III.6 ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

ΣΥΝΘΗΚΕΣ

1.Ολικά ακρότατα 2.Τοπικά ακρότατα 3.Αναγκαίες και Ικανές συνθήκες 4.Συνθήκες για ακρότατα 5.Αλγόριθμος για ακρότατα

ΚΥΡΤΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

6.Κυρτός Προγραμματισμός 7.Ακρότατα με περιορισμούς 8.Παράμετροι.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

9.Δευτερο διαφορικό 10.Μεγιστοποίηση κέρδους-οφέλους.

ΣΥΝΘΗΚΕΣ

1. Ολικά ακρότατα

Λέμε ότι σε κάποιο διάστημα E μια συνάρτηση $f(x)$ έχει (ολικό) **ακρότατο** σε κάποιο σημείο x^*, αν έχει είτε **μέγιστη** (max) είτε **ελάχιστη** (min) τιμή σε σχέση με τις τιμές της σε ολόκληρο το διάστημα. Θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο για την **ακρότατη τιμή** της συνάρτησης, είτε *μέγιστη* είτε *ελάχιστη*:

$$f^* = f(x^*)$$

Παρατηρούμε ότι:

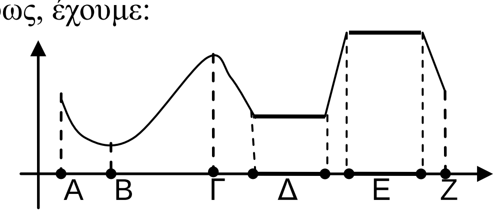
- Ένα ακρότατο μπορεί να βρίσκεται στο σύνορο ή στο εσωτερικό του διαστήματος, ενώ αν το διάστημα δεν είναι φραγμένο τότε μπορεί να βρίσκεται και στο άπειρο: $x \to \pm\infty$, ως όριο.
- Αν μια συνάρτηση δεν είναι φραγμένη τότε η αντίστοιχη ακρότατη τιμή της θα είναι άπειρη, ως όριο.
- Τα προβλήματα μέγιστου και ελάχιστου είναι ισοδύναμα ως *μαθηματικά προβλήματα,* διότι **τα μέγιστα μιας συνάρτησης συμπίπτουν με τα ελάχιστα της αρνητικής της**, και αντιστρόφως.

2. Τοπικά ακρότατα.

Λέμε ότι κάποιο x^* είναι **τοπικό ακρότατο** της συνάρτησης $f(x)$, μέγιστο ή ελάχιστο, αν η σύγκριση αφορά μόνο τα x που βρίσκονται σε κάποια **γειτονιά** του x^*, δηλαδή συγκρίνουμε τις τιμές μόνο για μικρές μεταβολές του x από το x^*. *Τα ολικά ακρότατα είναι και τοπικά.* Μια συνάρτηση μπορεί να έχει πολλές διαφορετικές τοπικά ακρότατες τιμές, αλλά μόνο μία ολικά μέγιστη και μόνο μία ολικά ελάχιστη σε ένα ή και σε περισσότερα από ένα σημεία. Ένα ακρότατο, ολικό ή τοπικό, θα το λέμε **γνήσιο** αν η τιμή της συνάρτησης είναι *γνήσια μεγαλύτερη* και *γνήσια μικρότερη* αντίστοιχα σε σχέση με τις συγκρινόμενες τιμές.

Παράδειγμα. Στη συνάρτηση του γραφήματος παραπλεύρως, έχουμε:

Α: τοπικό μέγιστο, γνήσιο, συνοριακό
Β: τοπικό και **ολικό** ελάχιστο, γνήσιο, εσωτερικό
Γ: τοπικό μέγιστο, γνήσιο, εσωτερικό
Δ: τοπικά ελάχιστα, εσωτερικά, όχι γνήσια
Ε: τοπικά και **ολικά** μέγιστα, εσωτερικά, όχι γνήσια
Ζ: τοπικό ελάχιστο, γνήσιο, συνοριακό



Στην πραγματικότητα, τα σημεία στο εσωτερικό των διαστημάτων $\{Δ,Ε\}$ δέχονται και άλλους χαρακτηρισμούς.

▲.

3.Αναγκαίες και Ικανές συνθήκες

Το πρόβλημα εύρεσης των ολικών ή τοπικών ακρότατων μιας συνάρτησης σε κάποιο διάστημα E, καλείται **πρόβλημα βελτιστοποίησης** σε μία μεταβλητή. Θα παριστάνεται στη μορφή:

$$\max\{f(x) \mid E\}, \quad \min\{f(x) \mid E\}$$

για μέγιστο και ελάχιστο αντίστοιχα. Η συνάρτηση $f(x)$ είναι το **κριτήριο της βελτιστοποίησης** και καλείται **αντικειμενική συνάρτηση.** Για τη λύση των προβλημάτων βελτιστοποίησης, όπως και για πολλά προβλήματα, διατυπώνονται συνήθως δύο τύποι συνθηκών:

Αναγκαίες συνθήκες. *Αν ένα σημείο είναι ακρότατο τότε τις ικανοποιεί.* Αλλά μπορεί να ικανοποιούνται και σε μη ακρότατα. Δηλαδή, οι αναγκαίες συνθήκες μπορεί να είναι πολύ **αδύνατες** *(χαλαρές)* και κάποια σημεία που τις ικανοποιούν να μην είναι ακρότατα. Αλλά μας επιτρέπουν να επιλέξουμε τα σημεία που είναι **υποψήφια** για ακρότατα.
Ικανές συνθήκες. *Αν ικανοποιούνται σε κάποιο σημείο τότε το σημείο αυτό είναι ακρότατο.* Αλλά ένα ακρότατο μπορεί να μην τις ικανοποιεί. Δηλαδή, οι ικανές συνθήκες μπορεί να είναι πολύ **ισχυρές** *(σφιχτές)* και κάποια ακρότατα να μη τις ικανοποιούν. Αλλά μας επιτρέπουν να χαρακτηρίσουμε ως ακρότατα ορισμένα από τα παραπάνω υποψήφια σημεία.
Θα συναντήσουμε και κατηγορίες συναρτήσεων για τις οποίες έχουμε συνθήκες που είναι ταυτόχρονα **ικανές και αναγκαίες** οπότε ένα σημείο θα είναι ακρότατο αν και μόνο αν τις ικανοποιεί.

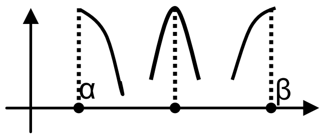
4.Συνθήκες για τοπικά ακρότατα

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f(x)$, ορισμένη σε διάστημα, φραγμένο ή μη φραγμένο. Τα άκρα του διαστήματος, αν υπάρχουν, αποτελούν το **σύνορο.** Θα τα παριστάνουμε με

$\{\alpha, \beta\}$

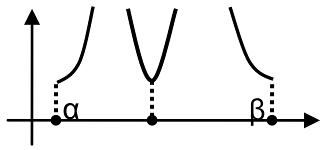
για το αριστερό και το δεξιό σύνορο αντίστοιχα. Βέβαια, αν το διάστημα δεν είναι φραγμένο, τότε το ένα ή και αμφότερα τα συνοριακά δεν θα υπάρχουν. Τα μη συνοριακά είναι τα **εσωτερικά** σημεία. Οι συνθήκες διαφέρουν ανάλογα αν το ακρότατο είναι συνοριακό ή εσωτερικό, διότι στο συνοριακό συγκρίνουμε με σημεία μόνο από τη μια πλευρά, ενώ στο εσωτερικό με σημεία από τις δύο πλευρές. Θεωρώντας συναρτήσεις συνεχείς και με συνεχείς παραγώγους, βρίσκουμε:

Αναγκαίες συνθήκες για μέγιστο (max). *Ένα μέγιστο* x^**, θα ικανοποιεί οπωσδήποτε **κάποια** από τις παρακάτω συνθήκες:*



1. *Στάσιμο στο εσωτερικό:* $f'(x^*) = 0$, $\alpha < x < \beta$ *, με* $f''(x^*) \le 0$
2. *Αριστερό σύνορο:* $x^* = \alpha$*, με* $f'(\alpha) \le 0$
3. *Δεξιό σύνορο:* $x^* = \beta$*, με* $f'(\beta) \ge 0$

Αναγκαίες συνθήκες για ελάχιστο (min). *Ένα ελάχιστο* x^**, θα ικανοποιεί οπωσδήποτε **κάποια** από τις παρακάτω συνθήκες:*



1. *Στάσιμο στο εσωτερικό:* $f'(x^*) = 0$, $\alpha < x < \beta$*, με* $f''(x^*) \ge 0$
2. *Αριστερό σύνορο:* $x^* = \alpha$*, με* $f'(\alpha) \ge 0$
3. *Δεξιό σύνορο:* $x^* = \beta$*, με* $f'(\beta) \le 0$

Οι παραπάνω αναγκαίες συνθήκες αφορούν τοπικά ακρότατα αλλά ισχύουν και για ολικά διότι ένα ολικό είναι και τοπικό. Δηλαδή, αν ένα σημείο είναι ακρότατο, είτε τοπικό είτε ολικό, τότε θα ικανοποιείται οπωσδήποτε κάποια από τις παραπάνω συνθήκες (είναι αναγκαίες), αλλά αν ικανοποιείται μια από τις συνθήκες αυτό δεν σημαίνει ότι το σημείο είναι το αντίστοιχο ακρότατο (δεν είναι ικανές). Γίνονται **ικανές για τοπικά ακρότατα** αν είναι γνήσιες. Δηλαδή:
Αν η εκάστοτε ανισότητα ισχύει γνήσια τότε το σημείο, είτε εσωτερικό είτε συνοριακό, είναι το αντίστοιχο γνήσιο τοπικό ακρότατο.

5. Αλγόριθμος για ακρότατα

1. Βρίσκουμε όλα τα σημεία που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες. Είναι τα υποψήφια.
2. Χαρακτηρίζουμε ορισμένα από τα παραπάνω σημεία ως γνήσια τοπικά ακρότατα χρησιμοποιώντας τις ικανές συνθήκες, όπου ισχύουν.
3. Για ολικά ακρότατα συγκρίνουμε μεταξύ τους τις τιμές της συνάρτησης στα υποψήφια σημεία που βρήκαμε στο 1, παίρνοντας υπόψη και τους χαρακτηρισμούς στο 2. Αν το διάστημα δεν είναι φραγμένο τότε πρέπει να συγκρίνουμε και με τις τιμές στο άπειρο.
Ο αλγόριθμος βασίζεται στο παρακάτω βασικό θεώρημα της Μαθηματικής Ανάλυσης:
Θεώρημα Weierstrass για ολικά ακρότατα. *Μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε φραγμένο κλειστό διάστημα:* $\alpha \le x \le \beta$*, έχει ολικά ακρότατες τιμές σε σημεία του διαστήματος.*

Παράδειγμα. $\max/\min\{f = x^3 + x^2 \,\|\, -\infty < x < +\infty\}$

Το διάστημα είναι μη φραγμένο χωρίς συνοριακά σημεία. Τα στάσιμα είναι:

$$f' = 3x^2 + 2x = x(3x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2/3$$

Στα στάσιμα η δεύτερη παράγωγος: $f'' = 6x + 2$, μας δίνει:

$x_1 = 0$: $f'' = 2 > 0 \Rightarrow$ γνήσιο τοπικό ελάχιστο με $f_1 = 0$

$x_2 = -2/3$: $f'' = -2 < 0 \Rightarrow$ γνήσιο τοπικό μέγιστο με $f_2 = 4/27$

Τα ολικά ακρότατα βρίσκονται στο άπειρο, διότι για $x \to \pm\infty$ υπερισχύει ο όρος x^3 με το μεγαλύτερο βαθμό και βρίσκουμε $f \to \pm\infty$.

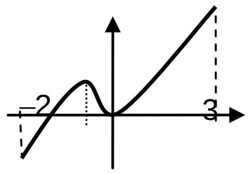
▲

Παράδειγμα. $\max/\min\{f = x^3 + x^2 \,\|\, -2 \le x \le 3\}$

Τα παραπάνω στάσιμα $\{x_1, x_2\}$ ανήκουν στο *εσωτερικό* του διαστήματος, επομένως είναι υποψήφια μαζί με τους χαρακτηρισμούς. Έχουμε και τα συνοριακά:

$\alpha = -2$: $f'(-2) = 8 > 0 \Rightarrow$ γνήσιο τοπικό ελάχιστο με $f_\alpha = -4$

$\beta = 3$: $f'(3) = 33 > 0 \Rightarrow$ γνήσιο τοπικό μέγιστο με $f_\beta = 36$



Εφόσον το διάστημα ορισμού είναι φραγμένο και κλειστό η συνάρτηση έχει ολικά ακρότατα στο διάστημα. Εφόσον όλα τα υποψήφια σημεία έχουν χαρακτηριστεί ως τοπικά ακρότατα, συμπεραίνουμε ότι ολικό μέγιστο είναι το μεγαλύτερο των τοπικών μέγιστων, και ολικό ελάχιστο το μικρότερο των τοπικών:

Υποψήφια για ολικό μέγιστο: $\{f_2 = 4/27,\ f_\beta = 36\} \Rightarrow f^* = f_\beta = 36$ στο $x^* = \beta = 3$, δεξιό σύνορο.

Υποψήφια για ολικό ελάχιστο: $\{f_1 = 0,\ f_\alpha = -4\} \Rightarrow f^* = f_\alpha = -4$ στο $x^* = \alpha = -2$,αριστερό σύνορο.

▲

ΚΥΡΤΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

6. Κυρτός Προγραμματισμός

Μια βασική ιδιότητα των κυρτών/κοίλων συναρτήσεων αφορά τα ολικά ακρότατα.

1.Μέγιστο κοίλης συνάρτησης. *Αν μια συνάρτηση είναι κοίλη τότε οι παραπάνω αναγκαίες συνθήκες για μέγιστο είναι και ικανές και μάλιστα για* ***ολικό*** *μέγιστο. Επομένως σαυτή την περίπτωση εξετάζουμε τις τρεις συνθήκες με τη σειρά και μόλις βρούμε μια που ικανοποιείται αυτή μας δίνει την λύση, αλλιώς η λύση βρίσκεται στο άπειρο. Συνήθως αρχίζουμε με την στάσιμη, όπου μάλιστα δεν χρειάζεται να ελέγξουμε την συνθήκη $2^{ης}$ τάξης διότι αυτή ικανοποιείται αυτομάτως λόγω κοιλότητας της συνάρτησης. Δηλαδή* ***για κοίλη συνάρτηση, αν υπάρχει στάσιμο τότε αυτό είναι ολικό μέγιστο.***

2.Ελάχιστο κυρτής συνάρτησης. *Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή τότε οι παραπάνω αναγκαίες συνθήκες για ελάχιστο είναι και ικανές και μάλιστα για* ***ολικό*** *ελάχιστο. Επομένως σαυτή την περίπτωση εξετάζουμε τις τρεις συνθήκες με τη σειρά και μόλις βρούμε μια που ικανοποιείται αυτή μας δίνει την λύση, αλλιώς η λύση βρίσκεται στο άπειρο. Συνήθως αρχίζουμε με την στάσιμη, όπου μάλιστα δεν χρειάζεται να ελέγξουμε την συνθήκη $2^{ης}$ τάξης διότι αυτή ικανοποιείται αυτομάτως λόγω κυρτότητας της συνάρτησης. Δηλαδή,* ***για κυρτή συνάρτηση, αν υπάρχει στάσιμο τότε αυτό είναι ολικό ελάχιστο.***

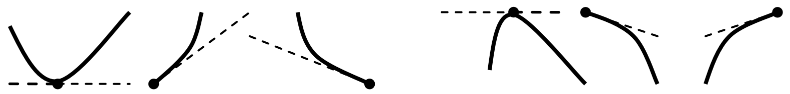
Παρατήρηση. Αν η συνάρτηση είναι γνήσια κοίλη/κυρτή, τότε το παραπάνω ολικό ακρότατο θα είναι γνήσιο μέγιστο/ελάχιστο αντίστοιχα, επομένως και μοναδικό. Αν δεν είναι γνήσια κοίλη/κυρτή, τότε μπορεί να έχουμε ολόκληρο διάστημα με ακρότατη τιμή.

▲

Τα δύο προβλήματα που εξετάσαμε παραπάνω:

   1. max κοίλης συνάρτησης
   2. min κυρτής συνάρτησης

καλούνται προβλήματα **Κυρτού Προγραμματισμού** (ΚΠ, Convex Programming, **CP**). Στα προβλήματα αυτά είτε ικανοποιείται κάποια από τις αναγκαίες συνθήκες και δίνει το αντίστοιχο ολικό ακρότατο, **συνήθως στάσιμο εσωτερικό,** οπότε και δεν χρειάζεται να εξετάσουμε τις υπόλοιπες συνθήκες, ή δεν ικανοποιείται καμία οπότε το αντίστοιχο ακρότατο βρίσκεται στο άπειρο.




min κυρτών | **max** κοίλων | **max** κυρτής | **min** κοίλης

κυρτός προγραμματισμός | **μη κυρτός προγραμματισμός**

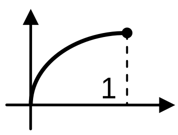
Στα προβλήματα **μη κυρτού προγραμματισμού** μπορεί να υπάρχουν περισσότερα σημεία που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες, οπότε θα πρέπει να τις ελέγξουμε όλες και να συγκρίνουμε τις τιμές τους καθώς και τις τιμές στο άπειρο αν το διάστημα δεν είναι φραγμένο. Μάλιστα στα ειδικά προβλήματα μη κυρτού προγραμματισμού της μορφής:

   3. max κυρτής συνάρτησης
   4. min κοίλης συνάρτησης

το ακρότατο δεν μπορεί να είναι στάσιμο λόγω των ***{1,2}*** οπότε **θα είναι πάντοτε συνοριακό ή στο άπειρο.**

Παράδειγμα. Τα παρακάτω είναι προβλήματα Κυρτού Προγραμματισμού (CP)

1. $\max\{f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2} \mid\mid 0\le x\le 1\} \Rightarrow \begin{cases} f'(x)=(1/2)x^{-1/2} \\ f''(x)=-(1/4)x^{-3/2}<0 \end{cases}$



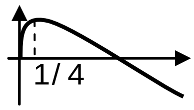
Μέγιστο γνήσια κοίλης. Στάσιμο δεν υπάρχει.

Αριστερό σύνορο: $\alpha=0 \Rightarrow f'(0)=+\infty\le 0$, δεν ικανοποιείται.

Δεξιό σύνορο: $\beta=1 \Rightarrow f'(1)=1/2\ge 0$, ικανοποιείται.

Επομένως έχουμε γνήσιο ολικό μέγιστο στο δεξιό σύνορο: $x^*=1$ με $f^*=1$. Είναι το μοναδικό σημείο που ικανοποιεί τις συνθήκες.

2. $\max\{f(x)=\sqrt{x}-x \| \ 0\le x\le 1\} \Rightarrow \begin{cases} f'(x)=(1/2)x^{-1/2}-1 \\ f''(x)=-(1/4)x^{-3/2}<0 \end{cases}$

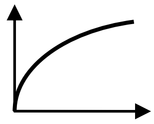


Μέγιστο γνήσια κοίλης. Αν υπάρχει στάσιμο στο διάστημα θα είναι γνήσιο ολικό μέγιστο:

$f'(x)=1/2\sqrt{x}-1=0 \Rightarrow x^*=1/4$ με $f^*=3/4$.

Δεν χρειάζεται να εξετάσουμε τα σύνορα. Εξάλλου οι συνθήκες δεν θα ικανοποιούνται.

3. $\max\{f(x)=\sqrt{x} \| x\ge 0\}$, μέγιστο κοίλης σε μη φραγμένο διάστημα.



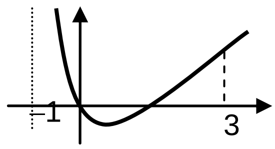
Στάσιμο δεν υπάρχει. Στο αριστερό σύνορο: $f'(0)=+\infty\le 0$, δεν ικανοποιείται

Επομένως το μέγιστο βρίσκεται στο άπειρο. Πράγματι $f\to+\infty$ όταν $x\to+\infty$.

▲

Παράδειγμα. $\max\{f(x)=x-2\ln(1+x) \| 0\le x\le 3\} \Rightarrow \{f'(x)=1-2(1+x)^{-1},\ f''(x)=2(1+x)^{-2}>0\}$

Έχουμε πρόβλημα μη κυρτού προγραμματισμού της ειδικής μορφής **«μέγιστο κυρτής»,** σε φραγμένο διάστημα, οπότε η λύση θα βρίσκεται στο σύνορο. Χαρακτηρίζουμε τα σύνορα:



Αριστερό: $f'(0)=-1<0$, γνήσιο τοπικό μέγιστο.

Δεξιό: $f'(3)=1/3>0$, γνήσιο τοπικό μέγιστο.

Αμφότερα τα συνοριακά σημεία είναι υποψήφια, οπότε συγκρίνουμε τις τιμές.

$\{f(0)=0,\ f(3)=3-2\ln 4=3-4\ln 2\}$

Επομένως η μέγιστη τιμή της είναι στο δεξιό σύνορο διότι: $f(3)=3-4\ln 2\approx 3-4(0.7)=0.25>0$.

Παρατήρηση. Θα μπορούσαμε βέβαια και να συγκρίνουμε απευθείας τις τιμές χωρίς τον προηγούμενο χαρακτηρισμό, εφόσον γνωρίζουμε ότι θα βρίσκεται στο σύνορο

Ακρότατα με περιορισμούς.

Στα παραπάνω παραδείγματα, το διάστημα βελτιστοποίησης E ορίζεται με ανισότητες της μορφής:

$\alpha\le x$ ή/και $x\le\beta$

Τις ονομάζουμε **περιορισμούς.** Λύνοντας το πρόβλημα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Η λύση είναι εσωτερική, και λέμε ότι οι περιορισμοί είναι **χαλαροί** ή **μη δεσμευτικοί.**
- Η λύση είναι συνοριακή: $x=\alpha$ ή $x=\beta$, και λέμε ότι ο αντίστοιχος περιορισμός είναι **δεσμευτικός.**

Σε πολλές περιπτώσεις οι περιορισμοί καθορίζονται έμμεσα μέσω ανισοτήτων της μορφής:

$g(x)\le 0$ ή $g(x)\ge 0$

και αναφέρονται στο διάστημα όπου οι συγκεκριμένες συναρτήσεις έχουν αρνητικές ή θετικές τιμές αντίστοιχα. Τώρα το πρόβλημα εύρεσης ακρότατων διατυπώνεται στη μορφή:

$\max/\min\{f(x) \| g(x)\le 0,\cdots\}$

Σαυτή την περίπτωση μπορούμε να καθορίσουμε το αντίστοιχο διάστημα θετικών ή αρνητικών τιμών της κάθε **συνάρτησης περιορισμού** $g(x)$, συνήθως βρίσκοντας πρώτα τα μηδενικά της. Λύνοντας το πρόβλημα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Η λύση είναι εσωτερική του διαστήματος, οπότε θα ικανοποιεί την γνήσια ανισότητα: $g(x)\ne 0$, και λέμε ότι ο συγκεκριμένος περιορισμός είναι **χαλαρός** ή **μη δεσμευτικός.**
- Η λύση είναι συνοριακή του διαστήματος, οπότε θα ικανοποιεί την ισότητα: $g(x)=0$, και λέμε ότι ο συγκεκριμένος περιορισμός είναι **δεσμευτικός.**

Παράδειγμα. $\max\{f=2x+1 \| x^2\le 4\ \&\ x\ge x^2\}$

1. Η ανισότητα: $x^2\le 4 \Rightarrow g(x)=x^2-4=(x-2)(x+2)\le 0$ ορίζει το διάστημα $-2\le x\le 2$.

2. Η ανισότητα $x\ge x^2 \Rightarrow h(x)=x^2-x=(x-1)x\le 0$ ορίζει το διάστημα: $0\le x\le 1$.

Το δεύτερο διάστημα βρίσκεται γνήσια μέσα στο πρώτο, οπότε ο πρώτος περιορισμός είναι **πλεονασματικός.** Το ισοδύναμο πρόβλημα βελτιστοποίησης στο διάστημα $0\le x\le 1$ έχει λύση συνοριακή στο δεξιό σύνορο διότι η αντικειμενική συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα:

$\max\{f=2x+1 \| 0\le x\le 1\} \Rightarrow x^*=1$

Συμπεραίνουμε ότι ο δεύτερος περιορισμός είναι δεσμευτικός, ενώ ο πρώτος είναι χαλαρός. ▲

8. Παράμετροι

Στα προβλήματα ακρότατων εμφανίζονται συχνά διάφοροι **παράμετροι** $\{p,w,c,...\}$, δηλαδή σταθερές που δεν είναι συγκεκριμένες. Γενικά οι παράμετροι μπορεί να εμφανίζονται στην αντικειμενική συνάρτηση ή/και στους περιορισμούς που καθορίζουν το διάστημα βελτιστοποίησης. Σε κάθε περίπτωση:

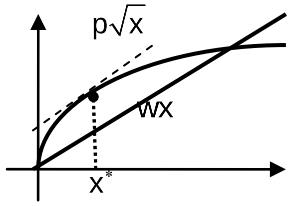
η λύση x^* *και η ακρότατη τιμή* f^* *θα εξαρτώνται τώρα από τις παραμέτρους*

Ειδικά η ακρότατη τιμή θα εκφράζεται ως συνάρτηση των παραμέτρων:

$f^*(p,w,c,...)$

Καλείται **συνάρτηση ακρότατης τιμής,** μέγιστη ή ελάχιστη ανάλογα. Δηλαδή, *ενώ στην διαδικασία λύσης του προβλήματος βελτιστοποίησης αντιμετωπίζουμε τις παραμέτρους ως σταθερές, στη συνέχεια τις αντιμετωπίζουμε ως μεταβλητές*. Για διάκριση από τις παραμέτρους, η μεταβλητή x ως προς την οποία βελτιστοποιούμε ονομάζεται **μεταβλητή επιλογής.**

Παράδειγμα.



1. $\max\{f = p\sqrt{x} - wx \,\|\, x \geq 0\}$ με $p > 0,\ w > 0$.

Πρόβλημα ΚΠ με παραμέτρους $\{p,w\}$. Το μέγιστο είναι στο στάσιμο εφόσον υπάρχει στο διάστημα:

$$f' = \frac{p}{2\sqrt{x}} - w = 0 \Rightarrow x^* = \frac{p^2}{4w^2}, \quad f^*(p,w) = p\sqrt{x^*} - wx^* = \frac{p^2}{4w}$$

2. $\max\{f = p\sqrt{x} - wx \,\|\, 0 \leq x \leq c\}$ με $p > 0, w > 0, c > 0$.

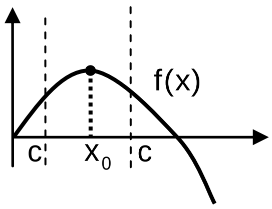
Πρόβλημα ΚΠ με παραμέτρους $\{p,w,c\}$, και λύση:

1. Στάσιμη εσωτερική: $f' = \dfrac{p}{2\sqrt{x}} - w = 0 \Rightarrow x = \dfrac{p^2}{4w^2}$ αν ικανοποιεί $\dfrac{p^2}{4w^2} < c$

2. Συνοριακή: $x = c$ αν ικανοποιεί $f'(c) = \dfrac{p}{2\sqrt{c}} - w \geq 0 \Rightarrow \dfrac{p^2}{4w^2} \geq c$

Τα παραπάνω καλύπτουν όλες τις τιμές των παραμέτρων. Ειδικότερα το αριστερό σύνορο δεν είναι ποτέ μέγιστο. Η λύση παριστάνεται με τον πίνακα:

συνθήκη	x^*	f^*
$p/w < 2c^{1/2}$	$p^2/4w^2$	$p^2/4w$
$p/w \geq 2c^{1/2}$	c	$p\sqrt{c} - wc$



Για τη γραφική επίλυση του προβλήματος, θεωρούμε τη συνάρτηση $f = p\sqrt{x} - wx$ ως διαφορά των συναρτήσεων $\{p\sqrt{x}, wx\}$, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, με μέγιστο στο στάσιμο: $x_0 = p^2/4w^2$. Η λύση εξαρτάται από τη σχέση του c ως προς το στάσιμο x_0. Στο γράφημα παραπλεύρως διακρίνουμε τις δύο περιπτώσεις που εξετάσαμε:

1. Αν $x_0 < c$ τότε το μέγιστο βρίσκεται στο στάσιμο $x^* = x_0$
2. Αν $c \leq x_0$ τότε το μέγιστο βρίσκεται στο σύνορο: $x^* = c$

▲

Παρατήρηση. Σε πολλές εφαρμογές μας ενδιαφέρουν οι ιδιότητες μονοτονίας και κυρτότητας της συνάρτησης ακρότατης τιμής ως προς τις παραμέτρους. Η μελέτη αυτών των ιδιοτήτων εντάσσεται στο πλαίσιο της γενικότερης θεωρίας που αφορά **ιδιότητες της περιβάλλουσας.**

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

9. Δεύτερο διαφορικό

Σε προηγούμενο κεφάλαιο διαπιστώσαμε ότι αν το x μεταβληθεί κατά $\Delta x = dx$ τότε μια πρώτη εκτίμηση της μεταβολής Δf στην τιμή της συνάρτησης $f(x)$ δίνεται από το πρώτο διαφορικό, ενώ μια καλλίτερη εκτίμηση βρίσκεται αν στο πρώτο διαφορικό προσθέσουμε το ήμισυ του δεύτερου:

$$\Delta f \approx df + \frac{1}{2}d^2f = f'(x)dx + \frac{1}{2}f''(x)dx^2$$

Παρατηρούμε ότι στα στάσιμα σημεία όπου έχουμε $f' = 0 \Rightarrow df = 0$, η εκτίμηση ως προς το πρόσημο δίνεται από το δεύτερο διαφορικό:

$$\Delta f \approx d^2f / 2 = f''(x)dx^2 / 2$$

Οι παραπάνω προσεγγίσεις είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στον καθορισμό του πρόσημου της μεταβολής στην τιμή της συνάρτησης, ως εξής:

Για «μικρές» μεταβολές Δx *του* x*, το πρόσημο της μεταβολής* Δf*, συμπίπτει με το πρόσημο του 1ου διαφορικού* $df = f'(x)dx$ *με* $\Delta x = dx$*,αν αυτό είναι μη μηδενικό, δηλαδή στα μη στάσιμα σημεία:* $f'(x) \neq 0$.

Στα στάσιμα σημεία: $f' = 0 \Rightarrow df = 0$*, το πρόσημο της μεταβολής συμπίπτει με το πρόσημο του 2ου διαφορικού:* $d^2f = f''(x)dx^2$*, αν αυτό είναι μη μηδενικό, δηλαδή στα σημεία με* $f''(x) \neq 0$.

Τα παραπάνω μας δίνουν και τον γνωστό χαρακτηρισμό των στάσιμων ως τοπικών ακρότατων με βάση το πρόσημο της 2ης παραγώγου. Π.χ.

- αν είναι μέγιστο θα έχουμε: $\Delta f \leq 0 \Rightarrow d^2f = f''(x)dx^2 / 2 \leq 0 \Rightarrow f''(x) \leq 0$
- θα είναι γνήσιο τοπικό μέγιστο αν $\Delta f \approx d^2f = f''(x)dx^2 / 2 < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$

Αντίστοιχα για ελάχιστο.

10. Μεγιστοποίηση κέρδους-οφέλους

Στα οικονομικά εμφανίζονται συχνά προβλήματα βελτιστοποίησης της παρακάτω γενικής μορφής:

$$\max\{b(x) = r(x) - c(x) \,||\, x \geq 0\}$$

Διακρίνουμε τις συναρτήσεις:

$r(x)$, **έσοδο** (**r**evenue) ή **χρησιμότητα** (**u**tility)

$r'(x)$, **οριακό έσοδο** (**m**arginal **r**evenue) ή **οριακή χρησιμότητα** (**m**arginal **u**tility)**,:**

$c(x)$, **κόστος** (cost)

$c'(x)$, **οριακό κόστος** (**m**arginal **c**ost),

$b(x) = r(x) - c(x)$**, κέρδος** (profit) ή **όφελος** (**b**enefit)

$b'(x) = r'(x) - c'(x)$**, οριακό κέρδος (m**arginal **p**rofit) ή **(m**arginal **b**enefit)

Βρήκαμε τα οριακά μεγέθη παραγωγίζοντας τα αρχικά. Αντιστρόφως μπορούμε να βρούμε τα αρχικά ολοκληρώνοντας τα οριακά. Ειδικότερα βρίσκουμε;

$c(x) - c(0) = \int_0^x c'(x)dx$, **λειτουργικό (μεταβλητό) κόστος**

$b(x) - b(0) = \int_0^x b'(x)dx = \int_0^x [r'(x) - c'(x)]dx$, **λειτουργικό κέρδος (όφελος)**

Λύση. Όσον αφορά την λύση x^* του προβλήματος μεγιστοποίησης, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. $x^* = 0$*, λέμε ότι η διαδικασία είναι **μη συμφέρουσα.** Θα ικανοποιείται η (αναγκαία) συνθήκη:*

$b'(0) \leq 0 \Leftrightarrow r'(0) \leq c'(0)$

Δηλαδή το αρχικό οριακό έσοδο είναι μικρότερο από το αρχικό οριακό κόστος.

2. $x^* > 0$*, λέμε ότι η διαδικασία είναι **συμφέρουσα.** Θα ικανοποιείται η (αναγκαία) συνθήκη:*

$\{b'(x^*) = 0, b''(x^*) \leq 0\} \Leftrightarrow \{r'(x^*) = c'(x^*), r''(x^*) \leq c''(x^*)\}$

Δηλαδή στη λύση το οριακό κόστος κόβει το οριακό έσοδο από κάτω προς τα πάνω. Το οριακό κόστος είναι μικρότερο πριν και μεγαλύτερο μετά, από το οριακό έσοδο.

3. $x^* \to +\infty$*, η λύση είναι μη φραγμένη*

Αν έχουμε και πάνω φράγμα στη μεταβλητή επιλογής, της μορφής:

$$\max\{b(x) = r(x) - c(x) \,||\, 0 \le x \le \beta\}$$

Τότε αντί των *{**2, 3**}* θα έχουμε τις συνθήκες:

2'. $0 < x^* < \beta$

3'. $x^* = \beta$. *Λέμε ότι ο περιορισμός είναι **δεσμευτικός.** Θα ικανοποιείται η (αναγκαία) συνθήκη:*

$$b'(\beta) \ge 0 \Leftrightarrow r'(\beta) \ge c'(\beta)$$

*Δηλαδή, το τελικό οριακό έσοδο είναι μεγαλύτερο από το τελικό οριακό κόστος, οπότε **θα θέλαμε να αυξήσουμε το** x **για μεγαλύτερο κέρδος αν δεν υπήρχε ο πάνω περιορισμός.***

Κυρτός Προγραμματισμός

Οι παραπάνω συνθήκες ως **αναγκαίες** μας δίνουν τα υποψήφια σημεία για λύση, οπότε θα πρέπει να συγκρίνουμε μεταξύ τους τις τιμές της συνάρτησης κέρδους $b(x)$. Αλλά σε πολλά προβλήματα οι παραπάνω συναρτήσεις έχουν και τα εξής πρόσθετα χαρακτηριστικά:

- Το έσοδο $r(x)$ είναι **κοίλη**, γραμμική ή γνήσια κοίλη.
- Το κόστος $c(x)$ είναι **κυρτή**, γραμμική ή γνήσια κυρτή.

Δηλαδή

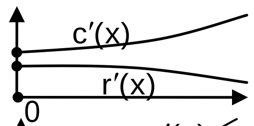
- Το οριακό έσοδο $r'(x)$ είναι **φθίνον**, σταθερό ή γνήσια φθίνον.
- Το οριακό κόστος $c'(x)$ είναι **αύξον**, σταθερό ή γνήσια αύξον.

Τότε έχουμε πρόβλημα **CP** (Κυρτού Προγραμματισμού), οι παραπάνω συνθήκες γίνονται και **ικανές**, δηλαδή αν κάποια από αυτές ικανοποιείται τότε αυτή είναι η λύση, και δεν χρειάζεται να εξετάσουμε τις υπόλοιπες. Θα έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. $b'(0) \le 0 : r'(0) \le c'(0)$, *η διαδικασία είναι **μη συμφέρουσα.** Η λύση είναι:*

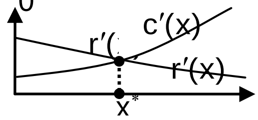
$$x^* = 0$$

2. $b'(0) > 0 : r'(0) > c'(0)$, *η διαδικασία είναι **συμφέρουσα.** Η λύση βρίσκεται στο σημείο όπου η αύξουσα συνάρτηση οριακού κόστους κόβει την φθίνουσα συνάρτηση οριακού εσόδου:*



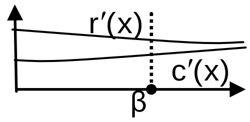
$$r'(x) = c'(x) \Rightarrow x^* > 0$$

3. *Σαυτή την περίπτωση, αν οι δύο καμπύλες δεν συναντώνται, το οριακό κόστος είναι παντού μικρότερο από το οριακό έσοδο, και η λύση βρίσκεται στο άπειρο, ως όριο:*



$$x^* \to +\infty$$

3'. *Για την περίπτωση του πάνω φράγματος:* $x \le \beta$, *αντί του **3** έχουμε την συνθήκη:*



$$b'(\beta) \ge 0 : \; r'(\beta) \ge c'(\beta) \Rightarrow x^* = \beta$$

Λύνοντας το πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους (οφέλους), βρίσκουμε και το **μέγιστο κέρδος (όφελος)** b^* **:**

1. Αν η διαδικασία είναι μη συμφέρουσα, τότε θα έχουμε:

$x^* = 0 \Rightarrow b^* = b(0) = r(0) - c(0)$, συνήθως αρνητικό μέγεθος

2. Αν η διαδικασία είναι συμφέρουσα τότε βρίσκουμε:

$$\max\{b(x) = r(x) - c(x) \,|\; x \ge 0\} \Rightarrow x^* > 0,\; b^* = b(x^*) > b(0)$$

Σαυτή την περίπτωση μπορούμε να υπολογίσουμε και από τα οριακά μεγέθη το μέγιστο λειτουργικό κέρδος, με το ολοκλήρωμα:

$\int_0^{x^*} [r'(x) - c'(x)]dx = \int_0^{x^*} b'(x)dx = b(x^*) - b(0) > 0$, **μέγιστο λειτουργικό κέρδος (όφελος)**

*Το βρήκαμε ως το γεωμετρικό **εμβαδό** μεταξύ των καμπύλων οριακού εσόδου και οριακού κόστους.*