IV.12 ΔΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ (Β)

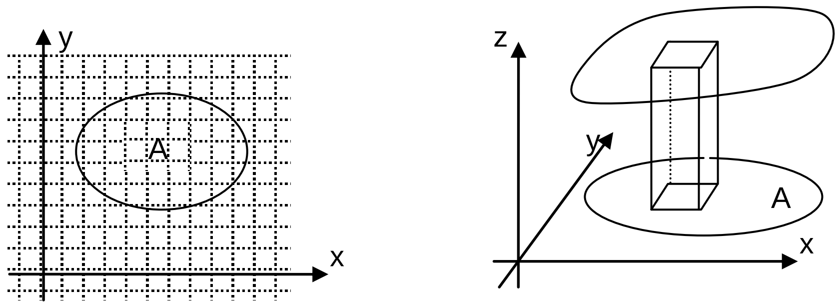
ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ
1.Διαμέριση 2.Διαδοχική ολοκλήρωση 3.Αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης 4.Ορθογώνιες περιοχές
ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ
5.Πολικές συντεταγμένες 6.Κατανομή Gauss

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

1. Διαμέριση

Θα επεκτείνουμε τώρα σε συναρτήσεις δύο μεταβλητών τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, χρησιμοποιώντας την έννοια του όγκου. Θεωρούμε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x,y)$, ορισμένη σε κάποια περιοχή A στο επίπεδο Oxy. Θα υπολογίσουμε τον προσημασμένο όγκο του χώρου που βρίσκεται μεταξύ της επιφάνειας $z=f(x,y)$ και της περιοχής A, θετικός για τα τμήματα που βρίσκονται πάνω από το επίπεδο και αρνητικός για τα τμήματα που βρίσκονται από κάτω. Καλείται **διπλό ολοκλήρωμα** (double integral) της συνάρτησης στην περιοχή και παριστάνεται με:

$$\iint_A f(x,y)dxdy \text{ ή } \iint_A fdA$$



$\Delta A = \Delta x \Delta y$ $\qquad$ $\Delta V = f\Delta A = f\Delta x\Delta y$

διαμέριση του επιπέδου

Σε αντιστοιχία με τα γνωστά αθροίσματα Riemann, θεωρούμε μια διαμέριση του A σε μικρές υποπεριοχές, συνήθως χρησιμοποιώντας ένα ορθογώνιο πλέγμα ευθειών παράλληλων στους άξονες συντεταγμένων Oxy, με διαστάσεις $\{\Delta x_i, \Delta y_j\}$, όπως στο πρώτο γράφημα παραπάνω. Παίρνουμε μόνο αυτές που περιέχονται εξολοκλήρου στο A, οπότε το εμβαδόν τους θα είναι:

$$\Delta A = \Delta x_i \Delta y_j$$

Παίρνουμε επίσης τυχαία σημεία (ξ_i, ζ_j) σε κάθε υποπεριοχή, και υπολογίζουμε τα αθροίσματα:

$$\sum_{i,j} \Delta V_{ij} = \sum_{i,j} f(\xi_i, \zeta_j)\Delta A_{ij} = \sum_{i,j} f(\xi_i, \zeta_j)\Delta x_i \Delta y_j$$

Δηλαδή το κάθε ΔV παριστάνει τον όγκο ενός παραλληλεπιπέδου με βάση ΔA και ύψος $f(\xi,\zeta)$. Καλούνται *αθροίσματα Riemann.* Το διπλό ολοκλήρωμα προκύπτει ως όριο μιας ακολουθίας τέτοιων αθροισμάτων όταν οι διαστάσεις του πλέγματος τείνουν στο μηδέν, και μπορεί να εκτιμηθεί προσεγγιστικά χρησιμοποιώντας τέτοια αθροίσματα.

2. Διαδοχικό ολοκλήρωμα

Για να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα *αναλυτικά* παίρνουμε στο παραπάνω άθροισμα το όριο πρώτα ως προς τη μία διαμέριση, π.χ. του $y-$άξονα, και μετά ως προς την άλλη. Σαυτή την περίπτωση το διπλό ολοκλήρωμα παριστάνεται με δύο διαδοχικά απλά ολοκληρώματα. Καταρχήν περιγράφουμε την περιοχή A ως ευρισκόμενη μεταξύ δύο καμπύλων σε κάποιο διάστημα του x, όπως φαίνεται στο πρώτο γράφημα παρακάτω:

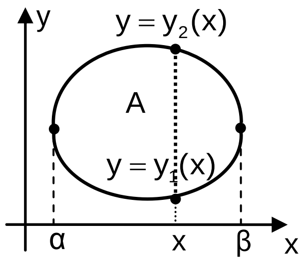
$$y_1(x) \le y \le y_2(x), \quad \alpha \le x \le \beta$$

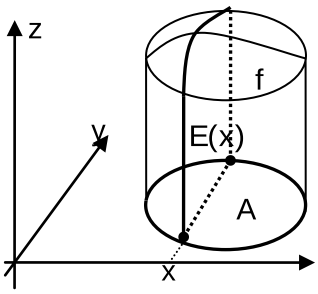
Δηλαδή, για κάθε x στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ οι τιμές του y βρίσκονται στο διάστημα $[y_1(x), y_2(x)]$.

Εκφράζουμε τώρα το διπλό ολοκλήρωμα ως διαδοχή απλών ολοκληρωμάτων στη μορφή:

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_{x=\alpha}^{x=\beta} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

όπου πρώτα ολοκληρώνουμε ως προς y *θεωρώντας το* x *σταθερό οπότε βρίσκουμε συνάρτηση του* x*, και μετά ως προς* x *μεταξύ των σταθερών ορίων του.*





$\alpha \le x \le \beta, \quad y_1(x) \le y \le y_2(x)$ $\qquad$ $E(x) = \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x,y)dy$

διαδοχική ολοκλήρωση

Δηλαδή, για κάθε x *στο διάστημα* $[\alpha,\beta]$ *ολοκληρώνουμε την συνάρτηση* $f(x,y)$ *ως προς* y *μεταξύ των παραπάνω ορίων του, οπότε βρίσκουμε μια συνάρτηση του* x*:*

$$E(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε την συνάρτηση $E(x)$ *μεταξύ των σταθερών ορίων:*

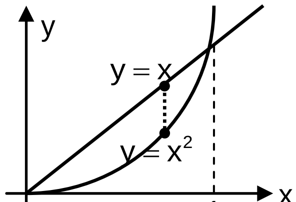
$$\int_\alpha^\beta E(x)dx$$

Παρατήρηση. Γεωμετρικά το $E(x)$ παριστάνει το εμβαδόν της διατομής του χώρου με επίπεδα κάθετα στον $x-$άξονα, όπως φαίνεται στο δεύτερο γράφημα. Θεωρώντας τώρα ότι ο ζητούμενος χώρος απαρτίζεται από φέτες διατομής $E(x)$ και πάχους Δx, αθροίζουμε τους στοιχειώδεις όγκους, οπότε στο όριο βρίσκουμε το απλό ολοκλήρωμα που παριστάνει τον συνολικό ζητούμενο όγκο:

$$\sum \Delta V = \sum E(x)\Delta x \to V = \int_\alpha^\beta E(x)dx$$

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα της $f = xy$ στη φραγμένη περιοχή μεταξύ των καμπύλων $\{y = x^2,\ y = x\}$. Η περιοχή ολοκλήρωσης περιγράφεται με τις ανισότητες:

$$A: \{0 \le x \le 1,\ y_1 = x^2 \le y \le y_2 = x\}$$



Υπολογίζουμε πρώτα το εμβαδόν της διατομής για **σταθερό** x:

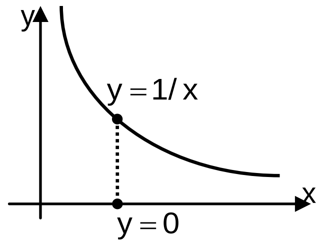
$$E(x) = \int_{y=x^2}^{y=x} xydy = x\frac{1}{2}y^2 \Big|_{y=x^2}^{y=x} = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^5$$

Το διπλό ολοκλήρωμα δίνεται τώρα από το απλό ολοκλήρωμα της παραπάνω διατομής στο διάστημα $0 \le x \le 1$:

$$\iint_A fdA = \int_0^1 E(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^3 - x^5) = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24}$$ ▲

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα της $f = \sqrt{xy}$ στη μη φραγμένη περιοχή που βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης $y = 1/x^2$ και των θετικών ημιαξόνων. Η περιοχή περιγράφεται με τις ανισότητες:

$A : \{0 \le x < \infty,\ y_1 = 0 \le y \le y_2 = x^2\}$.



Το ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο σε μη φραγμένη περιοχή. Βρίσκουμε:

$$\iint_A f dA = \int_{x=0}^{+\infty} dx \int_{y=0}^{x^{-2}} x^{1/2} y^{1/2} dy = \int_0^{+\infty} dx \cdot x^{1/2} \left(\frac{2}{3} y^{3/2} \Big|_0^{x^{-2}} \right)$$

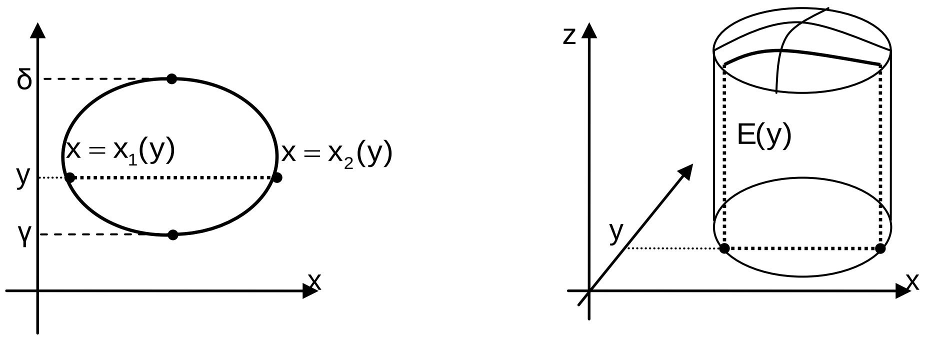
$$= \int_0^{+\infty} dx \cdot x^{1/2} \frac{2}{3} x^{-3} = \frac{2}{3} \int_0^{+\infty} x^{-5/2} = -\frac{4}{9} x^{-3/2} \Big|_0^{\infty} = 0 - (-\infty) = +\infty$$

Το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.

▲

3. Αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης

Το διπλό ολοκλήρωμα είναι συμμετρικό ως προς το ρόλο των δύο μεταβλητών ολοκλήρωσης και μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά, ολοκληρώνοντας πρώτα ως προς x και μετά ως προς y.



$\gamma \le y \le \delta, \quad x_1(y) \le x \le x_2(y)$ $\qquad E(y) = \int_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} f(x,y) dy$

αλλαγή στη σειρά ολοκλήρωσης

Σ΄ αυτή την περίπτωση πρέπει να περιγράψουμε και την περιγραφή της περιοχής ολοκλήρωσης, όπως στο παραπάνω γράφημα, ως εξής:

$A : \{\gamma \le y \le \delta,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$

Το διπλό ολοκλήρωμα θα εκφράζεται τώρα στη μορφή:

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \int_{y=\gamma}^{y=\delta} dy \int_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} f(x,y) dx$$

Δηλαδή *ολοκληρώνουμε πρώτα ως προς* x *θεωρώντας το* y *σταθερό οπότε βρίσκουμε συνάρτηση του* y, *την οποία στη συνέχεια ολοκληρώνουμε ως προς* y *μεταξύ των σταθερών ορίων.*

4. Ορθογώνιες περιοχές

Στην απλούστερη περίπτωση η περιοχή ολοκλήρωσης είναι ορθογώνια:

$$A:\{\alpha \le x \le \beta,\ \gamma \le y \le \delta\},$$

οπότε το διπλό ολοκλήρωμα εκφράζεται άμεσα με διαδοχική ολοκλήρωση σε οιαδήποτε σειρά των μεταβλητών, στη μορφή:

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_{x=\alpha}^{x=\beta} dx \int_{y=\gamma}^{y=\delta} f(x,y)dy = \int_{y=\gamma}^{y=\delta} \int_{x=\alpha}^{x=\beta} f(x,y)dy$$

Τα όρια μπορεί και να μην είναι φραγμένα οπότε θα έχουμε γενικευμένα ολοκληρώματα. Ειδικά στην περίπτωση που και η συνάρτηση είναι χωριζόμενων μεταβλητών:

$$f(x,y) = g(x)h(y)$$

τότε το διπλό ολοκλήρωμα δίνεται από το γινόμενο δύο απλών ολοκληρωμάτων:

$$\iint_{\substack{\alpha\le x\le\beta \\ \gamma\le y\le\delta}} g(x)h(y)dxdy = \left(\int_\alpha^\beta g(x)dx\right)\left(\int_\gamma^\delta h(y)dy\right)$$

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το παρακάτω γενικευμένο διπλό ολοκλήρωμα χωριζόμενων μεταβλητών:

$$\iint_{\substack{0\le x\le\infty \\ 0\le y\le 1}} e^{-2x-y}dxdy = \left(\int_0^\infty e^{-2x}dx\right)\left(\int_0^1 e^{-y}dy\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^\infty\right)\left(-e^{-y}\Big|_0^1\right) = \left(0+\frac{1}{2}\right)\left(-e^{-1}+1\right) = \frac{e-1}{2e}$$

▲

ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

5. Πολικές συντεταγμένες

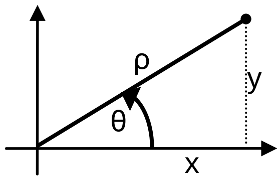
Εκτός από τις καρτεσιανές συντεταγμένες: (x,y), υπάρχουν και άλλοι τρόποι παράστασης των σημείων του επιπέδου. Αναφέρουμε ειδικά τις **πολικές συντεταγμένες** οι οποίες αποτελούνται από τα εξής στοιχεία:

1. Την **πολική ακτίνα** που θεωρείται θετική: $\rho \geq 0$, και μετράει την απόσταση στο σημείο από την αρχή του συστήματος.

2. Την **πολική γωνία** η οποία μετράει την γωνία που σχηματίζει η ακτίνα του σημείου με τον θετικό $x-$ημιάξονα. Είναι κατευθυνόμενη και συμβατικά αυξάνει αριστερόστροφα. *Συνήθως* χρησιμοποιούμε τις τιμές στο διάστημα $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ή στο διάστημα $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Όπως φαίνεται στο γράφημα παρακάτω, οι πολικές συντεταγμένες (ρ,θ) συνδέονται με τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y) του ίδιου σημείου, με τις εξισώσεις:

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{array}\right\} \quad \text{ή} \quad \left\{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \left.\begin{array}{l} \cos\theta = x/r \\ \sin\theta = y/r \end{array}\right\} \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{array}\right.$$



Το σημείο $(0,0)$ έχει $\rho = 0$ αλλά απροσδιόριστο θ, και καλείται **αρχή** ή **πόλος** του συστήματος.

Παράδειγμα. Δίνουμε τις αντιστοιχίες καρτεσιανών και πολικών συντεταγμένων, για τα σημεία στο παρακάτω γράφημα, χρησιμοποιώντας συνήθεις τιμές της πολικής γωνίας.

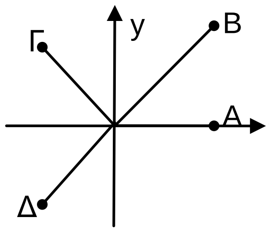
$A:(x = 1, y = 0) \Leftrightarrow (\rho = 1, \theta = 0)$

$B:(x = 1, y = 1) \Leftrightarrow (\rho = \sqrt{2},\ \theta = \pi/4)$

$\Gamma:(x = -1/\sqrt{2}, y = 1/\sqrt{2}) \Leftrightarrow (\rho = 1, \theta = 3\pi/4)$

$\Delta:(x = -1/\sqrt{2}, y = -1/\sqrt{2}) \Leftrightarrow (\rho = 1, \theta = 5\pi/4)$

$\Leftrightarrow (\rho = 1, \theta = -3\pi/4)$



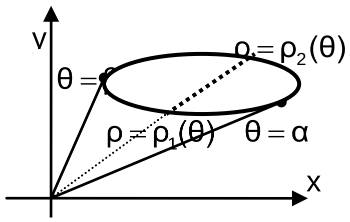
▲

Αντικαθιστώντας από τις παραπάνω σχέσεις μεταξύ καρτεσιανών και πολικών συντεταγμένων διαπιστώνουμε τα εξής:

- Μια καμπύλη στο επίπεδο μπορεί να εκφραστεί σε πολικές συντεταγμένες, στη μορφή:

  $g(\rho,\theta) = c \Rightarrow \rho = \rho(\theta)$

  Δηλαδή για κάθε θ βρίσκουμε το σημείο της καμπύλης πάνω στην αντίστοιχη ακτίνα σε απόσταση ρ από την αρχή του συστήματος.



- Μια περιοχή A του επιπέδου μπορεί να εκφραστεί ως ευρισκόμενη ανάμεσα από δύο τέτοιες καμπύλες μεταξύ δύο ακραίων πολικών γωνιών, όπως στο γράφημα.

$$A : \begin{cases} \alpha \leq \theta \leq \beta \\ \rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta) \end{cases}$$

- Μια συνάρτηση στο επίπεδο μπορεί να εκφραστεί με το ύψος της αντίστοιχης επιφάνειας στο σημείο με καρτεσιανές συντεταγμένες: (ρ,θ), ως συνάρτηση:

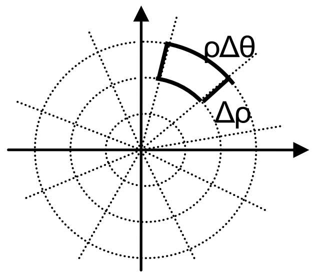
  $f(\rho,\theta)$

Τα παραπάνω μας επιτρέπουν να εκφράσουμε το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης f στη περιοχή A, με το παρακάτω διαδοχικό ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες:

$$\iint_A f dA = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} d\theta \int_{\rho=\rho_1(\theta)}^{\rho=\rho_2(\theta)} f(\rho,\theta)\rho d\rho$$

Δηλαδή, πρώτα θεωρούμε το θ σταθερό και ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση $f(\rho,\theta)\rho$ ως προς ρ στο διάστημα $\rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta)$, όπως φαίνεται στο παραπάνω γράφημα. Βρίσκουμε έτσι μια συνάρτηση του θ την οποία στη συνέχεια ολοκληρώνουμε στο διάστημα $\alpha \leq \theta \leq \beta$.

Παρατήρηση. Η διαδικασία της απόδειξης είναι αντίστοιχη με αυτή για τις καρτεσιανές συντεταγμένες. Παρατηρούμε καταρχήν ότι τα σημεία με σταθερό ρ σχηματίζουν ένα κύκλο με κέντρο στον πόλο που καλείται **πολικός κύκλος.** Αντίστοιχα τα σημεία με σταθερό θ σχηματίζουν μια ακτίνα με αρχή στον πόλο που καλείται **πολική ακτίνα.**



Οι πολικοί κύκλοι και οι πολικές ακτίνες ορίζουν ένα πλέγμα καμπύλων στο επίπεδο αντίστοιχο με το πλέγμα που ορίζουν οι κατακόρυφες και οριζόντιες ευθείες στο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων, και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για διαμερίσεις, όπως φαίνεται στο γράφημα παραπλεύρως. Το εμβαδόν μιας στοιχειώδους υποπεριοχής σαυτή την διαμέριση δίνεται από τον τύπο:

$$\Delta A \approx (\rho\Delta\theta)\Delta\rho = \rho\Delta\rho\Delta\theta$$

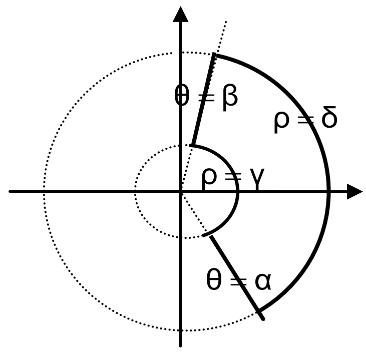
όπου $(\rho\Delta\theta)$ είναι το μήκος ενός τόξου γωνίας $\Delta\theta$ σε μια περιφέρεια ακτίνας ρ. Αθροίζοντας τους στοιχειώδεις όγκους μεταξύ της επιφάνειας και της περιοχής A, βρίσκουμε:

$$\sum \Delta V = \sum f(\rho_i,\theta_i)\rho_i\Delta\rho_i\Delta\theta_i$$

Στο όριο, αθροίζοντας πρώτα ως προς ρ για κάθε σταθερό θ και στη συνέχεια ως προς θ μεταξύ των δύο ορίων του, εκφράζουμε το διπλό ολοκλήρωμα μένα διαδοχικό ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες στην μορφή που διατυπωσαμε.

▲

Ορθογώνιες περιοχές σε πολικές συντεταγμένες καλούνται οι ειδικές περιοχές που βρίσκονται μεταξύ δύο πολικών ακτίνων και δύο πολικών κύκλων. Τέτοιες περιοχές έχουν σταθερά όρια σε πολικές συντεταγμένες και το αντίστοιχο διπλό ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες μπορεί να εκφραστεί σε οιαδήποτε σειρά, ως εξής:



$$A:\begin{cases}\alpha \le \theta \le \beta \\ \gamma \le \rho \le \delta\end{cases} \Rightarrow$$

$$\iint_A f dA = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} d\theta \int_{\rho=\gamma}^{\rho=\delta} f(\rho,\theta)\rho d\rho = \int_{\rho=\gamma}^{\rho=\delta} \rho d\rho \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} f(\rho,\theta) d\theta$$

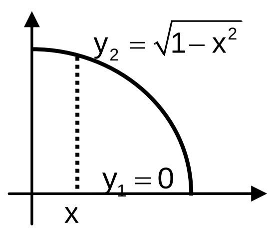
Τέλος αν επιπλέον η συνάρτηση είναι και χωριζομένων μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες, τότε το αντίστοιχο διπλό ολοκλήρωμα εκφράζεται ως γινόμενο δύο απλών ολοκληρωμάτων:

$$f(\rho,\theta) = g(\theta)h(\rho) \Rightarrow \iint_{\substack{\alpha\le\theta\le\beta \\ \gamma\le\rho\le\delta}} g(\theta)h(\rho)\rho d\rho d\theta = \left(\int_\alpha^\beta g(\theta)d\theta\right)\left(\int_\gamma^\delta h(\rho)\rho d\rho\right)$$

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f = x + y$, στον κυκλικό τομέα που βρίσκεται εντός του μοναδιαίου κύκλου: $x^2 + y^2 \le 1$ στη θετική περιοχή: $\{x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

Λύση 1. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες η περιοχή περιγράφεται με τις ανισότητες:

$$A:\ \{0 \le x \le 1,\ \ y_1 = 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} = y_2\}$$



Υπολογίζουμε το διπλό ολοκλήρωμα:

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_{x=0}^{x=1} dx \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} (x+y)dy$$

$$= \int_{x=0}^{y=1} dx \left[xy + y^2/2\right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} x\sqrt{1-x^2}dx + \int_{x=0}^{x=1} (1-x^2)/2dx = 1/3 + 1/2 - 1/6 = 2/3$$

Σημ. Το πρώτο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με την αντικατάσταση: $\{x = \sin z\}$,ή απευθείας:

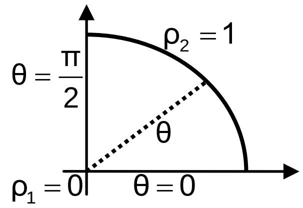
$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = (-1/2)\int_0^1 -2x(1-x^2)^{1/2}dx = (-1/2)(2/3)(1-x^2)^{3/2}\Big|_0^1 = 1/3$$

▲

Λύση 2. Σε πολικές συντεταγμένες η συνάρτηση είναι χωριζόμενων μεταβλητών και η περιοχή ολοκλήρωσης έχει σταθερά όρια:

$$f = x + y = \rho\cos\theta + \rho\sin\theta = (\cos\theta + \sin\theta)\rho$$

$$A : \{0 \le \theta \le \pi/2,\ \ 0 \le \rho \le 1\}$$



Το διπλό ολοκλήρωμα εκφράζεται ως γινόμενο απλών ολοκληρωμάτων:

$$\iint_A f dA = \left(\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} (\cos\theta + \sin\theta) d\theta\right)\left(\int_{\rho=0}^{\rho=1} \rho\rho d\rho\right)$$

$$= \left(\sin\theta - \cos\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}\right)\left(\rho^3 / 3\Big|_{\rho=0}^{\rho=1}\right)$$

$$= (1+1)(1/3) = 2/3$$

▲

6. Κατανομή Gauss

Θα υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης:

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

στην περιοχή εντός του κύκλου ακτίνας $\alpha:\ x^2 + y^2 \le \alpha^2$.

Λύση. Σε πολικές συντεταγμένες η συνάρτηση είναι χωριζομένων μεταβλητών και η περιοχή ολοκλήρωσης είναι ορθογώνια:

$$f = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-\rho^2},\ A : \{0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le \alpha\}$$

Το διπλό ολοκλήρωμα εκφράζεται ως γινόμενο απλών ολοκληρωμάτων:

$$\iint_A f dA = \left(\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta\right)\left(\int_{\rho=0}^{\rho=\alpha} e^{-\rho^2} \rho d\rho\right) = \left(\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\right)\left(-e^{-\rho^2} / 2\Big|_{\rho=0}^{\rho=\alpha}\right) = \pi(1 - e^{-\alpha^2})$$

Παίρνοντας το όριο $\alpha \to +\infty$, βρίσκουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα της παραπάνω συνάρτησης σε ολόκληρο το επίπεδο:

$$\iint_{\substack{-\infty<x<+\infty \\ -\infty<y<+\infty}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \iint_{\substack{0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\rho<+\infty}} e^{-\rho^2} \rho d\theta d\rho = \pi$$

▲

Παρατήρηση. Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το πολύ σημαντικό γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Πράγματι, το τετράγωνο του παραπάνω ολοκληρώματος μπορεί να εκφραστεί ως το διπλό ολοκλήρωμα που υπολογίσαμε προηγουμένως:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy\right) = \iint_{\substack{-\infty<x<+\infty \\ -\infty<y<+\infty}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi$$

Κατανομή Gauss καλείται η συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2},\ -\infty < x < +\infty$$

Έχει θετικές τιμές και σύμφωνα με τα παραπάνω έχει συνολικό ολοκλήρωμα 1:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} = 1$$