II.3 ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ (B)

1[ες] ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

1. Μερικές Παράγωγοι

Αν έχουμε τρεις μεταβλητές $\{x, y, z\}$, όπου η τιμή της μιας έστω z καθορίζεται από τις τιμές των άλλων δύο $\{x, y\}$, τότε λέμε ότι έχουμε **συνάρτηση δύο μεταβλητών:**

$$z = z(x, y)\,,\ z = f(x, y)\,,\ \ldots$$

με **ανεξάρτητες** τις $\{x, y\}$ και **εξαρτημένη** την z. Τώρα τα $\{x, y\}$ μπορούν να πάρουν τιμές **ανεξάρτητα μεταξύ τους.** Το σύνολο αυτών των τιμών σχηματίζουν την **περιοχή ορισμού** D στο επίπεδο Oxy.

Παράδειγμα

1. $x + y$, $D = R^2$, όλο το επίπεδο
2. $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, $D = R^2_+ : \{x \ge 0, y \ge 0\}$, θετική περιοχή
3. $x^{-1/2} + y^{-1/2}$, $D = R^2_{++} : \{x > 0,\ \ y > 0\}$, γνήσια θετική περιοχή
4. $\sqrt{x - 2y}$, $D = \{(x, y) : x - 2y \ge 0 \Rightarrow y \ge 2x\}$, ημιεπίπεδο

Παρατήρηση. Οι συναρτήσεις $\{f(x, y) = 2x^2, f(x) = 2x^2\}$ μοιάζουν στην εμφάνιση αλλά είναι τελείως διαφορετικές, διότι έχουν διαφορετικό πεδίο ορισμού. Η πρώτη το επίπεδο Oxy αλλά η τιμή της δεν μεταβάλλεται με το y, η δεύτερη τον x – άξονα.

▲

Για την μελέτη συναρτήσεων δύο ανεξάρτητων μεταβλητών εξετάζουμε κάθε φορά **την εξάρτηση από την μια μεταβλητή κρατώντας την άλλη σταθερή** (ceteris paribus). Με σταθερή τη μια ανεξάρτητη μεταβλητή, ορίζουμε:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{ή} \quad z_x = f_x : \textit{μερική παράγωγος ως προς } x\textit{, με σταθερό } y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{ή} \quad z_y = f_y : \textit{μερική παράγωγος ως προς } y\textit{, με σταθερό } x$$

*Μετρούν την **οριακή μεταβολή** στην εξαρτημένη μεταβλητή δηλαδή στην τιμή της συνάρτησης, όταν μεταβάλλεται μόνο η μία ανεξάρτητη κατά μία μονάδα, κρατώντας την άλλη σταθερή.*

Παράδειγμα

1. $f(x, y) = x^2 + xy \Rightarrow f_x = 2x + y\,,\ \ f_y = x$
2. $f(x, y) = \ln(x^2 + xy) \Rightarrow \begin{cases} f_x = (x^2 + xy)_x / (x^2 + xy) = (2x + y) / (x^2 + xy) \\ f_y = (x^2 + xy)_y / (x^2 + xy) = x / (x^2 + xy) \end{cases}$
3. $f(x, y) = x^2 + 2 \Rightarrow \{f_x = 2x\}, \{f_y = 0\}$

▲

Παρατήρηση. Για συναρτήσεις μιας μεταβλητής η γνωστή παράγωγος καλείται και **συνήθης παράγωγος** για διάκριση από τις παραπάνω μερικές. Παριστάνεται με:

$$y = y(x) \Rightarrow y' \ \text{ή}\ \frac{dy}{dx} \ \text{ή και}\ \ y_x$$

▲

2. Ειδικές συναρτήσεις

- **Γραμμική:** $z = \alpha x + \beta y + \gamma$, με σταθερές μερικές παραγώγους: $z_x = \alpha,\ z_y = \beta$

Ειδικότερα: **γραμμική ομογενής:** $z = \alpha x + \beta y$, **σταθερή:** $z \equiv \gamma$

- **Τετραγωνική** ή **παραβολική**:

$$z = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta \Rightarrow \ \{z_x = 2\alpha x + 2\beta y + \delta,\ z_y = 2\beta x + 2\gamma y + \varepsilon\}$$

Ειδικότερα: **τετραγωνική ομογενής** ή **τετραγωνική μορφή:** $z = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$

- **Cobb-Douglas (C-D)**: $f(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta}$ με $D = R_+^2 = \{x \ge 0, y \ge 0)$

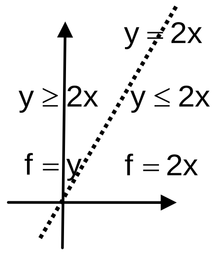
$$\Rightarrow f_x = \alpha x^{\alpha-1} y^{\beta},\ f_y = \beta x^{\alpha} y^{\beta-1}$$

- **CES:** $f(x,y) = \dfrac{x^r}{\alpha^2} + \dfrac{y^r}{\beta^2}$ με $D = R_+^2 = \{x \ge 0, y \ge 0)$

$$\Rightarrow \{f_x = rx^{r-1}/\alpha^2,\ f_y = ry^{r-1}/\beta^2\}$$

- **Leontιeff:** max ή min γραμμικών, π.χ.

$$z = \max\{2x, y\} = \begin{cases} 2x & \text{αν} \quad y \le 2x \\ y & \text{αν} \quad y \ge 2x \end{cases} \Rightarrow f_x = \begin{cases} 2 & \text{αν} \quad y < 2x \\ 0 & \text{αν} \quad y > 2x \end{cases},\ f_y = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad y < 2x \\ 1 & \text{αν} \quad y > 2x \end{cases}$$



Στα σημεία της ευθείας: $y = 2x$, η συνάρτηση είναι συνεχής αλλά οι παράγωγές της δεν είναι συνεχείς. Έχουν βηματική ασυνέχεια

3. Μονοτονία

Για συναρτήσεις δύο μεταβλητών η μονοτονία χαρακτηρίζεται ως προς κάθε μεταβλητή χωριστά. Έτσι σε κάποια περιοχή του επιπέδου, μια συνάρτηση δύο μεταβλητών: $f(x,y)$, χαρακτηρίζεται:

ως προς x**:** $\{\, x-$αύξουσα αν $f_x \ge 0\}$, $\{x-$φθίνουσα αν $f_x \le 0\,\}$

ως προς y**:** $\{\, y-$αύξουσα αν $f_y \ge 0\}$, $\{y-$φθίνουσα αν $f_y \le 0\,\}$

Αν αμφότερες έχουν το ίδιο πρόσημο, τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι **μονότονη.** Ειδικότερα, την λέμε:

αύξουσα αν είναι αμφότερες θετικές: $\{f_x \ge 0,\ f_y \ge 0\}$,

φθίνουσα αν είναι αμφότερες αρνητικές: $\{f_x \le 0,\ f_y \le 0\}$

Μάλιστα αν σε μια μονότονη συνάρτηση τουλάχιστον η μια ανισότητα είναι γνήσια, τότε η συνάρτηση είναι **γνήσια μονότονη.**

Στάσιμα καλούνται τα σημεία στα οποία μηδενίζονται αμφότερες οι μερικές παράγωγοι:

$$\{f_x = 0, f_y = 0\}$$

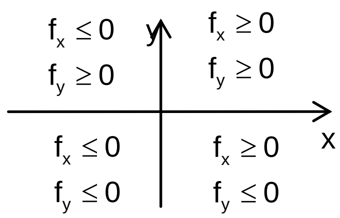
Θα τα μελετήσουμε σε επόμενο κεφάλαιο. Στα σημεία αυτά συνήθως αλλάζει η μονοτονία, οπότε είναι σημεία **ακρότατης τιμής** για την συνάρτηση, μέγιστη ή ελάχιστη, αλλά όχι απαραίτητα. Οι γραμμικές συναρτήσεις:

$$f = \alpha x + \beta y + \gamma$$

δεν έχουν στάσιμα σημεία εκτός αν $\{\alpha = 0, \beta = 0\}$ οπότε όλα τα σημεία είναι στάσιμα.

Παράδειγμα.

1. $f(x,y) = 2x^2 + y^2 \Rightarrow f'(x,y) = (f_x, f_y) = (4x, 2y)$



Η μονοτονία είναι διαφορετική στο κάθε τεταρτημόριο, όπως φαίνεται στο γράφημα παραπλεύρως. Το σημείο $(0,0)$ είναι στάσιμο με μηδενική τιμή της συνάρτησης. Είναι η ελάχιστη τιμή της διότι σε κάθε άλλο σημείο η τιμή της είναι γνήσια θετική.

2. $f(x,y) = 2x + y - 1 \Rightarrow \{f_x = 2 > 0, f_y = 1 > 0\}$, γνήσια αύξουσα, παντού.

▲

4. Γραμμική προσέγγιση

μιας συνάρτησης $f(x,y)$ σε κάποιο σημείο (x_0,y_0), καλείται η γραμμική συνάρτηση που έχει την ίδια τιμή και τις ίδιες παραγώγους με την συνάρτηση, σαυτό το σημείο. Θα έχει την παράσταση:

$f_{γρ}(x,y)=f_0+f_x\cdot(x-x_0)+f_y\cdot(y-y_0)$, όπου: $f_0=f(x_0,y_0)$, $f_x=f_x(x_0,y_0)$, $f_y=f_y(x_0,y_0)$

Στα στάσιμα σημεία η γραμμική προσέγγιση είναι σταθερή συνάρτηση.

Παράδειγμα. $f=x^3+xy+y^2$ στο $(x_0=1,y_0=0)\Rightarrow\{f_0=1,f_x=3x^2+y=3,f_y=x+2y=1\}$.

Γραμμική προσέγγιση στο σημείο $(1,0)$: $f_{γρ}=1+3(x-1)+y=-2+3x+y$

Παρατήρηση. Στα πολυώνυμα, όπως το παραπάνω, μπορούμε να αναπτύξουμε σε δυνάμεις των $\{x-x_0,y-y_0\}$, αντικαθιστώντας:

$x=(x-x_0)+x_0,\ \ y=(y-y_0)+y_0$

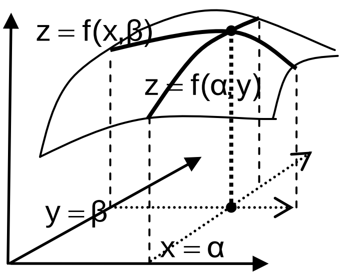
Στη συνέχεια μπορούμε να βρούμε την γραμμική προσέγγιση κρατώντας μόνο τις δυνάμεις μέχρι $1^{ου}$ βαθμού. Έτσι στο παραπάνω παράδειγμα, αντικαθιστούμε: $x=(x-1)+1,\ y=y$, και βρίσκουμε

$$f=[(x-1)+1]^3+[(x-1)+1]y+y^2=[(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+1]+[x-1)y+y\}+y^2$$

$$=[1+3(x-1)+y]+[3(x-1)^2+(x-1)y+y^2]+(x-1)^3\Rightarrow f_{γρ}=1+3(x-1)+y$$

▲

5. Γραφήματα-Επιφάνειες: $z=f(x,y)$

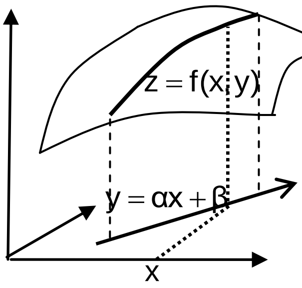


Αν παραστήσουμε τις τιμές z ως ύψη πάνω από τα αντίστοιχα σημεία (x,y) του επιπέδου, σχηματίζεται μια επιφάνεια στον τρισδιάστατο χώρο $Oxyz$ την οποία θεωρούμε ως το **γράφημα** της συνάρτησης, όπου:

- **σταθερό** x**,** αντιστοιχεί σε τομή της επιφάνειας με **κατακόρυφο επίπεδο κάθετο στον** $x-$**άξονα**. Δίνει μια καμπύλη στον χώρο που εκφράζεται ως συνάρτηση του y, όπως στο γράφημα:

$\{z=f(x,y),\ x=α\}\Rightarrow z(y)=f(α,y)$**,**

Την μελετούμε χρησιμοποιώντας την $y-$παράγωγο.



- **σταθερό** y**,** αντιστοιχεί σε τομή της επιφάνειας με **κατακόρυφο επίπεδο κάθετο στον** $y-$**άξονα.** Δίνει μια καμπύλη στον χώρο που εκφράζεται ως συνάρτηση του x, όπως στο γράφημα:

$\{z=f(x,y),\ y=β\}\Rightarrow z(x)=f(x,β)$,

Την μελετούμε χρησιμοποιώντας την $x-$παράγωγο.

- Κατακόρυφες τομές προς άλλες κατευθύνσεις βρίσκουμε παίρνοντας την σύνθεσή της με μια γραμμική συνάρτηση ευθείας

$\{z=f(x,y),\ y=αx+β\}\Rightarrow z(x)=f(x,αx+β)$

Δίνει μια καμπύλη στον χώρο που εκφράζεται ως συνάρτηση του x, όπως στο γράφημα.

Παρατήρηση. Οι γραμμικές συναρτήσεις ορίζουν **επίπεδες επιφάνειες,** και οι σταθερές μερικές παράγωγοι μας δίνουν τις κλίσεις της επιφάνειας στις δύο κατευθύνσεις**.** Αντίστοιχα, οι γραμμικές προσεγγίσεις μας δίνουν τα εφαπτόμενα επίπεδα στα διάφορα σημεία μιας επιφάνειας.

6.Περισσότερες μεταβλητές.

Τα παραπάνω γενικεύονται άμεσα σε συναρτήσεις περισσότερων μεταβλητών, όπου σε κάθε τέτοια μεταβλητή αντιστοιχεί και μια μερική παράγωγος. Αντίστοιχα ορίζεται η μονοτονία, ενώ στάσιμα είναι τώρα τα σημεία στα οποία μηδενίζονται όλες οι μερικές παράγωγοι.

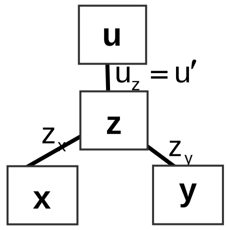
Παράδειγμα. $w(x,y,z)=xye^{xz}+xz^2$, συνάρτηση τριών μεταβλητών

$$w_x=(xye^{xz})_x+(xz^2)_x=(ye^{xz}+xye^{xz}z)+(z^2)=y(1+xz)e^{xz}+z^2$$

$$w_y=(xye^{xz})_y+(xz^2)_y=xe^{xz}+0=xe^{xz},\quad w_z=(xye^{xz})_z+(xz^2)_z=(xye^{xz}x)+(x2z)=x^2ye^{xz}+2xz$$

Αντίστοιχα γενικεύονται η γραμμική προσέγγιση. ▲

7. Απλός κανόνας αλυσωτής παραγώγισης



Θεωρούμε την σύνθεση:

$\{u = u(z)$ με $z = z(x,y)\} \Rightarrow u = u(x,y)$

u: **εξαρτημένη,** $\{x,y\}$**: ανεξάρτητες,** z**: ενδιάμεση**

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dz}\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dz}\frac{\partial z}{\partial y}\right\} \text{ ή } \left\{u_x = u_z z_x,\ u_y = u_z z_y\right\} \text{ ή } \left\{u_x = u' z_x,\ u_y = u' z_y\right\}$$

Προκύπτει από τον γνωστό κανόνα αλυσωτής παραγώγισης συναρτήσεων μιας μεταβλητής, όπου παραγωγίζουμε κάθε φορά ως προς την μια ανεξάρτητη μεταβλητή $\{x,y\}$ θεωρώντας την άλλη σταθερή. Η έννοια της παραπάνω ισότητας είναι ότι:

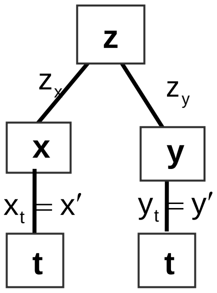
στο αριστερό μέρος πρώτα αντικαθιστούμε τις δοθείσες συναρτήσεις και μετά παραγωγίζουμε, ενώ στο δεξιό μέρος πρώτα παραγωγίζουμε τις δοθείσες συναρτήσεις και μετά αντικαθιστούμε.

Δηλαδή, από τις επιμέρους παραγώγους υπολογίζουμε τις παραγώγους της σύνθετης.

Παράδειγμα. Θα επαληθεύσουμε τον κανόνα αλυσωτής παραγώγισης υπολογίζοντας τα δυο μέρη:

$$\{u = e^z \text{ με } z = xy\} \Rightarrow u = e^{xy}\ ,\quad \left\{\frac{\partial u}{\partial x} = ye^{xy},\ \frac{du}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = e^z y = e^{xy}y\right\},\ \left\{\frac{\partial u}{\partial y} = xe^{xy},\ \frac{du}{dz}\frac{\partial z}{\partial y} = e^z x = e^{xy}x\right\}$$

8. Βασικός κανόνας αλυσωτής παραγώγισης Ι



$\{z = z(x,y)$ με $x = x(t),\ y = y(t)\} \Rightarrow\ z = z(t)$

z**: εξαρτημένη,** t**: ανεξάρτητη** $\{x,y\}$**: ενδιάμεσες**

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \quad \text{ή} \quad z_t = z_x x_t + z_y y_t \quad \text{ή} \quad z' = z_x x' + z_y y'$$

Λέμε ότι, η μεταβλητή t *επηρεάζει την* z *μέσω των* $\{x,y\}$*, όπου **οριακά**:*

*1. οι δύο επιρροές δρουν **προσθετικά**, δίνοντας δύο όρους στο δεξιό μέρος.*

*2. στη κάθε διαδρομή η επιρροή συντελείται μέσω σύνθεσης σε δύο στάδια δίνοντας δεξιά το **γινόμενο** των αντίστοιχων παραγώγων στον κάθε όρο.*

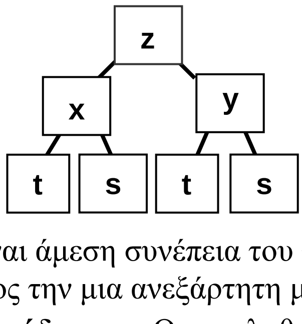
Παράδειγμα. Θα επαληθεύσουμε τον παραπάνω κανόνα αλυσωτής παραγώγισης για την σύνθεση:

$\{z = x^2 + xy$ με $x = \ln t,\ \ y = t^2\} \Rightarrow z = (\ln t)^2 + (\ln t)t^2$

αριστερό μέρος: $z' = \left(2\ln t\cdot\frac{1}{t}\right) + \left(\frac{1}{t}\cdot t^2 + \ln t\cdot 2t\right) = 2\ln t\cdot\frac{1}{t} + t + 2t\cdot\ln t$

δεξιό μέρος: $z_x x' + z_y y' = (2x+y)\frac{1}{t} + x2t = (2\ln t + t^2)\frac{1}{t} + \ln t 2t = 2\ln t\cdot\frac{1}{t} + t + 2t\ln t$

9. Βασικός κανόνας αλυσωτής παραγώγισης ΙΙ



$\{z = z(x,y)$ με $x = x(s,t), y = y(s,t)\ \} \Rightarrow\ z = z(s,t)$

z**: εξαρτημένη,** $\{s,t\}$ **ανεξάρτητες,** $\{x,y\}$**: ενδιάμεσες**

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial z}{\partial s} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s}\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}\end{array}\right\} \text{ ή } \left.\begin{array}{l} z_s = z_x x_s + z_y y_s\\ z_t = z_x x_t + z_y y_t\end{array}\right\}$$

Είναι άμεση συνέπεια του προηγούμενου βασικού κανόνα Ι, όπου παραγωγίζουμε κάθε φορά ως προς την μια ανεξάρτητη μεταβλητή $\{s,t\}$ θεωρώντας την άλλη σταθερή.

Παράδειγμα. Θα επαληθεύσουμε τον παραπάνω κανόνα αλυσωτής παραγώγισης:

$\{z = xy$ με $x = t\ln s, y = t + s^2\} \Rightarrow\ z = xy = (t\cdot\ln s)(t + s^2) = t^2\ln s + ts^2\ln s$

αριστερό: $z_s = t^2/s + 2ts\ln s + ts$

δεξιό: $z_x x_s + z_y y_s = yt/s + x2s = (t+s^2)t/s + (t\ln s)2s = t^2/s + st + 2st\ln s$

αριστερό: $z_t = 2t\ln s + s^2\ln s$,   δεξιό: $z_x x_t + z_y y_t = y\ln s + x1 = (t+s^2)\ln s + t\ln s = 2t\ln s + s^2\ln s$ ▲

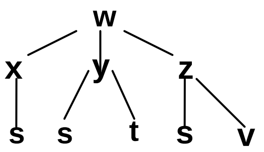
10. Γενικός κανόνας αλυσωτής παραγώγισης.

Οι παραπάνω κανόνες αλυσωτής παραγώγισης γενικεύονται σε περισσότερες μεταβλητές και με περισσότερα στάδια σύνθεσης, ως εξής:

*Θεωρούμε ένα **δένδρο σύνθεσης** με μια κορυφή που παριστά την αρχικά εξαρτημένη μεταβλητή. Σε κάθε **τελική ανεξάρτητη** μεταβλητή αντιστοιχεί και ένας τύπος αλυσωτής παραγώγισης, ο οποίος:*

1. *Έχει τόσους **προσθετικούς όρους** όσες είναι οι διαδρομές που καταλήγουν σ' αυτή την τελική ανεξάρτητη μεταβλητή, αρχίζοντας από την κορυφή.*
2. *Ο κάθε προσθετικός όρος αποτελείται από το **γινόμενο των παραγώγων** που αντιστοιχούν στους κλάδους της διαδρομής.*

Παράδειγμα. $\{w = w(x,y,z),\ x = x(s),\ y = y(s,t),\ z = z(s,v)\} \Rightarrow w = w(x(s),y(s,t),z(s,v)) = w(s,t,v)$



w **: εξαρτημένη,** $\{x,y,z\}$ **: ενδιάμεσες,** $\{s,t,v\}$ **: ανεξάρτητες**

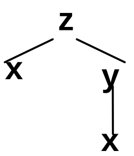
$w \to s$: τρεις διαδρομές, $w \to t$, $w \to v$: από μια διαδρομή

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s},\quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},\quad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

ή $w_s = w_x x_s + w_y y_s + w_z z_s$, $w_t = w_y y_t$, $w_v = w_z z_v$

▲

Παράδειγμα. $\{z = z(x,y),\ y = y(x)\} \Rightarrow z = z(x,y(x)) = z(x)$, με $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}$ ή $z' = z_x + z_y y'$



Εδώ η μεταβλητή x είναι και ενδιάμεση και ανεξάρτητη. *Έχουμε δύο παραγώγους του z ως προς x που διακρίνονται μεταξύ τους από τον διαφορετικό συμβολισμό*

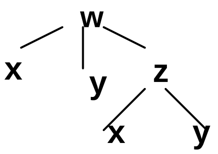
$\dfrac{dz}{dx} = z'$: **ολική παράγωγος**. Καθώς το x μεταβάλλεται, το $y = y(x)$ επίσης μεταβάλλεται

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = z_x$: **μερική παράγωγος**. Καθώς το x μεταβάλλεται, το y παραμένει σταθερό.

▲

Παράδειγμα. $\{w = w(x,y,z),\ z = z(x,y)\} \Rightarrow w = w(x,y,z(x,y)) = w(x,y)$, με:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{y} = \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{y,z} + \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{x,y}\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y},\quad \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{x} = \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{x,z} + \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{x,y}\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x}$$



Εδώ τα $\{x,y\}$ είναι και ενδιάμεσες και ανεξάρτητες. Αλλά τώρα κάνουμε διάκριση μεταξύ των διαφορετικών μερικών παραγώγων χρησιμοποιώντας επιπλέον συμβολισμό, όπου εκτός από την μεταβαλλόμενη μεταβλητή εμφανίζονται και οι αμετάβλητες που μπορεί να είναι διαφορετικές στην κάθε περίπτωση:

$$w_x(x,y) = \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{y},\ w_x(x,y,z) = \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{y,z}$$

Π.χ. $\{w = xyz$ με $z = 2x + y\} \Rightarrow w = xy(2x+y) = 2x^2y + xy^2$

Έχουμε: $\{w = w(x,y,z),\ z = z(x,y)\} \Rightarrow w = w(x,y)$

αριστερό: $w_x(x,y) = 4xy + y^2$, δεξιό: $w_x(x,y,z) + w_z(x,y,z)z_x(x,y) = yz + xy2 = 4xy + y^2$

αριστερό: $w_y(x,y) = 2x^2 + 2xy$, δεξιό: $w_y(x,y,z) + w_z(x,y,z)z_y(x,y) = xz + xy1 = 2x^2 + 2xy$

▲

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

11. Διαφορικά

Θεωρούμε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών:

$$f(x,y)$$

Αν τα $\{x,y\}$ μεταβληθούν κατά $\{\Delta x, \Delta y\}$ τότε η τιμή της συνάρτησης θα μεταβληθεί κατά:

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

Όπως και στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής, μπορούμε να προσεγγίσουμε τις μεταβολές με διαφορικά. *Για τις ανεξάρτητες μεταβλητές τα διαφορικά δίνονται από τις μεταβολές.* Για την μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής, δηλαδή για της συνάρτησης, παρατηρούμε ότι:

1. Αν μεταβληθεί μόνο το x κατά $\Delta x = dx$ τότε η συνάρτηση θα μεταβληθεί οριακά κατά:

$$d_x f = f_x dx$$

2. Αν μεταβληθεί μόνο το y κατά $\Delta y = dy$ τότε η συνάρτηση θα μεταβληθεί οριακά κατά:

$$d_y f = f_y dy$$

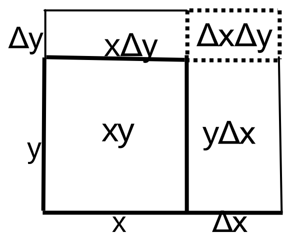
Αν μεταβληθούν αμφότερες οι μεταβλητές, κατά $\{\Delta x = dx, \Delta y = dy\}$, τότε η τιμή της συνάρτησης θα μεταβληθεί οριακά κατά:

$$df = f_x dx + f_y dy$$

Λέμε ότι οι **οριακές μεταβολές προστίθενται**. Το παραπάνω μέγεθος καλείται (**πρώτο) διαφορικό** της συνάρτησης ή της εξαρτημένης μεταβλητής. Γεωμετρικά, το παραπάνω διαφορικό αντιστοιχεί στην γραμμική προσέγγιση. Δηλαδή αφορά την μεταβολή πάνω στο εφαπτόμενο επίπεδο και δίνει μια πρώτη εκτίμηση της μεταβολής στην τιμή της συνάρτησης. Ειδικότερα, το πρόσημο της μεταβολής Δf συμπίπτει με το πρόσημο του διαφορικού df αν αυτό είναι μη μηδενικό, δηλαδή αν δεν μηδενίζονται αμφότερες οι μερικές παράγωγοι.

Παράδειγμα. Γεωμετρικά, το γινόμενο δύο μεγεθών παριστάνει το εμβαδόν ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου:

$$z = xy$$



Για μεταβολές $\{\Delta x, \Delta y\}$ των δύο πλευρών, η μεταβολή και το διαφορικό του εμβαδού δίνονται από τις παραστάσεις:

$$\Delta z = (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy \quad = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$$

$$dz = z_x dx + z_y dy = ydx + xdy = y\Delta x + x\Delta y$$, διότι: $dx = \Delta x,\ dy = \Delta y$

Έτσι, το διαφορικό dz του εμβαδού προσεγγίζει την μεταβολή του Δz, με την έννοια ότι παραλείπει μόνο τον όρο $\Delta x\Delta y$ που είναι το εμβαδό του πάνω δεξιά τμήματος στο σχήμα, και είναι **σχετικά** ασήμαντο για μικρά $\{\Delta x, \Delta y\}$, αρκεί να μην έχουμε $dz = 0$, δηλαδή να μην αρχίζουμε με $x = 0$ και $y = 0$

▲

Τα παραπάνω γενικεύονται άμεσα σε συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητών. Έτσι, για μια συνάρτηση 3 μεταβλητών, θα έχουμε:

$$f(x,y,z) \Rightarrow df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$