III.7 ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΕ ΠΕΡΙΟΧΗ

ΣΥΝΘΗΚΕΣ

1.Ολικά και τοπικά ακρότατα. 2.Εσωτερικά και συνοριακά ακρότατα 3.Χωριζόμενες μεταβλητές 4.Συνθήκες για ακρότατα 5.Ολικά ακρότατα κυρτών/κοίλων συναρτήσεων 6.Περισσότερες μεταβλητές.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

7.Δεύτερο διαφορικό.

ΣΥΝΘΗΚΕΣ

1. Ολικά και τοπικά ακρότατα

Θεωρούμε τις τιμές της συνάρτησης $f(x,y)$ στα σημεία μιας επίπεδης περιοχής D. Σημεία στα οποία η συνάρτηση έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή καλούνται **ακρότατα της συνάρτησης**, και η τιμή της **ακρότατη τιμή,** *μέγιστη* ή *ελάχιστη* αντίστοιχα. Θα καλείται **γνήσιο ακρότατο,** μέγιστο ή ελάχιστο, αν είναι μοναδικό. Το πρόβλημα εύρεσης των ακρότατων θα διατυπώνεται στη μορφή:

$$\max_{x,y}\{f(x,y) \,\|\, D\}, \quad \min_{x,y}\{f(x,y) \,\|\, D\}$$

για μέγιστο και ελάχιστο αντίστοιχα. Όσον αφορά την λύση θα χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο συμβολισμό και για μέγιστο και για ελάχιστο:

$$(x^*,y^*) \Rightarrow f^* = f(x^*,y^*)$$

Εξάλλου, στις εφαρμογές μας ενδιαφέρει συνήθως μόνο το ένα από τα δύο. Σε κάθε περίπτωση, η μαθηματική αντιμετώπιση των δύο προβλημάτων είναι ισοδύναμη διότι το μέγιστο μιας συνάρτησης συμπίπτει με το ελάχιστο της αρνητικής της, και αντιστρόφως. Η συνάρτηση $f(x,y)$ αποτελεί το **κριτήριο βελτιστοποίησης** και καλείται **αντικειμενική συνάρτηση.**

Παράδειγμα

1. Η $f = 1 - x^2 - y^2 = 1 - (x^2 + y^2)$ σε ολόκληρο το επίπεδο, έχει γνήσιο ολικό μέγιστο στο σημείο $(0,0)$ με μέγιστη τιμή 1, διότι σε κάθε άλλο σημείο αφαιρούμε ένα γνήσια θετικό μέγεθος. Δεν είναι κάτω φραγμένη και επομένως δεν έχει ολικό ελάχιστο σε σημείο του επιπέδου. Το ελάχιστό της είναι $-\infty$ και βρίσκεται στο άπειρο, ως όριο.

2. Η $f = 1 + x^2 - 2xy + y^2 = 1 + (x - y)^2$ σε ολόκληρο το επίπεδο, έχει ελάχιστη τιμή 1 σε **όλα** τα σημεία της ευθείας: $y = x$. Το ελάχιστο δεν είναι γνήσιο. Δεν είναι πάνω φραγμένη και έτσι δεν έχει ολικό μέγιστο σε σημείο του επιπέδου. Το μέγιστό της είναι $+\infty$ και βρίσκεται στο άπειρο, ως όριο.

▲

Τα παραπάνω καλούνται **ολικά ακρότατα** διότι συγκρίνουμε μεταξύ τους τις τιμές της συνάρτησης σε μια ολόκληρη περιοχή D η οποία και καλείται **περιοχή βελτιστοποίησης.** Στα παραπάνω παραδείγματα ήταν ολόκληρο το επίπεδο R^2. Αν η σύγκριση γίνεται μόνο μεταξύ **γειτονικών σημείων** στην περιοχή, δηλαδή αφορά το πρόσημο του Δf για μικρές μεταβολές $\{\Delta x, \Delta y\}$ από το σημείο, τότε το ακρότατο, μέγιστο ή ελάχιστο, καλείται **τοπικό ακρότατο.**

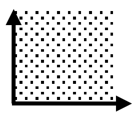
2. Εσωτερικά και συνοριακά ακρότατα

Γενικά, σε μια περιοχή που παριστάνεται με κάποια ανισότητα: $g(x,y) \ge 0$, διακρίνουμε το **εσωτερικό** της που παριστάνεται με τη γνήσια ανισότητα: $g(x,y) > 0$, και το **σύνορο** που παριστάνεται με την ισότητα: $g(x,y) = 0$. Ανάλογα ορίζεται το εσωτερικό και το σύνορο αν η ανισότητα είναι της μορφής: $g(x,y) \le 0$. Μια περιοχή μπορεί να ορίζεται και από ένα σύνολο ανισοτήτων, ως η τομή των αντίστοιχων περιοχών.

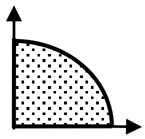
Παράδειγμα

1. Ολόκληρο το επίπεδο: R^2, είναι μόνο εσωτερικό χωρίς σύνορο.

2. Η θετική περιοχή: $R^2_+ = \{x \ge 0, y \ge 0\}$, έχει για εσωτερικό τη γνήσια θετική περιοχή: $R^2_{++} = \{x > 0, y > 0\}$, και για σύνορο τους θετικούς ημιάξονες: $\{x = 0,\ y \ge 0\}$, $\{y = 0,\ x \ge 0\}$.



3. Η περιοχή: $\{x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$, έχει ως εσωτερικό τα γνήσια θετικά σημεία που βρίσκονται γνήσια εντός του μοναδιαίου κύκλου: $\{x^2+y^2<1,\ x>0,\ y>0\}$. Το σύνορο αποτελείται από τρία τμήματα, το τμήμα της περιφέρειας στη θετική περιοχή και τις ακτίνες στους δύο άξονες:



$$\{x^2+y^2=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}\quad \{x=0,\ 0\le y\le 1\}\quad \{y=0,\ 0\le x\le 1\}.$$

▲

Ένα ακρότατο, ολικό ή τοπικό, θα καλείται **εσωτερικό ακρότατο** αν βρίσκεται στο εσωτερικό της περιοχής βελτιστοποίησης και **συνοριακό ακρότατο** αν βρίσκεται στο σύνορο. Θα ασχοληθούμε κυρίως με εσωτερικά ακρότατα. Παρατηρούμε καταρχήν ότι ένα ακρότατο θα είναι ακρότατο και ως προς μεταβολές μόνο της μιας μεταβλητής κρατώντας την άλλη σταθερή. Από τη θεωρία ακρότατων για συναρτήσεις μιας μεταβλητής προκύπτει ότι **ένα εσωτερικό ακρότατο θα ναι οπωσδήποτε στάσιμο,** δηλαδή θα ικανοποιεί τις εξισώσεις:

$$\{f_x=0, f_y=0\} \text{ ή διανυσματικά } f'=\vec{0}$$

Συμπεραίνουμε ότι το ακρότατο θα ανήκει σε μια από τις παρακάτω κατηγορίες:

- ***Στάσιμο στο εσωτερικό της περιοχής,*** *αν υπάρχουν.*
- ***Συνοριακό,*** *αν έχουμε σύνορο.*
- ***Στο άπειρο****, αν η περιοχή βελτιστοποίησης δεν είναι φραγμένη.*

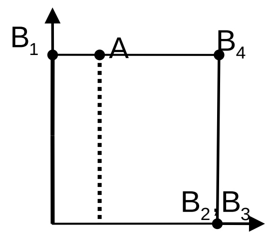
Οι **γραμμικές συναρτήσεις** δεν έχουν στάσιμα σημεία οπότε τα ακρότατα βρίσκονται στο σύνορο ή στο άπειρο, εκτός βέβαια αν είναι σταθερές.

Παράδειγμα. Θα βρούμε το μέγιστο της συνάρτησης $f(x,y)=x^2-xy+x+y/2$ στην τετραγωνική περιοχή: $\{0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2\}$.

Λύση. Η περιοχή είναι φραγμένη, οπότε το μέγιστο θα βρίσκεται σε σημεία της περιοχής, στάσιμα ή συνοριακά. Θα τα εντοπίσουμε και θα συγκρίνουμε τις τιμές τους.

- Στάσιμα στο **εσωτερικό** της περιοχής. Βρίσκουμε ένα στάσιμο αλλά δεν ανήκει στο εσωτερικό.

$$A:\{f_x=2x-y+1=0,\ f_y=-x+1/2=0\}\Rightarrow(1/2,2)$$



Το σύνορο αποτελείται από τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα

$\{x=0, 0\le y\le 2\}\Rightarrow f=y/2$, μέγιστο στο B_1: $(0,2)$ με $f=1$

$\{x=2, 0\le y\le 2\}\Rightarrow f=6-3y/2$, μέγιστο στο B_2: $(2,0)$ με $f=6$

$\{0\le x\le 2, y=0\}\Rightarrow f=x^2+x$, μέγιστο στο B_3: $(2,0)$ με $f=6$

$\{0\le x\le 2, y=2\}\Rightarrow f=x^2-x+1$, μέγιστο στο B_4: $(2,2)$ με $f=3$

Εδώ ανήκει και το παραπάνω στάσιμο $A:(1/2,2)$, που τελικά είναι ελάχιστο σαυτό το τμήμα.

Συγκρίνοντας τις παραπάνω τιμές συμπεραίνουμε ότι το μέγιστο βρίσκεται στην κορυφή

$B_2=B_3$: $(x^*,y^*)=(2,0)$ με $f^*=6$. ▲

3. Χωριζόμενες μεταβλητές

Το πρόβλημα ακρότατων τιμών με δύο μεταβλητές ανάγεται σε δύο απλά προβλήματα ακρότατων τιμών με μια μεταβλητή το καθένα, στην παρακάτω ειδική περίπτωση:

*Θεωρούμε μια συνάρτηση **χωριζόμενων μεταβλητών με ορθογώνιο πεδίο ορισμο:***

$$f(x,y)=g(x)+h(y),\quad D:\{\alpha\le x\le\beta,\ \gamma\le y\le\delta\}$$

*Ένα σημείο (x^*,y^*) είναι ολικό ακρότατο $\Leftrightarrow$ οι συντεταγμένες του είναι ολικά ακρότατα **του ίδιου τύπου** {max ή min} των αντίστοιχων συναρτήσεων μιας μεταβλητής στα αντίστοιχα διαστήματα:*

$$\max/\min\{f(x,y)=g(x)+h(y)\,\|\,\alpha\le x\le\beta,\gamma\le y\le\delta\}\Leftrightarrow\begin{cases}\max/\min\{g(x)\,\|\,\alpha\le x\le\beta\}\\ \max/\min\{h(y)\,\|\,\gamma\le y\le\delta\}\end{cases}$$

Το ορθογώνιο πεδίο ορισμού μπορεί να είναι και μη φραγμένο.

Παράδειγμα. $\max\{f=1-x^2-y^2=(1-x^2)+(-y^2)\}\Leftrightarrow\begin{cases}\max\{g(x)=1-x^2\}\Rightarrow x^*=0\\ \max\{h(y)=-y^2\}\Rightarrow y^*=0\end{cases}$

Το ολικό μέγιστο βρίσκεται στο $(0,0)$ με $f(0,0)=1$ ▲

Παράδειγμα. $\max\{f=1-x-y=(1-x)+(-y)\,\|\,x\geq 0,\ y\geq 0\}\Leftrightarrow\begin{cases}\max\{1-x\,\|\,x\geq 0\}\Rightarrow x^{*}=0\\ \max\{-y\,\|\,y\geq 0\}\Rightarrow y^{*}=0\end{cases}$

Το ολικό μέγιστο βρίσκεται στο $(0,0)$ με $f(0,0)=1$

Παράδειγμα. $\max\{f=x^2-2x-y^2\}$ στο επίπεδο

Είναι χωριζόμενων μεταβλητών:

$$\max\{f=(x^2-2x)+(-y^2)\}\Leftrightarrow\begin{cases}\max\{x^2-2x\}\Rightarrow x^{*}\to\pm\infty\\ \max\{-y^2\}\Rightarrow y^{*}=0\end{cases}$$

Το μέγιστο βρίσκεται στο άπειρο και έχει άπειρη τιμή, ως όριο

Παρατήρηση. Το στάσιμό $\{f_x=0,f_y=0\}\Rightarrow(x=1,y=0)$ δεν είναι ακρότατο, $x=1$ είναι ελάχιστο για την $g(x)=x^2-2x$, ενώ $y=0$ είναι μέγιστο για την $h(y)=-y^2$. Το λέμε **σαγματικό** σημείο.

▲

Παράδειγμα. $\max\{f(x,y)=p(2\sqrt{x}+\sqrt{y})-vx-wy\,\|\,x\geq 0,y\geq 0\}$ με $\{p>0,\ v>0,\ w>0\}$

Είναι χωριζομένων μεταβλητών σε ορθογώνια περιοχή. Οι επιμέρους συναρτήσεις είναι κοίλες σε διάστημα, με λύση στάσιμη:

$$\max\{g(x)=p2\sqrt{x}-vx\,|\,x\geq 0\}\Rightarrow g'(x)=\frac{p}{\sqrt{x}}-v=0\Rightarrow x^{*}=\frac{p^2}{v^2},$$

$$\max\{h(y)=p\sqrt{y}-wy\,|\,y\geq 0\}\Rightarrow h'(y)=\frac{p}{2\sqrt{y}}-w=0\Rightarrow y^{*}=\frac{p^2}{4w^2},$$

Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι:

$$f^{*}=f(x^{*},y^{*})=p(2\frac{p}{v}+\frac{p}{2w})-v\frac{p^2}{v^2}-w\frac{p^2}{4w}=p^2\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{4w}\right)$$

Ως συνάρτηση των παραμέτρων, η μέγιστη τιμή είναι: $p-$αύξουσα κυρτή, $\{v,w\}-$φθίνουσα κυρτή.

Παρατήρηση. Η ίδια μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για συναρτήσεις χωριζομένων μεταβλητών στη μορφή γινομένου:

$f(x,y)=g(x)h(y)$ με $g(x)\geq 0,\ h(x)\geq 0$

Εξάλλου αντί της παραπάνω μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την **διατακτικά ισοδύναμη** συνάρτηση που προκύπτει παίρνοντας τον αύξοντα μετασχηματισμό:

$\ln f(x,y)=\ln g(x,y)+\ln h(x,y)$

▲

4. Συνθήκες για ακρότατα

Στη γενική περίπτωση, ο χαρακτηρισμός των στάσιμων σημείων ως ακρότατων απαιτεί την χρήση των δεύτερων μερικών παραγώγων. Παρατηρούμε καταρχήν ότι ένα ακρότατο θα είναι ακρότατο του ίδιου τύπου *ως προς κάθε μεταβλητή χωριστά.* Συμπεραίνουμε ότι:

*Ένα **εσωτερικό ακρότατο** της συνάρτησης* $f(x,y)$ *θα είναι καταρχήν στάσιμο, δηλαδή θα ικανοποιεί:*

$\{f_x=0,f_y=0\}$

Επιπλέον οι απλές δεύτερες παράγωγοι θα ικανοποιούν:

1. $f_{xx}\leq 0,\ f_{yy}\leq 0$, *αν είναι μέγιστο,* *2.* $f_{xx}\geq 0,\ f_{yy}\geq 0$ *αν είναι ελάχιστο.*

Οι παραπάνω απλές συνθήκες 2ης τάξεως είναι ελλιπείς διότι αφορούν μεταβολές μόνο της μιας μεταβλητής κάθε φορά, δηλαδή για μετατοπίσεις στις κατευθύνσεις των δύο αξόνων. Για να χαρακτηρίσουμε τα εσωτερικά στάσιμα ως ακρότατα πρέπει να πάρουμε υπόψη και μεταβολές αμφότερων των μεταβλητών, δηλαδή μετατοπίσεις προς όλες τις κατευθύνσεις στο πεδίο ορισμού.

Παρατήρηση. Αν στο στάσιμο οι δυο δεύτερες παράγωγοι έχουν γνήσια **αντίθετο πρόσημο**:

$f_{xx}f_{yy}<0$

τότε το σημείο σίγουρα δεν είναι ακρότατο διότι είναι μέγιστο στη μια κατεύθυνση, ελάχιστο στην άλλη. Το λέμε **σαγματικό** ή **σελοειδές (**saddle point).

▲

Αναγκαίες και ικανές συνθήκες για εσωτερικά ακρότατα

Ένα εσωτερικό ακρότατο, τοπικό ή ολικό της συνάρτησης $f(x,y)$ *είναι καταρχήν στάσιμο:*

$$f' = J_f = 0 \Rightarrow \{f_x = 0,\ f_y = 0\}$$

Επιπλέον θα ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες στο στάσιμο σημείο:

1. Αν είναι ελάχιστο *τότε ο εσσιανός πίνακας είναι **θετικά ημιορισμένος:***

$$f'' = H_f \geq 0 : \{f_{xx} \geq 0,\ f_{yy} \geq 0,\ \Delta = f_{xx}f_{yy} - f^2{}_{xy} \geq 0\}$$

*Αντίστροφα, είναι **γνήσιο τοπικό ελάχιστο** αν ο εσσιανός πίνακας είναι **θετικά ορισμένος:***

$$f'' = H_f > 0 : \{f_{xx} > 0, f_{yy} > 0,\ \Delta = f_{xx}f_{yy} - f^2{}_{xy} > 0\}$$

2. Αν είναι μέγιστο *τότε ο εσσιανός πίνακας είναι **αρνητικά ημιορισμένος:***

$$f'' = H_f \leq 0 : \{f_{xx} \leq 0,\ f_{yy} \leq 0,\ \Delta = f_{xx}f_{yy} - f^2{}_{xy} \geq 0\}$$

*Αντίστροφα, είναι **γνήσιο τοπικό μέγιστο** αν ο εσσιανός πίνακας είναι **αρνητικά ορισμένος:***

$$f'' = H_f < 0 : \{f_{xx} < 0,\ f_{yy} < 0,\ \Delta = f_{xx}f_{yy} - f^2{}_{xy} > 0\}$$

3. Δεν είναι ακρότατο *αν ο εσσιανός πίνακας είναι **αόριστος**:*

$$f'' = H_f >< 0 : \Delta = f_{xx}f_{yy} - f^2{}_{xy} < 0$$

Στην τελευταία περίπτωση η συνάρτηση παρουσιάζει γνήσιο τοπικό ελάχιστο προς κάποιες κατευθύνσεις και γνήσιο τοπικό μέγιστο προς κάποιες άλλες. Ειδικά δεν είναι ακρότατο. Στάσιμα σημεία αυτής της κατηγορίας τα ονομάσαμε **σαγματικά** ή **σελοειδή,** διότι στη γειτονιά τους η επιφάνεια έχει την μορφή σέλλας όπως και στις αόριστες τετραγωνικές μορφές που συναντήσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Παράδειγμα. $f = 2x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} f_x = 4x - 4 = 0 \\ f_y = 2y - 2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x = 1, y = 1)$

$$\{f_{xx} = 4 > 0, f_{yy} = 2 > 0\}\ \{f_{xy} = 0 \Rightarrow \Delta = 8 > 0\} \Rightarrow f'' = H_f > 0$$

Ο εσσιανός πίνακας είναι σταθερός θετικά ορισμένος επομένως το στάσιμο είναι γνήσιο τοπικό ελάχιστο με τιμή της συνάρτησης: $f^* = -2$. Θα διαπιστώσουμε παρακάτω στα πλαίσια της θεωρίας Κυρτού Προγραμματισμού ότι το παραπάνω στάσιμο είναι στην πραγματικότητα γνήσιο ολικό ελάχιστο σε ολόκληρο το επίπεδο. Εξάλλου συμπληρώνοντας τα τετράγωνα βρίσκουμε:

$$f = 2x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = -2 + 2(x-1)^2 + (y-1)^2$$

Συμπεραίνουμε ότι είναι ολικό ελάχιστο διότι παντού αλλού προσθέτουμε ένα γνήσιο θετικό μέγεθος. Όσον αφορά το μέγιστο, άλλο στάσιμο δεν υπάρχει, οπότε το μέγιστο θα βρίσκεται στο άπειρο. Η συνάρτηση δεν είναι πάνω φραγμένη.

Σημ. Το παραπάνω μπορεί να αντιμετωπιστεί και ως πρόβλημα χωριζομένων μεταβλητών.

▲

Παράδειγμα. $f(x,y) = pxy - vx - wy \Rightarrow \left.\begin{matrix} f_x = py - v = 0 \\ f_y = px - w = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = v/p \\ x = w/p \end{matrix}\right\}$

$$\left.\begin{matrix} f_{xx} = 0,\ f_{xy} = p \\ f_{yx} = p,\ f_{yy} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f_{xx} = 0,\ f_{yy} = 0,\ \Delta = -p^2 < 0$$

Το στάσιμο σημείο δεν είναι ακρότατο. Είναι **σαγματικό.** Δεν έχουμε σύνορο, οπότε τα ακρότατα βρίσκονται στο άπειρο, και το μέγιστο και το ελάχιστο.

▲

Παράδειγμα. $\max\{f = x^{1/2}y^{1/4} - x - y \,\|\, x \ge 0, y \ge 0\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f_x = x^{-1/2}y^{1/4}/2 - 1 = 0 \\ f_y = x^{1/2}y^{-3/4}/4 - 1 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^{-1/2}y^{1/4} = 2 \\ x^{1/2}y^{-3/4} = 4 \end{matrix}\right\}$

Λύση. Για να λύσουμε το σύστημα απαλείφουμε το x πολλαπλασιάζοντας κατά μέρη. Με τον ίδιο τρόπο απαλείφουμε το y αφού πρώτα υψώσουμε την $1^{η}$ εξίσωση στην 3η δύναμη. Βρίσκουμε:

$$\left.\begin{matrix} x^{-1/2}y^{1/4} = 2 \\ x^{1/2}y^{-3/4} = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} (x^{-1/2}y^{1/4})(x^{1/2}y^{-3/4}) = 2\cdot 4 \\ (x^{-3/2}y^{3/4})(x^{1/2}y^{-3/4}) = 2^3\cdot 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y^{-2/4} = 2^3 \\ x^{-2/2} = 2^5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 2^{-5} \\ y = 2^{-6} \end{matrix}\right\}$$

Εναλλακτικά μπορούμε να πάρουμε λογαριθμους και να το λύσουμε ως γραμμικό σύστημα:

$$\left.\begin{matrix} -\ln x/2 + \ln y/4 = \ln 2 \\ \ln x/2 - 3\ln y/4 = \ln 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -2\ln x + \ln y = 4\ln 2 \\ 2\ln x - 3\ln y = 8\ln 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \ln x = -5\ln 2 = \ln 2^{-5} \\ \ln y = -6\ln 2 = \ln 2^{-6} \end{matrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x = 2^{-5} \\ y = 2^{-6} \end{matrix}\right.$$

Βρήκαμε ένα στάσιμο σημείο. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις δεύτερες παραγώγους:

$$\left.\begin{matrix} f_{xx} = (-1/4)x^{-3/2}y^{1/4},\ f_{xy} = (1/8)x^{-1/2}y^{-3/4} \\ f_{yx} = (1/8)x^{-1/2}y^{-3/4},\ f_{yy} = (-3/16)x^{1/2}y^{-7/4} \end{matrix}\right\}$$

Στο συγκεκριμένο σημείο βρίσκουμε τον εσσιανό πίνακα:

$$H_f = \begin{pmatrix} -2^{15/2}2^{-6/4}/4 & 2^{5/2}2^{18/4}/8 \\ 2^{5/2}2^{18/4}/8 & -3\cdot 2^{-5/2}2^{42/4}/16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^8 & 2^4 \\ 2^4 & -3\cdot 2^4 \end{pmatrix}$$

Έχουμε:

$$f_{xx} = -2^8 < 0,\ f_{yy} = -3\cdot 2^4 < 0,\ \Delta = 6\cdot 2^{12} - 2^8 > 0$$

Ο εσσιανός πίνακας είναι αρνητικά ορισμένος και επομένως το στάσιμο είναι **γνήσιο τοπικό μέγιστο.** (Εξάλλου η συνάρτησή μας είναι τύπου C-D με $\alpha+\beta<1$, οπότε η $2^{η}$ παράγωγος είναι *παντού* αρνητικά ορισμένη διότι οι γραμμικοί όροι δεν την επηρεάζουν.). Το ολικό μέγιστο θα είναι είτε το παραπάνω, είτε στο σύνορο, είτε στο άπειρο. Αλλά, στο σύνορο βρίσκουμε αρνητικές τιμές:

$$\{x = 0 \Rightarrow f = -y \le 0\},\ \{y = 0 \Rightarrow f = -x \le 0\}$$

ενώ στο στάσιμο έχουμε γνήσια θετική τιμή:

$$f = 2^{-5/2}2^{-6/4} - 2^{-5} - 2^{-6} = 2^{-4} - 2^{-5} - 2^{-6} = 2^{-6}$$

Θα διαπιστώσουμε παρακάτω στα πλαίσια της θεωρίας Κυρτού Προγραμματισμού ότι το παραπάνω στάσιμο είναι πράγματι **γνήσιο ολικό μέγιστο.**

5. Ολικά ακρότατα κυρτών/κοίλων συναρτήσεων

Το παρακάτω αποδεικνύεται στα πλαίσια της γενικής θεωρίας **Κυρτού Προγραμματισμού (CP):**
*Θεωρούμε μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού **κυρτή περιοχή**. Ένα στάσιμο σημείο της είναι:*
• ***ολικό μέγιστο*** *αν η συνάρτηση είναι κοίλη*
• ***ολικό ελάχιστο*** *αν η συνάρτηση είναι κυρτή*

Παράδειγμα. $f = x^{1/2}y^{1/4} - x - y$

Η συνάρτηση είναι κοίλη στη θετική περιοχή ως συνάρτηση τύπου C-D με $\alpha+\beta<1$, διότι οι γραμμικοί όροι δεν την επηρεάζουν. Επομένως το μοναδικό στάσιμο που βρήκαμε προηγουμένως είναι γνήσιο ολικό μέγιστο:

$$\{x = 2^{-5},\ y = 2^{-6}\}$$

▲

Παράδειγμα. $f = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 2\alpha x + 2\beta y + \delta = 0 \\ f_y = 2\beta x + 2\gamma y + \varepsilon = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha x + \beta y = -\delta/2 \\ \beta x + \gamma y = -\varepsilon/2 \end{array}\right\} \text{ με } \Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\gamma - \beta^2,\ f'' = \begin{pmatrix} 2\alpha & 2\beta \\ 2\beta & 2\gamma \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

1. Αν $\Delta = \alpha\gamma - \beta^2 \neq 0$ τότε το γραμμικό σύστημα έχει μια και μοναδική λύση, οπότε το στάσιμο θα είναι ένα και μοναδικό. Ο χαρακτηρισμός του καθορίζεται από τους συντελεστές των τετραγωνικών όρων, όπως ακριβώς τα πρόσημα για την αντίστοιχη ορισμένη τετραγωνική μορφή:

$$Q = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$$

Εξάλλου όπως αναφέραμε και προηγουμένως ο χαρακτηρισμός δεν επηρεάζεται από τους προσθετικούς γραμμικούς όρους. Έτσι το στάσιμο είναι γνήσιο ολικό ελάχιστο αν είναι θετικά ορισμένη, γνήσιο ολικό μέγιστο αν είναι αρνητικά ορισμένη, σαγματικό αν είναι αόριστη.

2. Αν $\Delta = \alpha\gamma - \beta^2 = 0$, τότε το σύστημα δεν έχει λύση, επομένως δεν έχει στάσιμα και τα ακρότατα βρίσκονται στο άπειρο, εκτός αν:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\delta}{\varepsilon}$$

Τότε θα έχει πολλά στάσιμα, μια ολόκληρη ευθεία, και ο χαρακτηρισμός τους εξαρτάται από τους συντελεστές των τετραγωνικών όρων, όπως ακριβώς για την αντίστοιχη ημιορισμένη, όχι ορισμένη, τετραγωνική μορφή.

6. Περισσότερες μεταβλητές.

Όλα τα παραπάνω γενικεύονται άμεσα σε περισσότερες μεταβλητές και περιορισμούς. Π.χ. για το πρόβλημα **χωριζόμενων μεταβλητών σε 3 μεταβλητές**, έχουμε την ισοδυναμία:

$$\max\{f(x,y,z) = g(x) + h(y) + e(z) \parallel \alpha \le x \le \beta, \gamma \le y \le \delta,\ \varepsilon \le z \le \eta\} \Leftrightarrow \begin{cases} \max\{g(x) \parallel \alpha \le x \le \beta\} \\ \max\{h(y) \parallel \gamma \le y \le \delta\} \\ \max\{e(z) \parallel \varepsilon \le z \le \eta\} \end{cases} \Rightarrow \{x^*, y^*, z^*\},\ f^*$$

και αντίστοιχα για το πρόβλημα ελαχίστου (min). Γενικότερα, μια συνάρτηση τριών μεταβλητών $f(x,y,z)$ έχει 3 παραγώγους 1ης τάξης:

$$Df = J_f = f' = (f_x,\ f_y,\ f_z)$$

και $3^2 = 9$ παραγώγους 2ης τάξης, που σχηματίζουν τον εσσιανό πίνακα δεύτερων παραγώγων

$$D^2 f = f'' = H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}, \text{ όπου: } f_{xy} = f_{yx},\ f_{xz} = f_{zx},\ f_{yz} = f_{zy}$$

Τα εσωτερικά ακρότατα, μέγιστα ή ελάχιστα, θα είναι στάσιμα:

$$\max/\min\{f(x,y,z) \parallel D\} \Rightarrow \{f_x = 0,\ f_y = 0,\ f_z = 0\} \text{ ή σε διανυσματική μορφή: } f' = 0$$

Τα στάσιμα χαρακτηρίζονται ως ακρότατα από το πρόσημο του παραπάνω εσσιανού πίνακα, σύμφωνα με την **γενική θεωρία χαρακτηρισμού συμμετρικών πινάκων** που παρουσιάζεται σε ειδικό κεφάλαιο της Γραμμικής Άλγεβρας.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

7. Δεύτερο διαφορικό

Ο χαρακτηρισμός των στάσιμων που δώσαμε παραπάνω μπορεί να ερμηνευτεί χρησιμοποιώντας την θεωρία του 2ου διαφορικού. Θεωρούμε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών:

$$f(x,y)$$

Αν τα $\{x,y\}$ μεταβληθούν κατά $\{\Delta x,\ \Delta y\}$ τότε η τιμή της συνάρτησης θα μεταβληθεί κατά:

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

Σε αντιστοιχία με την γραμμική προσέγγιση, μια πρώτη εκτίμηση της μεταβολής στην τιμή της συνάρτησης δίνεται από το **πρώτο διαφορικό:**

$\Delta f \approx df = f_x dx + f_y dy$, όπου: $\{\Delta x = dx,\ \Delta y = dy\}$

Σε αντιστοιχία με την παραβολική προσέγγιση, μια καλλίτερη εκτίμηση της μεταβολής στην τιμή της συνάρτησης βρίσκεται αν στο πρώτο διαφορικό προσθέσουμε και το μισό του **δεύτερου διαφορικού:**

$$\Delta f \approx df + \frac{1}{2}d^2 f = [f_x dx + f_y dy] + \frac{1}{2}[f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2]$$

Ειδικά στα στάσιμα σημεία όπου έχουμε $f' = 0 \Rightarrow df = 0$, μας μένει μόνο η εκτίμηση με το δεύτερο διαφορικό:

$$\Delta f \approx \frac{1}{2}d^2 f = \frac{1}{2}[f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2]$$

Το παραπάνω μας δίνει και τον χαρακτηρισμό των στάσιμων ως τοπικών ακρότατων με βάση το πρόσημο του 2ου διαφορικού για μικρές μεταβολές, που είναι ακριβώς μια τετραγωνική μορφή των $\{dx, dy\}$ με πίνακα συντελεστών τον εσσιανό πίνακα δεύτερων παραγώγων της συνάρτησης:

$$d^2 f = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2$$

Π.χ. για τοπικό μέγιστο θα έχουμε

1. Αναγκαία συνθήκη: $\Delta f \le 0 \Rightarrow d^2 f \le 0 \Rightarrow \{f_{xx} \le 0,\ f_{yy} \le 0,\ \Delta = f_{xx}f_{yy} - f^2{}_{xy} \ge 0\}$,
2. Ικανή συνθήκη: $\{f_{xx} < 0,\ f_{yy} < 0,\ \Delta = f_{xx}f_{yy} - f^2{}_{xy} > 0\} \Rightarrow d^2 f < 0 \Rightarrow \Delta f < 0$

Αντίστοιχα για ελάχιστο.