διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

1. (4 μονάδες)

α) Θεωρούμε την εξίσωση: $x = y^3$ στην θετική περιοχή: $\{x \geq 0,\ y \geq 0\}$

1. Να γίνει το γράφημά της με τον $x-$ άξονα οριζόντιο

2. Να βρεθεί η παράγωγος και η γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης $y = y(x)$ που ορίζεται πλεγμένα από την παραπάνω εξίσωση, στο σημείο: $(x_0 = 8,\ y_0 = 2)$

β) Το y είναι συνάρτηση του x με τιμές $\{y_1 = 4,\ y_2 = 7\}$ όταν $\{x_1 = 2,\ x_2 = 4\}$, αντίστοιχα. Να εκτιμηθούν η παράγωγος και η ελαστικότητα του y ως προς x.

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x) = px^{3/2} - 2x$ με $\{p > 0\}$, στο διάστημα: $0 \leq x \leq 4$

1. Να διερευνηθεί αν είναι κυρτή ή κοίλη 2. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της

δ) Θεωρούμε τις δύο συναρτήσεις: $f(x) = x^{-1}$, $g(x) = x^{-2}$

1. Να γίνουν τα γραφήματα τους στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, στη θετική περιοχή: $\{x \geq 0,\ y \geq 0\}$

2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_0^{+\infty} h(x)dx$, όπου: $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$

2. (4 μονάδες)

α) Δίνεται η συνάρτηση $f(v,w) = v^{1/2}w$. Να γίνει το γράφημα μιας ισοσταθμικής στη θετική περιοχή, και να βρεθεί ο ρυθμός υποκατάστασης του v ως προς το w όταν $(v = 2, w = 3)$.

β) Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x,y) = \left(x^2 + 4y^2 - xy\right)^2$

1. Να διερευνηθεί αν είναι ομογενής

2. Να εκτιμηθεί η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής της αν τα $\{x,y\}$ αυξηθούν αμφότερα κατά 1%.

γ) Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί το στάσιμο της συνάρτησης: $f(x,y) = 1 + x^2 + xy$. Να βρεθεί και η μέγιστη τιμή της στο επίπεδο.

δ) Στη θετική περιοχή: $\{x \geq 0, y \geq 0\}$ το πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης:

$$\min\{f(x,y) = x^2 + y \,||\, g(x,y) = 4x + y = c\} \text{ με } c > 0$$

έχει την λύση: $(x^* = 2, y^* = c - 8)$.Να βρεθεί ο πολλαπλασιαστής Lagrange και να επαληθευτεί η ερμηνεία του.

3. (1 μονάδα)

Το ετήσιο έσοδο από την πώληση ενός προϊόντος είναι $E = QP$, όπου P είναι η μοναδιαία τιμή του και Q η ποσότητα ζήτησης. Δίνεται ότι η τιμή αυξάνει με ρυθμό 0.5% ετησίως, και ότι η ελαστικότητα ζήτησης είναι $\varepsilon = -2$.

α) Να προσδιοριστεί αν το έσοδο θα μεγαλώνει ή θα μικραίνει, και να εκτιμηθεί ο ετήσιος ρυθμός μεταβολής του.

β) Να εκτιμηθεί το ύψος του ετήσιου εσόδου μετά την παρέλευση 4 ετών αν το τωρινό έσοδο είναι $E_0 = 100$.

4. (1 μονάδα)

Χρησιμοποιώντας εργασία L με μοναδιαίο κόστος w, μια επιχείρηση έχει παραγωγή $Q = \ln(1 + L)$ η οποία διατίθεται στην αγορά με μοναδιαία τιμή p. Αν η επιχείρηση λειτουργεί μεγιστοποιώντας το κέρδος, να βρεθούν τα παρακάτω:

α) Οι τιμές των $\{p,w\}$ για τις οποίες θα υπάρξει παραγωγή.

β) Το (μέγιστο) κέρδος π ως συνάρτηση των $\{p,w\}$. Να διερευνηθούν οι ιδιότητες μονοτονίας και κυρτότητας αυτής της συνάρτησης.

ΤΕΛΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ Ι. 16

διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

1. (4 μονάδες)

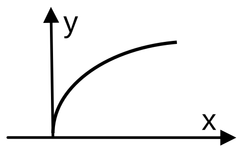
α) Θεωρούμε την εξίσωση: $x = y^3$ **στην θετική περιοχή:** $\{x \ge 0,\ y \ge 0\}$

1. Να γίνει το γράφημά της με τον $x-$ **άξονα οριζόντιο**

2. Να βρεθεί η παράγωγος και η γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης $y = y(x)$ **που ορίζεται πλεγμένα από την παραπάνω εξίσωση, στο σημείο:** $(x_0 = 8,\ y_0 = 2)$

<u>Λύση</u>. Το γράφημα είναι αυτό της $3^{ης}$ δύναμης με τον $y-$άξονα οριζόντιο: $x = y^3$

ή εναλλακτικά αυτό της $3^{ης}$ ρίζας με τον $x-$άξονα: $x = y^3 \Rightarrow y = x^{1/3}$



Μπορούμε να βρούμε την παράγωγο $y'(x)$ π.χ. ως ανάστροφο:

$$x'(y) = 3y^2 \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{3y^2}\Big|_{x=8,y=2} = \frac{1}{12}$$

ή με πλεγμένη παραγώγιση ως προς x: $x = y^3 \Rightarrow 1 = 3y^2y' \Rightarrow y' = 1/3y^2 = 1/12$

Γραμμική προσέγγιση: $y_{γρ} = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) = 2 + (x-8)/12 = 4/3 + x/12$

β) Το y **είναι συνάρτηση του** x **με τιμές** $\{y_1 = 4,\ y_2 = 7\}$ **όταν** $\{x_1 = 2,\ x_2 = 4\}$**, αντίστοιχα. Να εκτιμηθούν η παράγωγος και η ελαστικότητα του** y **ως προς** x**.**

Λύση. Έχουμε μεταβολές: $\Delta x = x_2 - x_1 = 4 - 2 = 2,\ \Delta y = y_2 - y_1 = 7 - 4 = 3$

1. παράγωγος: $m \approx \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{3}{2} = 1.5$

2. ελαστικότητα: $\varepsilon \approx \dfrac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \dfrac{(y_2 - y_1)/y_1}{(x_2 - x_1)/x_1} = \dfrac{x_1(y_2 - y_1)}{y_1(x_2 - x_1)} = \dfrac{2 \cdot 3}{4 \cdot 2} = 0.75$

Παρατήρηση. Εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εκτίμηση της ελαστικότητας που δίνεται από τον λογαριθμικό ορισμό

$$\varepsilon \approx \frac{\Delta \ln y}{\Delta \ln x} = \frac{\ln y_2 - \ln_1 y_1}{\ln x_2 - \ln x_1} = \frac{\ln 7 - \ln 4}{\ln 4 - \ln 2} = \frac{\ln 7 - 2\ln 2}{\ln 2} = \frac{\ln 7}{\ln 2} - 2 \approx 0.81$$

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x) = px^{3/2} - 2x$ **με** $\{p > 0\}$ **, στο διάστημα:** $0 \le x \le 4$

1. Να διερευνηθεί αν είναι κυρτή ή κοίλη 2. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της

<u>Λύση.</u> Είναι κυρτή ως άθροισμα της κυρτής: $px^{3/2}$ με την γραμμική: $-2x$. Εξάλλου έχει θετική $2^η$ παράγωγο: $f(x) = px^{3/2} - 2x \Rightarrow f'(x) = 3px^{1/2}/2 - 2,\ \ f''(x) = 3px^{-1/2}/4 > 0$

Το στάσιμο (αν υπάρχει) είναι ελάχιστο. Επομένως το μέγιστο βρίσκεται στο σύνορο: $\{0, 4\}$

Συγκρίνουμε τις τιμές: $\{f(0) = 0\}$ και $\{f(4) = p4^{3/2} - 8 \ge f(0) = 0 \Rightarrow 8p - 8 \ge 0 \Rightarrow p \ge 1\}$

Επομένως, η λύση και η αντίστοιχη μέγιστη τιμή είναι:

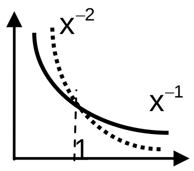
$$x^* = \begin{cases} 4 & αν\ \ p \ge 1 \\ 0 & αν\ \ p \le 1 \end{cases} \Rightarrow f^* = f(x^*) = \begin{cases} p4^{3/2} - 8 = 8p - 8 & αν\ \ p \ge 1 \\ 0 & αν\ \ p \le 1 \end{cases}$$

δ) Θεωρούμε τις δύο συναρτήσεις: $f(x) = x^{-1}$**,** $g(x) = x^{-2}$

1. Να γίνουν τα γραφήματα τους στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, στη θετική περιοχή: $\{x \ge 0,\ y \ge 0\}$

2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_0^{+\infty} h(x)dx$ **, όπου:** $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$

<u>Λύση</u>. Βρίσκουμε το σημείο τομής:



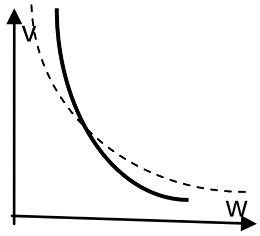
$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 1,$$

$$\int_0^{\infty} h(x)dx = \int_0^1 x^{-1}dx + \int_1^{\infty} x^{-2}dx = \ln x\Big|_0^1 - x^{-1}\Big|_1^{\infty} = (0 + \infty) - (0 - 1) = +\infty$$

το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει

2. (4 μονάδες)

α) Δίνεται η συνάρτηση $f(v,w)=v^{1/2}w$**. Να γίνει το γράφημα μιας ισοσταθμικής στη θετική περιοχή, και να βρεθεί ο ρυθμός υποκατάστασης του** v **ως προς το** w **όταν** $(v=2,w=3)$**.**



Λύση. Η ισοσταθμική έχει την μορφή υπερβολής αρνητικής δύναμης -2 :

$$v^{1/2}w=c\Rightarrow v=c^2/w^2$$

Ο ρυθμός υποκατάστασης δίνεται από τον τύπο πλεγμένης παραγώγισης:

$$\frac{dv}{dw}=-\frac{f_w}{f_v}=-\frac{v^{1/2}}{v^{-1/2}w/2}=-\frac{2v}{w}=-\frac{2\cdot 2}{3}=-\frac{4}{3}$$

Παρατήρηση. Εναλλακτικά, μπορούμε να παραγωγίσουμε την **συνάρτηση υποκατάστασης** που βρήκαμε, στο σημείο**:** $w=3$

$v=c^2/w^2$**,** όπου $c=f(2,3)=2^{1/2}3\Rightarrow c^2=18$

Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε:

$$v=\frac{18}{w^2}\Rightarrow\frac{dv}{dw}=-2\frac{18}{w^3}=-2\frac{18}{27}=-\frac{4}{3}$$

β) Θεωρούμε την συνάρτηση: $f(x,y)=\left(x^2+4y^2-xy\right)^2$

1. Να διερευνηθεί αν είναι ομογενής

2. Να εκτιμηθεί η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής της αν τα $\{x,y\}$ **αυξηθούν αμφότερα κατά** 1%**.**

Λύση. Είναι ομογενής βαθμού 4 . Εξάλλου ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(tx,ty)=\left[(tx)^2+4(ty)^2-(tx)(ty)\right]^2=\left[t^2(x^2+4y^2-xy)\right]^2=t^4f(xy)$$

Έχει ελαστικότητα κλίμακας ίση με τον βαθμό ομογένειας: $\varepsilon_r=\varepsilon_x+\varepsilon_y=4$.

Επομένως η τιμή της θα μεταβληθεί (οριακά) κατά το ποσοστό:

$$\%df=\varepsilon_x(\%dx)+\varepsilon_y(\%dy)=(\varepsilon_x+\varepsilon_y)(\%dr)=\varepsilon_r(\%dr)=4(1\%)=4\%$$

γ) Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί το στάσιμο της συνάρτησης: $f(x,y)=1+x^2+xy$**. Να βρεθεί και η μέγιστη τιμή της στο επίπεδο.**

Λύση. Το στάσιμο είναι:

$$f(x,y)=1+x^2+xy\Rightarrow\left.\begin{matrix}f_x=2x+y=0\\ f_y=x=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow(x=0,y=0)$$, με:

$$f_{xx}=2>0,\ f_{yy}=0,\ f_{xy}=1\Rightarrow\Delta_f=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=(2)(0)-1^2=-1<0$$

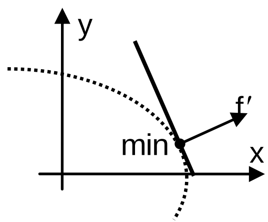
Επομένως είναι σαγματικό. Άλλο στάσιμο δεν υπάρχει, οπότε το μέγιστο θα βρίσκεται στο άπειρο με άπειρη τιμή, διότι παίρνοντας $y=0$, βρίσκουμε:

$f(x,0)=1+x^2\to+\infty$ όταν $x\to\infty$

δ) Στη θετική περιοχή: $\{x\geq 0,y\geq 0\}$ **το πρόβλημα περιορισμένης βελτιστοποίησης:**

$$\min\{f(x,y)=x^2+y\ ||\ g(x,y)=4x+y=c\}$$ **με** $c>0$

έχει την λύση: $(x^*=2,y^*=c-8)$. **Να βρεθεί ο πολλαπλασιαστής Lagrange και να επαληθευτεί η ερμηνεία του.**



Λύση. Ο πολλαπλασιαστής βρίσκεται από την σχέση:

$\lambda=\frac{f_x}{g_x}=\frac{2x}{4}=\frac{4}{4}=1$ ή $\lambda=\frac{f_y}{g_y}=\frac{1}{1}=1$ (τα δύο είναι ίσα)

Η συνάρτηση μέγιστης τιμής είναι:

$$f^*(c)=x^{*2}+y^*=4+c-8=c-4$$

Επαληθεύουμε ότι ο πολλαπλασιαστής δίνει την παράγωγο της μέγιστης τιμής ως προς την τιμή του περιορισμού c: $f^{*\prime}(c)=1=\lambda$

3. (1 μονάδα)
Το ετήσιο έσοδο από την πώληση ενός προϊόντος είναι $E = QP$, όπου P είναι η μοναδιαία τιμή του και Q η ποσότητα ζήτησης. Δίνεται ότι η τιμή αυξάνει με ρυθμό 0.5% ετησίως, και ότι η ελαστικότητα ζήτησης είναι $\varepsilon = -2$.
α) Να προσδιοριστεί αν το έσοδο θα μεγαλώνει ή θα μικραίνει, και να εκτιμηθεί ο ετήσιος ρυθμός μεταβολής του.
β) Να εκτιμηθεί το ύψος του ετήσιου εσόδου μετά την παρέλευση 4 ετών αν το τωρινό έσοδο είναι $E_0 = 100$.

Λύση.

1. Η ετήσια ποσοστιαία μεταβολή γινομένου ισούται με το άθροισμα των ετήσιων ποσοστιαίων μεταβολών των όρων:

$\%dE = \%dQ + \%dP$ όπου: $\%dP = +0.5\%$ ετησίως

2. Η ετήσια ποσοστιαία μεταβολή της ζήτησης: $\%dQ$ ισούται με το γινόμενο της ελαστικότητας με την ετήσια ποσοστιαία μεταβολή της τιμής:

$$\%dQ = \varepsilon(\%dP) = (-2)(+0.5\%) = -1\%$$

3 Αντικαθιστώντας στο 1, βρίσκουμε:

$$\%dE = -1 + 0.5 = -0.5\%$$

α) Συμπεραίνουμε ότι το έσοδο ελαττώνεται με ρυθμό 0.5% ετησίως, δηλαδή μεταβάλλεται με σχετικό ρυθμό: $r = -0.005$.

β) Υποθέτοντας σταθερό σχετικό ρυθμό το έσοδο θα μεταβάλλεται εκθετικά, οπότε μετά από 4 έτη θα είναι:

$$E = E_0 e^{rt} = 100e^{-(0.005)4} = 100e^{-0.02} \approx 100[1-(0.02)+(0.02)^2/2] = 98.02$$

4 (1 μονάδα)
Χρησιμοποιώντας εργασία L με μοναδιαίο κόστος w, μια επιχείρηση έχει παραγωγή $Q = \ln(1+L)$ η οποία διατίθεται στην αγορά με μοναδιαία τιμή p. Αν η επιχείρηση λειτουργεί μεγιστοποιώντας το κέρδος, να βρεθούν τα παρακάτω:
α) Οι τιμές των $\{p, w\}$ για τις οποίες θα υπάρξει παραγωγή.
β) Το (μέγιστο) κέρδος π ως συνάρτηση των $\{p, w\}$. Να διερευνηθούν οι ιδιότητες μονοτονίας και κυρτότητας αυτής της συνάρτησης.

Λύση.

α) Το κέρδος: $\Pi(L) = pQ - C = p\ln(1+L) - wL$, είναι **κοίλη**, με μέγιστο στο στάσιμο:

$\Pi' = \dfrac{p}{1+L} - w = 0 \;\Rightarrow L^* = \dfrac{p}{w} - 1$, αν $L^* > 0 \Rightarrow p > w$, οπότε και **θα έχουμε παραγωγή.**

Αν η συνθήκη δεν ικανοποιείται: $p \le w$, τότε η λύση θα βρίσκεται στο σύνορο: $L^* = 0$, διότι:

$\Pi'(0) = p - w \le 0$, οπότε και **δεν θα έχουμε παραγωγή**.

β) Αν $p \le w$, τότε το κέρδος είναι: $\pi = 0$. Αν $p > w$, τότε το (μέγιστο) κέρδος είναι:

$$\pi = p\ln(1+L^*) - wL^* = p\ln\left(\frac{p}{w}\right) - (p - w) = p\ln p - p - p\ln w + w$$

Έχουμε:

$$\pi = p\ln p - p - p\ln w + w \Rightarrow \begin{Bmatrix} \pi_p = \ln p - \ln w = \ln(p/w) > 0 \\ \pi_w = -p/w + 1 < 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow p-\text{αύξουσα},\; w-\text{φθίνουσα}$$

$$\begin{Bmatrix} \pi_p = \ln p - \ln w \\ \pi_w = -p/w + 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \pi_{pp} = 1/p & \pi_{pw} = -1/w \\ \pi_{wp} = -1/w & \pi_{ww} = p/w^2 \end{pmatrix} \;\text{με}\; \Delta = \frac{1}{w^2} - \frac{1}{w^2} = 0$$

Είναι $\{p, w\}-$κυρτή, διότι έχουμε: $\pi_{pp} > 0,\ \pi_{ww} > 0,\ \Delta = \pi_{pp}\pi_{ww} - \pi_{pw}^2 = 0$

Δηλαδή, το κέρδος αυξάνει με αύξοντα ρυθμό όταν το p ανεβαίνει ή/και το w πέφτει.

Ακραίες τιμές των (p, w) είναι κατά μέσο όρο πιο κερδοφόρες από σταθερές ενδιάμεσες.

ΤΕΛΟΣ