

## *Υπόδειγμα δημοσίων αγαθών*

Οικονομία με  $i=1,2,\dots,I$  οικονομικές μονάδες, όπου

$$c^i = (1 - \theta^i) z^i$$

$$z^i = c^i + \theta^i z^i$$

Κάθε οικονομική μονάδα αντλεί χρησιμότητα

$$u^i(c^i, N)$$

από την κατανάλωσή της και το δημόσιο αγαθό

$$N \equiv \frac{\sum_{i=1}^I \theta^i z^i}{I}$$

## ***Ισορροπία Nash (Decentralized)***

Κάθε οικονομική μονάδα  $i$  επιλέγει το  $\theta^i$  λύνοντας το πρόβλημα:

$$\max_{\theta^i} u^i \left( (1 - \theta^i) z^i, N \equiv \frac{\sum_{i=1}^I \theta^i z^i}{I} \right)$$

FOC

$$u_c^i(-z^i) + u_N^i \frac{1}{I} z^i = 0 \Leftrightarrow u_c^i = u_N^i \frac{1}{I} \Leftrightarrow \frac{u_c^i}{u_N^i} = \frac{1}{I} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_c^i}{u_N^i} = \frac{1}{I} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$  ***Συμμετρική Ισορροπία Nash (SNE)***  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{u_c}{u_N} \right)^{NASH} = \frac{1}{I} < 1$$

## ***Ισορροπία με συνεργασία (Cooperative)***

Ενας κεντρικός σχεδιαστής επιλέγει το  $\theta^i$  λύνοντας το πρόβλημα:

$$\begin{aligned} & \max_{\theta^i} \sum_{i=1}^I u^i \left( (1-\theta^i)z^i, \frac{\sum_{i=1}^I \theta^i z^i}{I} \right) = \\ & = \max_{\theta^i} u^1 \left( (1-\theta^1)z^1, \frac{\sum \theta^i z^i}{I} \right) + \dots + u^i \left( (1-\theta^i)z^i, \frac{\sum \theta^i z^i}{I} \right) + \dots + u^I \left( (1-\theta^I)z^I, \frac{\sum \theta^i z^i}{I} \right) \end{aligned}$$

FOC

$$u_c^i(-z^i) + I u_N^i \frac{1}{I} z^i = 0 \Leftrightarrow u_c^i = u_N^i \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$  ***Συμμετρική Ισορροπία Συνεργασίας (SCE)***  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{u_c}{u_N} \right)^{COOP} = 1$$

$$\left( \frac{u_c}{u_N} \right)^{NASH} = \frac{1}{I} < 1$$

$$\left( \frac{u_c}{u_N} \right)^{COOP} = 1$$

$$\left( \frac{u_c}{u_N} \right)^{NASH} < \left( \frac{u_c}{u_N} \right)^{COOP}$$

## *ΛΥΣΗ με λογαριθμικές προτιμήσεις*

$$u^i = u^i(c^i, N) = \ln c^i + \nu \ln N, \quad i = 1, 2, \dots, I$$

$$c^i = (1 - \theta^i) z^i$$

$$N \equiv \frac{\sum_{i=1}^I \theta^i z^i}{I} = \frac{\theta^1 z^1 + \dots + \theta^i z^i + \dots + \theta^I z^I}{I}$$

### *A. ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ NASH*

#### *Νοικοκυριό $i$*

$$\max_{\theta^i} \ln(1 - \theta^i) z^i + \nu \ln N$$

$$\max_{\theta^i} \ln(1 - \theta^i) z^i + \nu \ln \frac{\sum \theta^i z^i}{I}$$

$$\max_{\theta^i} \ln(1 - \theta^i) z^i + v \ln \left( \frac{\theta^1 z^1 + \dots + \theta^i z^i + \dots + \theta^I z^I}{I} \right)$$

FOC

$$\frac{-z^i}{(1 - \theta^i) z^i} + \frac{v}{\frac{\sum \theta^i z^i}{I}} \frac{1}{I} z^i = 0 \Leftrightarrow$$

**ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ** (ολα τα νοικοκυριά ίδια)

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{(1 - \theta)} + \frac{vz}{I\theta z} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(1 - \theta)} = \frac{v}{I\theta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta^{NASH} = \frac{v}{I + v}$$

## ***B. Ισορροπία με συνεργασία (Cooperative)***

$$\max_{\theta^i} \sum (\ln(1 - \theta^i) z^i + v \ln N)$$

$$\max_{\theta^i} \left\{ \left[ \ln(1 - \theta^1) z^1 + v \ln N \right] + \dots + \left[ \ln(1 - \theta^i) z^i + v \ln N \right] + \dots + \left[ \ln(1 - \theta^I) z^I + v \ln N \right] \right\}$$

$$\max_{\theta^i} \left\{ \left[ \ln(1 - \theta^1) z^1 + v \ln \frac{\sum \theta^i z^i}{I} \right] + \dots + \left[ \ln(1 - \theta^i) z^i + v \ln \frac{\sum \theta^i z^i}{I} \right] + \dots + \left[ \ln(1 - \theta^I) z^I + v \ln \frac{\sum \theta^i z^i}{I} \right] \right\}$$

FOC

$$\frac{-z^i}{(1 - \theta^i) z^i} + I \frac{v}{\sum \theta^i z^i} \frac{1}{I} z^i = 0 \Leftrightarrow$$

***ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ (ολα τα νοικοκυριά ίδια)***

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{(1 - \theta)} + \frac{v}{\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\theta}{(1 - \theta)} = v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta^{COOP} = \frac{v}{1 + v}$$

$$\theta^{NASH} = \frac{v}{I + v}$$

$$\theta^{COOP} = \frac{v}{1 + v}$$

$$\theta^{COOP} > \theta^{NASH}$$