. Να διερευνηθεί η μονοτονία της ως προς y και να σκιαγραφηθούν η διανυσματική κλίση και η πάνω σταθμική της.



γ) Το σημείο $\{x=1, y=2\}$ είναι το (περιορισμένο) στάσιμο της συνάρτησης: $f(x,y)=2x+y$, με τον περιορισμό: $g(x,y)=xy=2$, στη θετική περιοχή: $\{x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

1. Να υπολογιστεί ο πολλαπλασιαστής Lagrange

2. Να χαρακτηριστεί ως ακρότατο, και αναλυτικά και γραφικά

3.(1 μονάδα)

α) Αν το εθνικό εισόδημα Y μειωθεί 3%, και ο πληθυσμός L αυξηθεί 1%, να εκτιμηθεί η μεταβολή του κατά κεφαλή εισοδήματος $y=Y/L$.

β) Μια οικογένεια έχει εισοδήματα από εργασία και από ενοίκια. Αν το εισόδημα A από εργασία αυξηθεί 3% και το εισόδημα B από ενοίκια ελαττωθεί 3%, να εκτιμηθεί η μεταβολή του οικογενειακού εισοδήματος $C=A+B$.

4. (1 μονάδα)

Μια επιχείρηση μπορεί να διαθέσει το ίδιο προϊόν σε διαφορετικές αγορές, σε ποσότητες $\{X,Y\}$ αντίστοιχα, με συνολικό κόστος $C=2+2(X+Y)$, και εξισώσεις ζήτησης: $V=1-2X$ και $W=4-Y$, όπου $\{V,W\}$ είναι οι αντίστοιχες μοναδιαίες τιμές.

Η επιχείρηση λειτουργεί μεγιστοποιώντας το κέρδος: $\Pi(X,Y)=VX+WY-C(X,Y)$.

Να υπολογιστούν οι τιμές διάθεσης και το κέρδος, υποθέτοντας ότι επιτρέπεται διαφοροποίηση τιμών στις δύο αγορές

ΤΕΛΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Ι. **Σεπτέμβριος 2020**

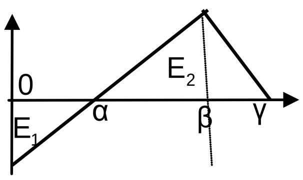
<u>διάρκεια εξέτασης: 1.30 ώρες</u>

<u>1</u> (4 μονάδες)

α). Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f(x)$ με τιμή: $f(0)=0$, της οποίας η παράγωγος $f'(x)$ έχει το παραπλεύρως γράφημα, στο διάστημα: $0 \le x \le \gamma$. Να βρεθούν τα σημεία:

1. καμπής

2. μέγιστης τιμής



<u>Λύση.</u>

1. Έχει σημείο καμπής το $x=\beta$, όπου αλλάζει η μονοτονία της παραγώγου από αύξουσα σε φθίνουσα, οπότε η συνάρτηση αλλάζει κυρτότητα από κυρτή σε κοίλη.

2. Η συνάρτηση είναι φθίνουσα μέχρι το $x=\alpha$ διότι έχει αρνητική παράγωγο, και στη συνέχεια γίνεται αύξουσα διότι έχει θετική παράγωγο. Επομένως για το μέγιστο συγκρίνουμε την τιμή $f(0)=0$ με την τιμή της στο $x=\gamma$ που είναι γνήσια θετική: $f(\gamma)>0$, διότι σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$f(\gamma)=f(\gamma)-f(0)=\int_0^\gamma f'(x)dx=-E_1+E_2>0$$ **, προσημασμένο εμβαδό**

μεταξύ καμπύλης $f'(x)$ και του $x-$ άξονα

Επομένως το μέγιστο βρίσκεται στο δεξιό σύνορο: $x=\gamma$.

Παρατήρηση. Αντί του γραφήματος μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τα μόνα τοπικά μέγιστα είναι τα δύο συνοριακά $\{0,\gamma\}$, και να συγκρίνουμε τις αντίστοιχες τιμές όπως παραπάνω

▲

β). Να διαπιστωθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=x-2\sqrt{x}$ είναι κυρτή, και να βρεθεί η μέγιστη τιμή της στο διάστημα: $0 \le x \le 1$.

<u>Λύση.</u> Είναι κυρτή ως άθροισμα της κυρτής (αρνητική κοίλης): $-2\sqrt{x}$ και της γραμμικής κυρτής: $-x$. Εξάλλου η δεύτερη παράγωγος είναι θετική:

$$f'(x)=1-x^{-1/2},\quad f''(x)=x^{-3/2}/2>0$$

Ως κυρτής, το στάσιμο αν υπάρχει θα δίνει ελάχιστο, ενώ η μέγιστη τιμή της θα βρίσκεται στο σύνορο:

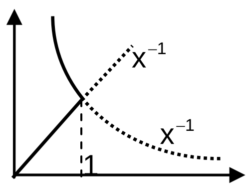
$$\{f(0)=0,\ f(1)=1-2\sqrt{1}=-1\} \Rightarrow \max f:\ f^*=f(0)=0$$ είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

▲

γ). Να σκιαγραφηθεί και να υπολογιστεί το εμβαδό της περιοχής μεταξύ των γραφημάτων των συναρτήσεων $\{g(x)=x,\ h(x)=x^{-1}\}$ για $x \ge 0$, και του $y-$άξονα.

<u>Λύση</u>. Τα γραφήματα είναι όπως παραπλεύρως, και οι δύο συναρτήσεις τέμνονται στο σημείο:

$$g(x)=h(x) \Rightarrow x=\frac{1}{x} \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1$$



Η περιοχή βρίσκεται μεταξύ των δύο καμπύλων στο διάστημα: $0 \le x \le 1$, και το εμβαδό δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 [h(x)-g(x)dx=\int_0^1 x^{-1}dx-\int_0^1 xdx=+\infty$$

διότι, ως γνωστόν, το πρώτο ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει

▲

2. (4 μονάδες)

α) Οι εξισώσεις: $\{xy=-v,\ 2x+y=w\}$ **ορίζουν πλεγμένα τα** $\{x,y\}$ **ως συναρτήσεις των** $\{v,w\}$. **Να βρεθεί η μερική παράγωγος του** x **ως προς** v.

Λύση 1. Με τους τύπους πλεγμένης παραγώγισης:

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y,v,w)=xy+v=0 \\ g(x,y,v,w)=2x+y-w=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(v,y)}}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}}=-\frac{\begin{vmatrix} f_v & f_y \\ g_v & g_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & x \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}=-\frac{1}{y-2x}=\frac{1}{2x-y}$$

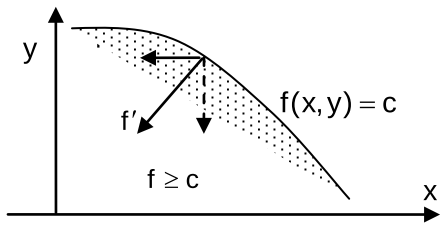
Λύση 2. Με πλεγμένη παραγώγιση ως προς v, με σταθερό w:

$$\left.\begin{array}{l} xy=-v \\ 2x+y=w \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_v y+xy_v=-1 \\ 2x_v+y_v=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_v y+x(-2x_v)=-1 \\ y_v=-2x_v \end{array}\right\} \Rightarrow x_v y-2x_v x=-1 \Rightarrow x_v=\frac{1}{2x-y}$$

Λύση 3. Λύνοντας τις εξισώσεις αλγεβρικά ως προς $\{x,y\}$ για να βρούμε την $x=x(v,w)$.

▲

β) Μια συνάρτηση $f(x,y)$ **είναι** $x-$**φθίνουσα και έχει ισοσταθμικές όπως στο παραπλεύρως σχήμα. Να διερευνηθεί η μονοτονία της ως προς** y **και να σκιαγραφηθούν η διανυσματική κλίση και η πάνω σταθμική της συνάρτησης.**



Λύση. Η κλιση της ισοσταθμικής είναι αρνητική, και ο τύπος πλεγμένης παραγώγισης μας δίνει:

$$f(x,y)=c \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}<0 \Rightarrow \frac{f_x}{f_y}>0$$

Οι δύο μερικές παράγωγοι πρέπει να έχουν το ίδιο πρόσημο, και επομένως η συνάρτηση θα είναι και $y-$φθίνουσα. Η διανυσματική κλίση δείχνει κάτω αριστερά προς την πάνω σταθμική. Εξάλλου η τιμή της συνάρτησης πρέπει να αυξάνει όταν ελαττώνεται το x ή το y.

▲

γ) Το σημείο $\{x=1, y=2\}$ **είναι το (περιορισμένο) στάσιμο της συνάρτησης:** $f(x,y)=2x+y$, **με τον περιορισμό:** $g(x,y)=xy=2$, **στη θετική περιοχή:** $\{x\ge 0,\ y\ge 0\}$.

1. Να υπολογιστεί ο πολλαπλασιαστής Lagrange

2. Να χαρακτηριστεί ως περιορισμένο ακρότατο, και αναλυτικά και γραφικά

Λύση. Θα ικανοποιεί τις συνθήκες περιορισμένης στασιμότητας. Πράγματι:

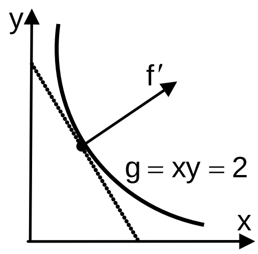
$$\left\{\frac{f_x}{g_x}=\frac{f_y}{g_y}, g=c\right\} \Rightarrow \left\{\frac{2}{y}=\frac{1}{x}, xy=2\right\} \Rightarrow \{x=1, y=2\}$$

Ο πολλαπλασιαστής Lagrange δίνεται από τον κοινό λόγο: $\lambda=\frac{f_x}{g_x}=\frac{2}{y}=\frac{2}{2}=1$

οπότε η συνάρτηση Lagrange γράφεται:

$$L=f+\lambda(c-g)=2x+y+(2-xy)=-xy+2x+y+2$$

Ο πλαισιωμένος Εσσιανός πίνακας της συνάρτησης Lagrange στο σημείο είναι θετικά ορισμένος διότι έχει ορίζουσα αρνητική:



$$\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & y & x \\ y & 0 & -1 \\ x & -1 & 0 \end{vmatrix}=-yx+x(-y)=-2xy=-4<0$$

Επομένως το σημείο είναι **(γνήσιο) περιορισμένο τοπικό ελάχιστο.** Γραφικά διαπιστώνουμε ότι στην πραγματικότητα είναι γνήσιο περιορισμένο **ολικό** ελάχιστο, διότι ο περιορισμός $g=xy=2$, βρίσκεται **εξολοκλήρου** στην πάνω σταθμική της αντικειμενικής συνάρτησης.

▲

3.(1 μονάδα)

α) Αν το εθνικό εισόδημα Y μειωθεί 3%, και ο πληθυσμός L αυξηθεί 1%, να εκτιμηθεί η μεταβολή του κατά κεφαλή εισοδήματος $y = Y/L$.

β) Μια οικογένεια έχει εισοδήματα από εργασία και από ενοίκια. Αν το εισόδημα A από εργασία αυξηθεί 3% και το εισόδημα B από ενοίκια ελαττωθεί 3%, να εκτιμηθεί η μεταβολή του οικογενειακού εισοδήματος $C = A + B$.

Λύση

α) Στη διαίρεση οι ποσοστιαίες μεταβολές, (όπως και οι ελαστικότητες), αφαιρούνται. Επομένως το κατά κεφαλή εισόδημα θα μεταβληθεί κατά:

$\%dy = \%dY - \%dL = -3 - (+1) = -4\%$, δηλαδή θα μειωθεί κατά 4%

β) Δεν υπολογίζεται χωρίς να ξέρουμε την συμμετοχή των εισοδημάτων στο συνολικό εισόδημα, διότι οριακά, η σχετική και η ποσοστιαία μεταβολή αθροίσματος γράφεται

$$dC = dA + dB \Rightarrow \frac{dC}{C} = \frac{A}{C}\frac{dA}{A} + \frac{B}{C}\frac{dB}{B} \Rightarrow \%dC = \frac{A}{C}(\%dA) + \frac{B}{C}(\%dB)$$

Π.χ. θα αυξηθεί 3% αν το εισόδημα από ενοίκια είναι μηδενικό, θα ελαττωθεί 3% αν το εισόδημα από εργασία είναι μηδενικό

▲

4. (1 μονάδα)

Μια επιχείρηση μπορεί να διαθέσει το ίδιο προϊόν σε διαφορετικές αγορές, σε ποσότητες $\{X, Y\}$ αντίστοιχα, με συνολικό κόστος $C = 2 + 2(X + Y)$, και εξισώσεις ζήτησης: $V = 1 - 2X$ και $W = 4 - Y$, όπου $\{V, W\}$ είναι οι αντίστοιχες μοναδιαίες τιμές.

Η επιχείρηση λειτουργεί μεγιστοποιώντας το κέρδος: $\Pi(X, Y) = VX + WY - C(X, Y)$.

Να υπολογιστούν οι τιμές διάθεσης και το κέρδος, υποθέτοντας ότι επιτρέπεται διαφοροποίηση τιμών στις δύο αγορές

Λύση

Η συνάρτηση κέρδους:

$$\Pi = R - C = VX + WY - C = (1 - 2X)X + (4 - Y)Y - [2 + 2(X + Y)] = -2 - X + 2Y - 2X^2 - Y^2$$

είναι παραβολική χωριζομένων μεταβλητών, οπότε έχουμε την ισοδυναμία του αρχικού προβλήματος:

$$\max\{\Pi = -2 - X + 2Y - 2X^2 - Y^2 \,\|\, X \ge 0, Y \ge 0\}$$

με τα δύο παρακάτω:

$$\max\{\Pi_1 = -2 - X - 2X^2 \,\|\, X \ge 0\} \Rightarrow X = 0 \text{ και } \max\{\Pi_2 = 2Y - Y^2 \,\|\, Y \ge 0\} \Rightarrow Y = 1$$

Βρίσκουμε και τις αντίστοιχες μοναδιαίες τιμές: $\{V = 1 - 2\cdot 0 = 1,\ W = 4 - 1 = 3\}$

Δηλαδή θα διατεθεί προιόν **μόνο στη δεύτερη αγορά**, με συνολικό κέρδος:

$$\Pi = VX + WY - C = 1\cdot 0 + 3\cdot 1 - (2 + 0 + 1) = 0$$

ΤΕΛΟΣ