Το υπόδειγμα Άριστης Οικονομικής Μεγέθυνσης με *Παραγωγικές Εξωτερικότητες Κεφαλαίου* (Romer-type externalities)

Α. Αποκεντρωμένη Οικονομία

Υποθέστε μία κλειστή οικονομία η οποία απαρτίζεται από πλήθος νοικοκυριών και πλήθος επιχειρήσεων.

Το κάθε νοικοκυριό επιλέγει πόσο θα καταναλώσει, πόσο θα εργασθεί και πόσο θα αποταμιεύσει, με κριτήριο τη μεγιστοποίηση της διαχρονικής του ευημερίας και σεβόμενο τους εισοδηματικούς περιορισμούς που αντιμετωπίζει. Τις αποταμιεύσεις του τις επενδύει σε φυσικό κεφάλαιο το οποίο δανείζει στην επιχείρηση και για το οποίο λαμβάνει τόκο/απόδοση. Επίσης, προσφέρει εργασία στην επιχείρηση για την οποία λαμβάνει μισθό. Τέλος είναι αγοραστής των μετοχών της επιχείρησης και ως εκ τούτου το εισοδημά του συμπληρώνεται από τα μερίσματα της επιχείρησης.

Η αντιπροσωπευτική επιχείρηση από την άλλη πλευρά παράγει ένα μοναδικό προϊόν χρησιμοποιώντας κεφάλαιο και εργασία. Επίσης, η παραγωγικότητα της επηρεάζεται από το σύνολο του κεφαλαίου το οποίο υπάρχει στην οικονομία. Όσο περισσότερο κεφάλαιο υπάρχει στην οικονομία τόσο πιο παραγωγική είναι η επιχείρηση. Άρα οι αποφάσεις των λοιπών παραγόντων της οικονομίας για αποταμίευση και συσσώρευση κεφαλαίου λειτουργούν σαν θετικές εξωτερικότητες για την επιχείρηση. Η τελευταία αντιμετωπίζει το συνολικό κεφάλαιο στην οικονομία σαν δεδομένο, με άλλα λόγια δεν «καταλαβαίνει» την εξωτερικότητα (τεχνικά αντιμετωπίζει το συνολικό κεφάλαιο στην οικονομία σαν παράμετρο) και επιλέγει την ποσότητα του κεφαλαίου και της εργασίας που θα χρησιμοποιήσει με κριτήριο την μεγιστοποίηση των κερδών της. Υποθέτουμε διακριτό χρόνο, άπειρο χρονικό ορίζοντα και πλήρη βεβαιότητα.

A.1 Το πρόβλημα του νοικοκυριού

Υπάρχουν $i = 1,....,I$ νοικοκυριά. Το i νοικοκυριό επιλέγει πόσο θα καταναλώσει και πόσο θα αποταμιεύσει/επενδύσει προκειμένου να μεγιστοποιήσει τη διαχρονική του ευημερία που δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log c_t^i \tag{1}$$

Όπου $0 < \beta < 1$ είναι ο συντελεστής χρονικής προεξόφλησης που δείχνει τον βαθμό που το νοικοκυριό ενδιαφέρεται για τη μελλοντική του ευημερία σε σχέση με την σημερινή και c_t^i η καταναλωσή του την περίοδο t. Ο εισοδηματικός περιορισμός που αντιμετωπίζει το νοικοκυριό σε κάθε χρονική περίοδο είναι ο ακόλουθος:

$$c_t^i + i_t^i = r_t k_t^i + w_t l_t^i + \pi_t^i \tag{2}$$

Όπου i_t^i είναι η επένδυση του νοικοκυριού i την περίοδο t, r_t είναι η αμοιβή του κεφαλαίου την περίοδο t, k_t^i είναι το φυσικό κεφάλαιο του νοικοκυριού i στο τέλος της περιόδου $t-1$ ή στην αρχή της περιόδου t, w_t ο μισθός την περίοδο t, l_t^i η ποσότητα εργασίας την οποία το νοικοκυριό i προσφέρει στην περίοδο t και π_t^i τα μερίσματα που λαμβάνει το νοικοκυριό i από τη λειτουργία των επιχειρήσεων (ως κάτοχος μετοχών). Για λόγους απλοποίησης υποθέτουμε ότι το κάθε νοικοκυριό i προσφέρει ανελαστικά μία μονάδα εργασίας άρα $l_t^i = 1$. Το κάθε νοικοκυριό λαμβάνει τις αποφάσεις του παίρνοντας σαν δεδομένα το ύψος της αμοιβής του κεφαλαίου, r_t, το μισθό, w_t, καθώς και τα μερίσματα, π_t^i, ενώ είναι γνωστό (predetermined) το ύψος του φυσικού κεφαλαίου στην αρχή της περιόδου t, k_t^i. **Προσεξτε** ότι το αριστερό κομμάτι της (2) δίνει το σκέλος της δαπάνης ενώ το δεξιό το σκέλος του εισοδήματος.

Η επένδυση δίνεται από:

$$i_t^i = k_{t+1}^i - (1-\delta)k_t^i \tag{3}$$

Όπου k_{t+1}^i είναι το φυσικό κεφάλαιο του νοικοκυριού i στο τέλος της περιόδου t ή στην αρχή της περιόδου $t+1$ και $0 \leq \delta \leq 1$ είναι ο συντελεστής απόσβεσης του κεφαλαίου. Για λόγους αλγεβρικής απλοποίησης υποθέτουμε ότι $\delta = 1$, δηλαδή έχουμε πλήρη απόσβεση κεφαλαίου. Έτσι, λοιπόν το πρόβλημα του νοικοκυριού i ξαναγράφεται ως εξής:

$$\max_{c_t^i, k_{t+1}^i} \left[\log c_0^i + \beta \log c_1^i + \beta^2 \log c_2^i + ... \right]$$

Ούτως ώστε σε κάθε χρονική περίοδο να ικανοποιείται ο ακόλουθος εισοδηματικός περιορισμός:

$$c_t^i + k_{t+1}^i = r_t k_t^i + w_t + \pi_t^i \tag{4}$$

Παρατηρώντας το πρόβλημα διαπιστώνουμε ότι μόνο δύο διαδοχικές περίοδοι παίζουν ρόλο για την άριστη επιλογή του c_t^i και του k_{t+1}^i σε οποιαδήποτε χρονική περίοδο t, οπότε το πρόβλημα του νοικοκυριού είναι δυνατό να ξαναγραφεί ως εξής:

$$\max_{c_t^i, k_{t+1}^i} \left[\log c_t^i + \beta \log c_{t+1}^i \right] \tag{5}$$

Ούτως ώστε να ικανοποιείται η (4). Λύνοντας την (4) ως προς c_t^i και αντικαθιστώντας την στην (5) και γράφοντας την (4) μία περίοδο μπροστά, λύνοντας ως προς c_{t+1}^i και αντικαθιστώντας την στην (5), μετατρέπουμε το πρόβλημα από ενα πρόβλημα με περιορισμούς σε ένα πρόβλημα χωςρίς περιορισμούς:

$$\max_{c_t^i, k_{t+1}^i} \left[\log(r_t k_t^i + w_t + \pi_t^i - k_{t+1}^i) + \beta \log(r_{t+1} k_{t+1}^i + w_{t+1} + \pi_{t+1}^i - k_{t+2}^i) \right] \tag{6}$$

Η συνθήκη πρώτης τάξης ως προς k_{t+1}^i από τη μεγιστοποίηση της (6) δίνει την ακόλουθη σχέση:

$$\frac{1}{c_t^i}(-1) + \beta \frac{1}{c_{t+1}^i} r_{t+1} = 0 \Rightarrow \frac{c_{t+1}^i}{c_t^i} = \beta r_{t+1} \tag{7}$$

Η εξίσωση (7) είναι η γνωστή εξίσωση Euler, η οποία δίνει τον διαχρονικό λόγο υποκατάστασης μεταξύ κατανάλωσης της περιόδου t και της περιόδου $t+1$. Οι εξισώσεις (7) και (4) απαρτίζουν ένα σύστημα δύο εξισώσεων σε δύο αγνώστους.

Α.2 Το πρόβλημα της επιχείρησης

Έστω ότι υπάρχουν $j = 1,...., J$ επιχειρήσεις. Η επιχείρηση χρησιμοποιεί κεφάλαιο και εργασία προκειμένου να παράγει ένα μοναδικό αγαθό, ενώ αντλεί θετικές εξωτερικότητες από το σύνολο του κεφαλαίου στην οικονομία, σύμφωνα με την ακόλουθη συνάρτηση παραγωγής:

$$y_t^j = A(k_t^j)^{\alpha}(l_t^j)^{1-\alpha}(\frac{K_t}{J})^{1-\alpha} \qquad (8)$$

Όπου $A > 0$ είναι μία σταθερά – συντελεστής τεχνολογίας, $0 < \alpha < 1$ είναι μία σταθερά η οποία ουσιαστικά καθορίζει την παραγωγικότητα του φυσικού κεφαλαίου, $K_t \equiv \sum_{j=1}^{J} k_t^j$ είναι το σύνολο του φυσικού κεφαλαίου στην οικονομία την περίοδο t και J είναι ο αριθμός των επιχειρήσεων. Με άλλα λόγια, η επίπτωση της θετικής εξωτερικότητας μετριάζεται με το πλήθος των επιχειρήσεων στην οικονομία που επωφελούνται από αυτήν (congestion).

Η επιχείρηση i επιλέγει το k_t^j και το l_t^j με κριτήριο τη μεγιστοποίηση των κερδών της σε κάθε περίοδο t παίρνοντας σαν δεδομένο (αντιμετωπίζοντας δηλαδή παραμετρικά) το σύνολο του φυσικού κεφαλαίου, $K_t \equiv \sum_{j=1}^{J} k_t^j$. Η συνάρτηση κερδών της επιχείρησης j σε μία οποιαδήποτε περίοδο t είναι η ακόλουθη:

$$\pi_t^j \equiv y_t^j - r_t k_t^j - w_t l_t^j \qquad (9)$$

Όπως είναι προφανές από την εξίσωση (9) το πρόβλημα της επιχείρησης είναι στατικό σε αντιδιαστολή με το πρόβλημα του νοικοκυριού που είναι δυναμικό. Οι συνθήκες πρώτης τάξεως ως προς το κεφάλαιο και την εργασία είναι:

$$\frac{\partial \pi_t^j}{\partial k_t^j} = 0 \Rightarrow r_t = \alpha A(k_t^j)^{\alpha-1}(l_t^j)^{1-\alpha}(\frac{K_t}{I})^{1-\alpha} \Rightarrow r_t = \alpha \frac{y_t^j}{k_t^j} \qquad (10a)$$

$$\frac{\partial \pi_t^j}{\partial l_t^j} = 0 \Rightarrow w_t = (1-\alpha)A(k_t^j)^{\alpha}(l_t^j)^{-\alpha}(\frac{K_t}{I})^{1-\alpha} \Rightarrow w_t = (1-\alpha)\frac{y_t^j}{l_t^j} \qquad (10b)$$

Προσέξτε ότι οι σχέσεις (10a)-(10b) εάν αντικατασταθούν στην συνάρτηση των κερδών υπονοούν ότι σε κάθε περίοδο t:

$$\pi_t^j = 0 \tag{10c}$$

Δηλαδή η επιχείρηση j δεν μπορεί παρά να έχει μόνο κανονικά κέρδη.

Α.3 Ανταγωνιστική Ισορροπία

Ορίζεται ως η κατανομή πόρων $\{c_t, k_{t+1}, l_t, y_t\}_{t=0}^{\infty}$ και τιμών $\{r_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$ η οποία προκύπτει εάν: (α) Τα νοικοκυρία μεγιστοποιούν την ευημερία τους, (β) Οι επιχειρήσεις μεγιστοποιούν τα κέρδη τους, (γ) Όλοι οι περιορισμοί ικανοποιούνται και (δ) Όλες οι αγορές «καθαρίζουν». Υποθέτουμε ότι έχουμε ίδιο αριθμό νοικοκυριών και επιχειρήσεων, δηλαδή $I = J$. Επίσης λύνουμε για μια συμμετρική ανταγωνιστική ισορροπία με την έννοια ότι υποθέτουμε ότι τα νοικοκυριά και οι επιχειρήσεις είναι όμοιες ex-post. Άρα απο εδώ και στο εξής δεν χρησιμοποιούμε πλέον τους δείκτες i και j.

Έτσι λοιπόν στην ανταγωνιστική ισορροπία η προσφορά εργασίας από την πλευρά των νοικοκυριών πρέπει να ισούται με τη ζήτηση εργασίας από την πλευρά των επιχειρήσεων, άρα πρέπει $\sum_{i=1}^{I}(l_t^i)^s = \sum_{j=1}^{J}(l_t^j)^d \Rightarrow Il_t^s = Jl_t^d \Rightarrow I = Jl_t^d \Rightarrow l_t^d = 1$ αφού κάθε νοικοκυριό i προσφέρει ανελαστικά μία μονάδα εργασίας. Επίσης, αφού όλοι είναι όμοιοι ex-post, το σύνολο του φυσικού κεφαλαίου στην οικονομία θα είναι: $K_t \equiv \sum k_t \equiv Jk_t$. Θέτοντας $l_t = 1$ και $K_t \equiv \sum k_t \equiv Jk_t$ η σχέση (8) υπονοεί πως το προϊόν στην ανταγωνιστική ισορροπία είναι:

$$y_t = Ak_t \tag{11}$$

Δηλαδή με άλλα λόγια σε επίπεδο ανταγωνιστικής ισορροπίας η συνάρτηση παραγωγής είναι γραμμική, είναι δηλαδή της μορφής AK και δεν παρουσιάζει πλέον φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας, όπως συνέβαινε στο επίπεδο της ατομικής επιχειρήσης. Αυτό φαίνεται και από το γεγονός πως το οριακό προϊόν του κεφαλαίου στην ανταγωνιστική ισορροπία είναι θετικό και σταθερό:

$$MPK \equiv \frac{\partial y_t}{\partial k_t} = A > 0 \tag{12}$$

Άρα, στο πλαίσιο αυτό ανάλυσης, η διαρκής συσσώρευση κεφαλαίου είναι δυνατό να υποστηρίξει μακροχρόνια οικονομική μεγέθυνση, καθώς κάθε πρόσθετη μονάδα κεφαλαίου αυξάνει το προϊόν πάντα κατά A.

Επίσης οι (10a)-(10b) γίνονται:

$$r_t = \alpha A \tag{13a}$$

$$w_t = (1-\alpha)Ak_t \tag{13b}$$

Η εξίσωση (7) σε συνδυασμό με την (13a) γραμμένη μία περίοδο μπροστά δίνει:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \alpha\beta A \tag{14}$$

Δηλαδή ο ρυθμός μεγέθυνσης της κατανάλωσης στην ανταγωνιστική ισορροπία είναι σταθερός. Τέλος, η σχέση (4) εφόσον χρησιμοποιήσουμε τις (13a)-(13b) και τη (10c) γίνεται:

$$c_t + k_{t+1} = Ak_t \tag{15}$$

Οι σχέσεις (11), (13a), (13b), (14) και (15) απαρτίζουν μία ανταγωνιστική ισορροπία. ʹΕχουμε 5 δυναμικές εξισώσεις σε 5 αγνώστους που είναι $\{c_t, k_{t+1}, y_t, r_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$.

<u>Παρατηρείστε</u>, ότι το οριακό προϊόν του κεφαλαίου, όπως αυτό δίνεται από την (12) είναι διαφορετικό από την αμοιβή του κεφαλαίου όπως αυτή που δίνεται από τη (13a). Ειδικότερα, αν και το r_t είναι ίσο με το «ιδιωτικό» οριακό προϊόν του κεφαλαίου (βλέπε σχέση (13a)) είναι μικρότερο από το κοινωνικό οριακό προϊόν του κεφαλαίου (βλέπε σχέση (12)). Δηλαδή με άλλα λόγια οι επενδύοντες σε φυσικό κεφαλαίο αμοίβονται λιγότερο από όσο θα έπρεπε με βάση τη συνεισφορά του συντελεστή κεφάλαιο στην παραγωγική διαδικασία σε επίπεδο ανταγωνιστικής ισορροπίας και αφού εσωτερικευτούν όλες οι εξωτερικότητες. Άρα, εφόσον αμοίβονται λιγότερο από αυτό που θα έπρεπε, επενδύουν και λιγότερο και άρα έχουμε χαμηλότερη συσσώρευση κεφαλαίου από την κοινωνικά επιθυμητή. Επίσης, ο ρυθμός μεγέθυνσης της κατανάλωσης είναι μικρότερος από τον κοινωνικά άριστο, καθώς ισχύει:

$$\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{CE} = \alpha\beta A < \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{SO} = \beta A \tag{16}$$

Ο κοινωνικά άριστος ρυθμός μεγέθυνσης της κατανάλωσης, $\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{SO}$ προκύπτει εάν στην σχέση (7) στη θέση του r αντικαταστήσουμε το οριακό προϊόν του κεφαλαίου από τη (12).

Η παραπάνω απόκλιση οφείλεται στο ότι η επιχείρηση i όταν μεγιστοποιεί τα κέρδη της δεν «καταλαβαίνει» τις θετικές εξωτερικότητες που συνεπάγονται οι ενέργειες και αποφάσεις των άλλων για τη δική της παραγωγικότητα, όπως και οι δικές της ενέργειες και αποφάσεις για την παραγωγικότητα των άλλων.

Συνεπώς, η παρουσία παραγωγικών εξωτερικοτήτων οδηγεί την ανταγωνιστική ισορροπία σε αποτυχία να παράγει μια κατά-Pareto άριστη κατανομή των πόρων και ως εκ τούτου δικαιολογείται η άσκηση οικονομικής πολιτικής. Τα παραπάνω θα γίνουν ακόμη περισσότερο ξεκάθαρα μόλις μελετήσουμε το πρόβλημα του Κοινωνικού Σχεδιαστή παρακάτω.

Α.4 Ένα παράδειγμα δύο περιόδων

Προκειμένου τώρα να εξάγουμε λύσεις κλειστού τύπου για τις κατανομές των πόρων υποθέτουμε ότι η οικονομία μας υφίσταται μόνο για δύο (2) περιόδους, 1 και 2.

Τότε, έχουμε από τις (11), (13a), (13b), (14) και (15):

$y_1 = Ak_1$ για την πρώτη περίοδο (17a)

$y_2 = Ak_2$ για την δεύτερη περίοδο (17b)

$r_1 = \alpha A$ για την πρώτη περίοδο (18a)

$w_1 = (1-\alpha)Ak_1$ για την πρώτη περίοδο (18b)

$r_2 = \alpha A$ για την δεύτερη περίοδο (19a)

$w_2 = (1-\alpha)Ak_2$ για την δεύτερη περίοδο (19b)

$$\frac{c_2}{c_1} = \alpha\beta A \qquad (20)$$

$c_1 + k_2 = Ak_1$ για την πρώτη περίοδο (21a)

$c_2 + k_3 = Ak_2$ για την δεύτερη περίοδο (21b)

Πρόσεξτε ότι αφού η οικονομία μας υφίσταται μόνο για 2 περιόδους, $k_3 = 0$ στην (21b). Οι εξισώσεις (20), (21a) και (21b) απαρτίζουν ένα σύστημα τριών εξισώσεων σε τρείς αγνώστους, δηλαδή τα c_1, c_2 και k_2. Από (21a) και (21b) έχουμε:

$$c_1 = Ak_1 - k_2 \tag{22a}$$

$$c_2 = Ak_2 \tag{22b}$$

Η (20) με βάση τις (22a) και (22b) δίνει:

$$\frac{Ak_2}{Ak_1 - k_2} = \alpha\beta A \Rightarrow \frac{1}{Ak_1 - k_2} = \frac{\alpha\beta}{k_2} \Rightarrow k_2 = \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta} Ak_1 \tag{23}$$

Η (22b) σε συνδυασμό με την (23) δίνει:

$$c_2 = \frac{\alpha\beta A^2}{1+\alpha\beta} k_1 \tag{24}$$

Τέλος, η (22a) σε συνδυασμό με την (23) δίνει:

$$c_1 = \frac{1}{1+\alpha\beta} Ak_1 \tag{25}$$

Οι σχέσεις (23), (24) και (25) δίνουν τις κατανομές c_1, c_2 και k_2 σε μία ανταγωνιστική ισορροπία, συναρτήσει του δεδομένου k_1 και των παραμέτρων της οικονομίας, α, β και A.

Β. Το πρόβλημα του Κοινωνικού Σχεδιαστή

Υποθέστε τώρα ότι υπάρχει ένας Κοινωνικός Σχεδιαστής, ο οποίος επιλέγει για λογαριασμό των παραγόντων της οικονομίας το ύψος της κατανάλωσης και της επένδυσης προκειμένου να μεγιστοποιήσει τη διαχρονική κοινωνική ευημερία, ούτως ώστε να ικανοποιείται το σύνολο των εισοδηματικών περιορισμών που αντιμετωπίζει η οικονομία.

Β.1 Η διαχρονική κοινωνική ευημερία και οι περιορισμοί

Η διαχρονική κοινωνική ευημερία δίνεται από:

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \log c_t^i \tag{26}$$

Ο Κοινωνικός Σχεδιαστής περιορίζεται μόνο από τη συνάρτηση παραγωγής που δίνεται από την εξίσωση (8) και το σύνολο των εισοδηματικών περιορισμών στην οικονομια. Για κάθε παράγοντα i ο εισοδηματικός περιορισμός είναι:

$$y_t^i = A(k_t^i)^{\alpha}(\frac{K_t}{I})^{1-\alpha} = c_t^i + k_{t+1}^i \tag{27}$$

Έτσι το πρόβλημα τώρα είναι ο Κοινωνικός Σχεδιαστής να επιλέξει σε κάθε χρονική περίοδο t, τα c_t^i και k_{t+1}^i, για λογαριασμό κάθε παράγοντα i, που θα δώσουν τη μέγιστη δυνατή τιμή στην (26) ούτως ώστε σε κάθε περίοδο t να ικανοποιείται η (27).

Δεδομένου ότι μόνο δύο διαδοχικές περίοδοι παίζουν ρόλο για την άριστη επιλογή του c_t^i και του k_{t+1}^i σε οποιαδήποτε χρονική περίοδο t, το πρόβλημα του Κοινωνικού Σχεδιαστή μπορεί να ξαναγραφτεί ως εξής:

$$\max_{c_t^i, k_{t+1}^i} [\log c_t^1 + \log c_t^2 + ... + \beta \log c_{t+1}^1 + \beta \log c_{t+1}^2 + ...] \tag{28}$$

Ούτως ώστε να ικανοποιείται η (27) για κάθε παράγοντα i σε κάθε χρονική περίοδο t. Η συνθήκη πρώτης τάξης της (28) ως προς k_{t+1}^i δίνει:

$$\frac{1}{c_t^i}(-1) + \frac{\beta}{c_{t+1}^i}[\alpha A (k_{t+1}^i)^{\alpha-1}(\frac{\sum_{i=1}^{I} k_{t+1}^i}{I})^{1-\alpha} + (1-\alpha)A(k_{t+1}^i)^{\alpha}(\frac{\sum_{i=1}^{I} k_{t+1}^i}{I})^{-\alpha}\frac{1}{I}] + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{I-1}\frac{\beta}{c_{t+1}^j}[(1-\alpha)A(k_{t+1}^j)^{\alpha}(\frac{\sum_{i=1}^{I} k_{t+1}^i}{I})^{-\alpha}\frac{1}{I}] = 0 \tag{29}$$

Επιβάλλοντας, όπως και πριν συμμετρία, η (29) υπονοεί ότι:

$$-\frac{1}{c_t} + \frac{\beta}{c_{t+1}}[\alpha A (k_{t+1})^{\alpha-1}(\frac{Ik_{t+1}}{I})^{1-\alpha} + (1-\alpha)A(k_{t+1})^{\alpha}(\frac{Ik_{t+1}}{I})^{-\alpha}\frac{1}{I}] + (I-1)\frac{\beta}{c_{t+1}}[(1-\alpha)A(k_{t+1})^{\alpha}(\frac{Ik_{t+1}}{I})^{-\alpha}\frac{1}{I}] = 0 \Rightarrow$$
$$-\frac{1}{c_t} + \frac{\beta}{c_{t+1}}[\alpha A + (1-\alpha)A\frac{1}{I}] + (I-1)\frac{\beta}{c_{t+1}}[(1-\alpha)A\frac{1}{I}] = 0 \Rightarrow -\frac{1}{c_t} + \frac{\beta}{c_{t+1}}\alpha A + \frac{\beta}{c_{t+1}}(1-\alpha)A\frac{1}{I}(1+I-1) = 0 \Rightarrow$$
$$-\frac{1}{c_t} + \frac{\beta}{c_{t+1}}\alpha A + \frac{\beta}{c_{t+1}}(1-\alpha)A = 0 \Rightarrow -\frac{1}{c_t} + \frac{\beta A}{c_{t+1}}(1+\alpha-\alpha) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{c_t} + \frac{\beta A}{c_{t+1}} = 0 \Rightarrow \frac{c_{t+1}}{c_t} = \beta A \tag{30}$$

Ενώ η (27) δίνει:

$$c_t + k_{t+1} = Ak_t \tag{31}$$

Οι εξισώσεις (30) και (31) είναι δύο εξισώσεις σε δύο αγνώστους.

B.2 Ένα παράδειγμα δύο περιόδων

Προκειμένου τώρα να εξάγουμε λύσεις κλειστού τύπου για τις κατανομές των πόρων υποθέτουμε ότι η οικονομία μας υφίσταται μόνο για δύο (2) περιόδους, 1 και 2.

Τότε, έχουμε από τις (30) και (31):

$$\frac{c_2}{c_1} = \beta A \tag{32}$$

$$c_1 + k_2 = Ak_1 \qquad \text{για την πρώτη περίοδο} \tag{33a}$$

$$c_2 + k_3 = Ak_2 \qquad \text{για την δεύτερη περίοδο} \tag{33b}$$

<u>Πρόσεξτε</u> ότι αφού η οικονομία μας υφίσταται μόνο για 2 περιόδους, $k_3 = 0$ στην (33b). Οι εξισώσεις (32), (33a) και (33b) απαρτίζουν ένα σύστημα τριών εξισώσεων σε τρείς αγνώστους, δηλαδή τα c_1, c_2 και k_2. Από (33a) και (33b) έχουμε:

$$c_1 = Ak_1 - k_2 \tag{34a}$$

$$c_2 = Ak_2 \tag{34b}$$

Η (32) με βάση τις (34a) και (34b) δίνει:

$$\frac{Ak_2}{Ak_1 - k_2} = \beta A \Rightarrow \frac{1}{Ak_1 - k_2} = \frac{\beta}{k_2} \Rightarrow k_2 = \frac{\beta}{1+\beta} Ak_1 \tag{35}$$

Η (34b) σε συνδυασμό με την (35) δίνει:

$$c_2 = \frac{\beta A^2}{1+\beta} k_1 \tag{36}$$

Τέλος, η (34a) σε συνδυασμό με την (35) δίνει:

$$c_1 = \frac{1}{1+\beta} A k_1 \tag{37}$$

Οι σχέσεις (35), (36) και (37) δίνουν τις κατανομές c_1, c_2 και k_2 στο πρόβλημα του κοινωνικού σχεδιαστή, συναρτήσει του δεδομένου k_1 και των παραμέτρων της οικονομίας, β και A. Εφόσον, αυτή η κατανομή αντιστοιχεί στο πρόβλημα της μεγιστοποίησης της κοινωνικής ευημερίας αποτελεί μια κατά-Pareto άριστη κατανομή των πόρων.

Σύγκριση σχέσεων (23)-(25) με (35)-(37)

Προσέξτε από σύγκριση (23) και (35) ότι:

$$k_2^{CE} = \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta} A k_1 < k_2^{SO} = \frac{\beta}{1+\beta} A k_1$$

Επίσης, από σύγκριση (24) και (36) προκύπτει ότι:

$$c_2^{CE} = \frac{\alpha\beta A^2}{1+\alpha\beta} k_1 < c_2^{SO} = \frac{\beta A^2}{1+\beta} k_1$$

Τέλος, από σύγκριση (25) και (37) έχουμε ότι:

$$c_1^{CE} = \frac{1}{1+\alpha\beta} A k_1 > c_1^{SO} = \frac{1}{1+\beta} A k_1 .$$

Βαγγέλης Βασιλάτος, Γιώργος Οικονομίδης

Μάϊος 2009