ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Ι. **Ιαν. 2018**

1. (4 μονάδες)

α) Θεωρούμε την εξίσωση $y = \ln x + 2$.

1. Να βρεθούν η εξίσωση μεταβολών και η εξίσωση διαφορικών

2. Να βρεθεί πόσο πρέπει να μεταβληθεί το x από την τιμή $x = 1$ ώστε το y να ελαττωθεί κατά 0.1. Να βρεθεί και η αντίστοιχη εκτίμηση χρησιμοποιώντας διαφορικά.

β) Το y είναι συνάρτηση του x με τιμές $\{y_1 = 4,\ y_2 = 6\}$ όταν $\{x_1 = 2,\ x_2 = 4\}$.
Να εκτιμηθούν η παράγωγος και η ελαστικότητα του x ως προς y

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x) = p\ln(x+1) - x - x^2$ για $x \geq 0$, με $p > 0$

1. Να διερευνηθεί αν είναι κυρτή η κοίλη

2. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου p για τις οποίες η μέγιστη τιμή βρίσκεται στο $x = 0$.

δ) Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = \min\{x^{-1}, x^{-2}\}$ στη θετική περιοχή: $\{x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

1. Να διερευνηθεί γραφικά ή αναλυτικά αν είναι κυρτή ή κοίλη

2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_0^{+\infty} h(x)dx$

2. (4 μονάδες)

α) Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι και η γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης $(1+x)^{\alpha}(1+y)^{\beta}$, στο σημείο $(0,0)$

β) Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x,y) = -\ln x + y$, για $\{x \geq 0, y \geq 0\}$. Να βρεθούν και να σκιαγραφηθούν:

1. Η διανυσματική παράγωγος στο σημείο $(1,2)$

2. Η ισοσταθμική που διέρχεται από το ίδιο σημείο, καθώς και η αντίστοιχη πάνω σταθμική

γ) Να διαπιστωθεί ότι το σημείο $(x = 2, y = 1)$ είναι ελεύθερο στάσιμο της συνάρτησης $f(x,y) = x^2y^2 - 4x - 8y$, και να χαρακτηριστεί.

δ) Θεωρούμε το πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης:

$$\max\{f = xy \,||\, g = 2x + y = c,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

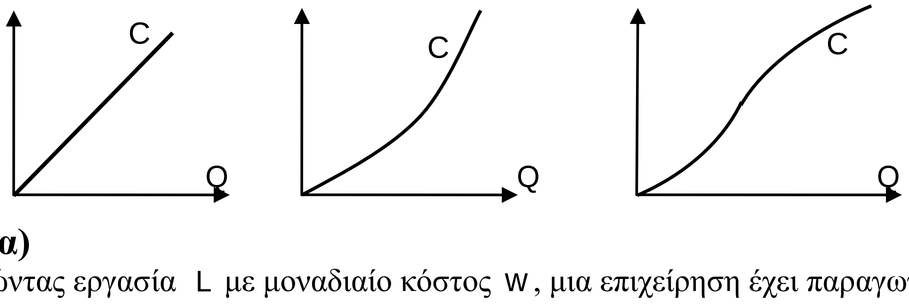
Να βρεθεί η λύση, και να επαληθευτεί η ερμηνεία του πολλαπλασιαστή Lagrange.

3. (1 μονάδα)

Θεωρούμε τρεις συναρτήσεις κόστους: $C = C(Q)$, με τα παρακάτω γραφήματα. Να γίνουν τα αντίστοιχα γραφήματα των συναρτήσεων οριακού, μέσου, και μέσου μεταβλητού κόστους:

$$MC = C'(Q),\ AC = C(Q)/Q,\ AVC = VC(Q)/Q,$$

στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων για την κάθε περίπτωση.



4. (1μονάδα)

Χρησιμοποιώντας εργασία L με μοναδιαίο κόστος w, μια επιχείρηση έχει παραγωγή $Q = \ln(1+L)$ η οποία διατίθεται στην αγορά με μοναδιαία τιμή p. Αν η επιχείρηση λειτουργεί μεγιστοποιώντας το κέρδος:

α) Να βρεθούν οι τιμές των $\{p, w\}$ για τις οποίες θα υπάρξει παραγωγή.

β) Για τις παραπάνω τιμές, να βρεθεί το (μέγιστο) κέρδος π ως συνάρτηση των $\{p, w\}$, και να διερευνηθούν οι ιδιότητες μονοτονίας κυρτότητας και ομογένειας αυτής της συνάρτησης.

ΤΕΛΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Ι. **Ιαν. 2018**

διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

1. (4 μονάδες)

α) Θεωρούμε την εξίσωση $y = \ln x + 2$.

1. Να βρεθούν η εξίσωση μεταβολών και η εξίσωση διαφορικών

2. Να βρεθεί πόσο πρέπει να μεταβληθεί το x **από την τιμή** $x = 1$ **ώστε το** y **να ελαττωθεί κατά** 0.1**. Να βρεθεί και η αντίστοιχη εκτίμηση χρησιμοποιώντας διαφορικά.**

<u>Λύση</u> (Perilipseis I.2, ασκ.2)

$y = f(x) \Rightarrow \{\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)\}, \{dy = f'(x)dx\}$

1. Εξίσωση μεταβολών: $\Delta y = [\ln(x+\Delta x)+2] - [\ln x + 2] = \ln(x+\Delta x) - \ln x$

   Εξίσωση διαφορικών: $dy = dx / x$

2.Μεταβολή: $\{x = 1, \Delta y = -0.1\} \Rightarrow -0.1 = \ln(1+\Delta x) \Rightarrow 1 + \Delta x = e^{-0.1} \Rightarrow \Delta x = e^{-0.1} - 1$

   Διαφορικό: $\{dy = -0.1, x = 1\} \Rightarrow -0.1 = dx/1 \Rightarrow dx = -0.1$

Παρατήρηση. Το διαφορικό συμπίπτει με την γραμμική προσέγγιση της μεταβολής:

$\Delta x = e^{-0.1} - 1 \approx (1-0.1) - 1 = -0.1$

▲

β) Το y **είναι συνάρτηση του** x **με τιμές** $\{y_1 = 4, y_2 = 6\}$ **όταν** $\{x_1 = 2, x_2 = 4\}$**.**

Να εκτιμηθούν η παράγωγος και η ελαστικότητα του x **ως προς** y

<u>Λύση.</u> (test IV, ασκ.12)

Έχουμε: $\Delta x = x_2 - x_1 = 4 - 2 = 2, \ \Delta y = y_2 - y_1 = 6 - 4 = 2$

1. παράγωγος: $m \approx \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{2}{2} = 1$

2. ελαστικότητα: $\varepsilon \approx \dfrac{\Delta x / x}{\Delta y / y} = \dfrac{(x_2 - x_1)/x_1}{(y_2 - y_1)/y_1} = \dfrac{y_1(x_2 - x_1)}{x_1(y_2 - y_1)} = \dfrac{4 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 2$

   εναλλακτικά: $\varepsilon \approx \dfrac{\ln x_2 - \ln_1 x_1}{\ln y_2 - \ln y_1} = \dfrac{\ln 4 - \ln 2}{\ln 6 - \ln 4} = \dfrac{\ln 2}{\ln 3/2}$

▲

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x) = p\ln(x+1) - x - x^2$ **για** $x \geq 0$**, με** $p > 0$

1. Να διερευνηθεί αν είναι κυρτή η κοίλη

2. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου p **για τις οποίες η μέγιστη τιμή βρίσκεται στο** $x = 0$**.**

<u>Λύση</u> (test III, ασκ.7)

1. Η συνάρτηση είναι κοίλη ως άθροισμα της κοίλης $\ln(1+x)$, της κοίλης $-x^2$ (αρνητική κυρτής) και της γραμμικής $-x$. Εναλλακτικά, η 2^{η} παράγωγος είναι αρνητική:

$f'(x) = \dfrac{p}{1+x} - 1 - 2x, \ f'' = -\dfrac{p}{(1+x)^2} - 2 < 0$)

2. Το max κοίλης συνάρτησης είναι πρόβλημα ΚΠ.

Επομένως, η λύση θα είναι στο αριστερό σύνορο: $x = 0 \Leftrightarrow f'(0) \leq 0 \Rightarrow p - 1 \leq 0 \Rightarrow p \leq 1$

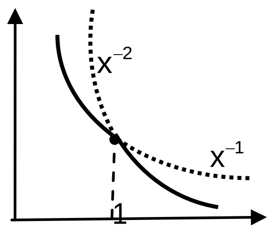
▲

δ) Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=\min\{x^{-1},x^{-2}\}$ **στη θετική περιοχή:** $\{x\ge 0,\ y\ge 0\}$.

1. Να διερευνηθεί γραφικά ή αναλυτικά αν είναι κυρτή ή κοίλη

2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_0^{+\infty} h(x)dx$

<u>Λύση</u> (test I.11)



1. Η συνάρτηση $h(x)$ **δεν είναι ούτε κυρτή ούτε κοίλη.** Το γράφημα της δίνεται από την μαύρη καμπύλη του σχήματος, με σημείο ένωσης:

$$\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x}\Rightarrow x=1,\quad h(x)=\begin{cases} x^{-1}, \text{ αν } x\le 1\\ x^{-2}, \text{ αν } x\ge 1\end{cases}.$$

2. Για το ολοκλήρωμα βρίσκουμε:

$$\int_0^{\infty} h(x)dx=\int_0^1 x^{-1}dx+\int_1^{\infty} x^{-2}dx=\ln x\Big|_0^1-x^{-1}\Big|_1^{\infty}=(0+\infty)-(0-1)=+\infty$$

Το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.

Παρατήρηση. Έχουμε δύο αρνητικές δυνάμεις, όπου η x^{-2} κατεβαίνει πιο απότομα από την x^{-1}. Η $h(x)$ αποτελείται από δύο κυρτά τμήματα, όπου στο καθένα η 1η παράγωγος αυξάνει (γίνεται λιγότερο αρνητική), αλλά στο σημείο ένωσης σχηματίζεται γωνία όπου η 1η παράγωγος μικραίνει (γίνεται περισσότερο αρνητική).

▲

2. (4 μονάδες)

α) Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι και η γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης $(1+x)^{\alpha}(1+y)^{\beta}$, **στο σημείο** $(0,0)$

<u>Λύση</u> (Perilipseis II.5 ασκ.4)

1. Μερικές παράγωγοι: $f(x,y)=(1+x)^{\alpha}(1+y)^{\beta}\Rightarrow\begin{cases} f_x=\alpha(1+x)^{\alpha-1}(1+y)^{\beta}\\ f_y=(1+x)^{\alpha}\beta(1+y)^{\beta-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f_x(0,0)=\alpha\\ f_y(0,0)=\beta\end{cases}$

2. Γραμμική προσέγγιση: $f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y=1+\alpha x+\beta x$

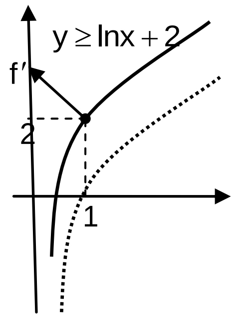
▲

β) Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x,y)=-\ln x+y$, **για** $\{x\ge 0,y\ge 0\}$. **Να βρεθούν και να σκιαγραφηθούν:**

1. Η διανυσματική παράγωγος στο σημείο $(1,2)$

2. Η ισοσταθμική που διέρχεται από το ίδιο σημείο, καθώς και η αντίστοιχη πάνω σταθμική

<u>Λύση</u> (Perilipseis II.1, ασκ.1)



1. Διανυσματική παράγωγος:

$\{f_x=-1/x=-1,\ f_y=1\}\Rightarrow f'=(-1,1)$, δείχνει αριστερά πάνω

2. Ισοσταθμική: $f(x,y)=f(1,2)\Rightarrow -\ln x+y=2\Rightarrow y=\ln x+2$

Δίνεται από το γράφημα της λογαριθμικής συνάρτησης μετατοπισμένο προς τα πάνω κατά 2 μονάδες.

3. Πάνω σταθμική: $f(x,y)\ge f(1,2)\Rightarrow -\ln x+y\ge 2\Rightarrow y\ge \ln x+2$

Βρίσκεται πάνω από την καμπύλη της ισοσταθμικής, στην κατεύθυνση που δείχνει και η διανυσματική παράγωγος.

▲

γ) Να διαπιστωθεί ότι το σημείο $(x=2, y=1)$ είναι ελεύθερο στάσιμο της συνάρτησης $f(x,y)=x^2y^2-4x-8y$, και να χαρακτηριστεί.

<u>Λύση</u> (test III ασκ.7)
Το σημείο ικανοποιεί τις εξισώσεις στασιμότητας

$$f(x,y)=x^2y^2-4x-8y \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_x=2xy^2-4=2(2)(1)^2-4=0 \\ f_y=2x^2y-8=2(2)^2 1-8=0 \end{array}\right\}$$

Για τις δεύτερες παραγώγους, βρίσκουμε:

$$\left.\begin{array}{l} f_x=2xy^2-4 \\ f_y=2x^2y-8 \end{array}\right\} \Rightarrow f_{xx}=2y^2=2\geq 0, f_{yy}=2x^2=8\geq 0,\ f_{xy}=4xy=8$$

$$\Rightarrow \Delta_f=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=2\cdot 8-8^2=-48<0$$

Η ορίζουσα είναι γνήσια αρνητική και επομένως το στάσιμο σημείο είναι σαγματικό. Ειδικότερα δεν είναι ακρότατο.

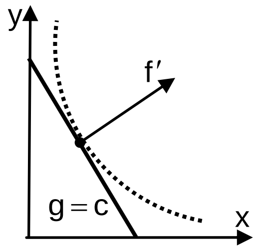
▲

δ) Θεωρούμε το πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης:

$$\max\{f=xy \,||\, g=2x+y=c,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$$

Να βρεθεί η λύση, και να επαληθευτεί η ερμηνεία του πολλαπλασιαστή Lagrange.

<u>Λύση.</u> (βιβλίο 2δ.4, σελ 236)
1. Η λύση είναι εσωτερική και δίνεται από το περιορισμένο στάσιμο, δηλαδή από τις εξισώσεις Lagrange:



$$\left.\begin{array}{l} f_x=\lambda g_x \\ f_y=\lambda g_y \\ g=c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} y=2\lambda \\ x=\lambda \\ 2x+y=c \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y=2\lambda \\ x=\lambda \\ 2\lambda+2\lambda=c \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=c/4 \\ y=c/2 \\ \lambda=c/4 \end{array}\right.$$

Η λύση: $(x^*=c/4, y^*=c/2)$, και ο πολλαπλασιαστής: $\lambda=c/4$, εξαρτώνται από την παράμετρο c.
2. Βρίσκουμε και την μέγιστη τιμή της f ως συνάρτησης της παραμέτρου c:

$$f^*(c)=x^*y^*=c^2/8,$$

και επαληθεύουμε ότι η παράγωγός της ισούται με τον πολλαπλασιαστή:

$$f^{*\prime}(c)=c/4=\lambda(c)$$

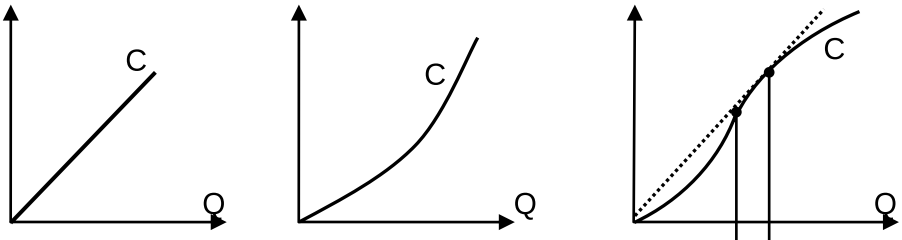
▲

3. (1 μονάδα)

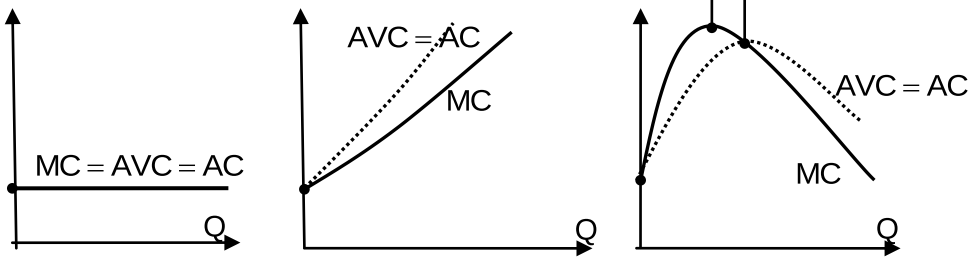
Θεωρούμε τρεις συναρτήσεις κόστους: $C = C(Q)$, **με τα παρακάτω γραφήματα. Να γίνουν τα αντίστοιχα γραφήματα των συναρτήσεων οριακού κόστους, μέσου κόστους, και μέσου μεταβλητού κόστους:**

$$MC = C'(Q),\ AC = C(Q)/Q,\ AVC = VC(Q)/Q,$$

στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων για την κάθε περίπτωση.



<u>Λύση</u> (test.efarmoges IA, ασκ.3)



Σε όλες τις περιπτώσεις:

α) Δεν υπάρχει σταθερό κόστος: $C(0) = 0$, οπότε το μέσο μεταβλητό κόστος συμπίπτει με το μέσο κόστος: $AVC = AC$, και δίνεται από την κλίση της ακτίνας.

β) Σε κάθε περίπτωση το αρχικό οριακό συμπίπτει πάντοτε με το αρχικό μέσο μεταβλητό κόστος, οπότε εδώ συμπίπτει και με το αρχικό κόστος:

$$MC(0) = AVC(0) = AC(0)$$

γ) **Το οριακό κόστος** δίνεται από την παράγωγο, και έχει το γράφημα της μαύρης γραμμής. Στη 1η είναι σταθερό, στη 2η είναι αύξον, και στη 3η είναι αρχικό αύξον και στη συνέχεια φθίνον με μέγιστο στο σημείο καμπής. Η 3η δεν είναι κανονική συνάρτηση κόστους.

δ) **Το μέσο κόστος** έχει το γράφημα της διακεκομμένης γραμμής, και είναι:

1. Στη 1η σταθερό και συμπίπτει με το οριακό.
2. Στη 2η αύξον και μεγαλύτερο από το οριακό διότι η ακτίνα έχει πάντοτε μεγαλύτερη κλήση από την εφαπτομένη.
3. Στην 3η αρχικά αύξον και μετά το σημείο ισοελαστικότητας φθίνον, με μέγιστο στο σημείο ισοελασικότητας όπου και συμπίπτει με το οριακό.

ε) Σε κάθε περίπτωση, το μέσο κόστος είναι αύξον όταν το οριακό είναι μεγαλύτερο, φθίνον όταν το οριακό είναι μικρότερο. Στο μέγιστο του μέσου κόστους το οριακό το κόβει από πάνω προς τα κάτω, είναι μεγαλύτερο πριν και μικρότερο μετά.

▲

4. (1μονάδα)

Χρησιμοποιώντας εργασία L με μοναδιαίο κόστος w, μια επιχείρηση έχει παραγωγή $Q = \ln(1+L)$ η οποία διατίθεται στην αγορά με μοναδιαία τιμή p. Αν η επιχείρηση λειτουργεί μεγιστοποιώντας το κέρδος:

α) Να βρεθούν οι τιμές των $\{p, w\}$ για τις οποίες θα υπάρξει παραγωγή.

β) Για τις παραπάνω τιμές, να βρεθεί το (μέγιστο) κέρδος π ως συνάρτηση των $\{p, w\}$, και να διερευνηθούν οι ιδιότητες μονοτονίας και κυρτότητας αυτής της συνάρτησης.

Λύση. (Test.Efarmoges IIIB, ασκ.1)

α) Το κέρδος: $\Pi(L) = pQ - C = p\ln(1+L) - wL$, είναι **κοίλη** συνάρτηση, με μέγιστο στο στάσιμο:

$$\Pi' = \frac{p}{1+L} - w = 0 \quad \Rightarrow L^* = \frac{p}{w} - 1, \text{ αν } L^* > 0 \Rightarrow p > w,$$

οπότε και θα έχουμε παραγωγή.

Αν η συνθήκη δεν ικανοποιείται: $p \le w$, τότε η λύση θα βρίσκεται στο σύνορο: $L^* = 0$, διότι:

$$\Pi'(0) = p - w \le 0,$$

οπότε και δεν θα έχουμε παραγωγή .

β) Αν $p \le w$, τότε το κέρδος είναι: $\pi = 0$.

Αν $p > w$, τότε το κέρδος είναι:

$$\pi = p\ln(1+L^*) - wL^* = p\ln(\frac{p}{w}) - (p-w) = p\ln p - p - p\ln w + w$$

1. Μονοτονία:

$$\pi = p\ln p - p - p\ln w + w \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \pi_p = \ln p - \ln w = \ln(p/w) > 0 \\ \pi_w = -p/w + 1 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow p - \text{αύξουσα}, \ w - \text{φθίνουσα}$$

2. Κυρτότητα:

$$\left\{\begin{array}{l} \pi_p = \ln p - \ln w = \ln(p/w) > 0 \\ \pi_w = -p/w + 1 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \pi_{pp} = 1/p & \pi_{pw} = -1/w \\ \pi_{wp} = -1/w & \pi_{ww} = p/w^2 \end{pmatrix} \text{ με } \Delta = \frac{1}{w^2} - \frac{1}{w^2} = 0$$

Είναι $\{p, w\}$ – κυρτή, διότι έχουμε:

$$\pi_{pp} > 0, \ \pi_{ww} > 0, \ \Delta = \pi_{pp}\pi_{ww} - \pi_{pw}^2 = 0$$

3.Ομογένεια:

$$\pi(tp, tw) = tp\ln(\frac{tp}{tw}) - (tp - tw) = t[p\ln\frac{p}{w} - (p-w)] = t\pi(p,w)$$

Είναι ομογενής βαθμού 1

▲

ΤΕΛΟΣ