Το Νεοκλασσικό υπόδειγμα οικονομικής μεγέθυνσης

Α. Αποκεντρωμένη Οικονομία **(Decentralized Economy)**

Α1. Νοικοκυριά

Σε κάθε χρονική στιγμή t υπάρχουν N όμοια νοικοκυριά το καθ'ένα εκ των οποίων συμβολίζεται με τον δείκτη h. Θα αναφερόμαστε στο νοικοκυριό h ως το αντιπροσωπευτικό νοικοκυριό (representative household).

Η αναμενόμενη διαχρονική χρησιμότητα του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού είναι:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^{*t} u\left(C_t^h, L_t^h\right) \tag{1}$$

όπου $0 < \beta^* < 1$ είναι ο συντελεστής διαχρονικής προεξόφλησης, C_t^h είναι η κατανάλωση του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού h την χρονική στιγμή t, και L_t^h είναι το ποσοστό του χρόνου που το νοικοκυριό h διαθέτει την χρονική στιγμή t για ξεκούραση.

Η στιγμιαία συνάρτηση χρησιμότητας είναι της μορφής:

$$u(C_t^h, L_t^h) = \frac{\left((C_t^h)^{\mu} (L_t^h)^{1-\mu}\right)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \tag{2}$$

όπου $0 < \mu < 1$ είναι η στάθμιση που δίνει το νοικοκυριό στην κατανάλωση και $1/\sigma > 0$ είναι η διαχρονική ελαστικότητα υποκατάστασης. Αν $\sigma = 1$,

$$u(C_t^h, L_t^h) = \mu \ln C_t^h + (1-\mu) \ln L_t^h \tag{2'}$$

Οι αποταμιεύσεις του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού νοικοκυριού h διοχετεύονται σε επένδυση σε φυσικό κεφάλαιο, I_t^h.

Το φυσικό κεφάλαιο αποδίδει εισόδημα $r_t K_t^h$, όπου r_t είναι η απόδοση μιας μονάδας από το κεφάλαιο K_t^h που έχει συσσωρεύσει το νοικοκυριό.

Επίσης, κάθε νοικοκυριό λαμβάνει μερίσματα, Π_t^h από τα κέρδη των επιχειρήσεων.

Κάθε νοικοκυριό, τέλος, κατανέμει τον διαθέσιμο χρόνο του, ο οποίος έχει νορμαλισθεί στην μονάδα, σε εργασία H_t^h και ξεκούραση L_t^h (συνεπώς, H_t^h και L_t^h είναι το ποσοστό του χρόνου που το νοικοκυριό h διαθέτει την χρονική στιγμή t για εργασία και ξεκούραση, αντίστοιχα). Δηλαδή, σε κάθε χρονική στιγμή,

$$L_t^h + H_t^h = 1 \tag{3}$$

Ο εισοδηματικός περιορισμός του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού h είναι:

$$C_t^h + I_t^h = r_t K_t^h + w_t H_t^h + \Pi_t^h \tag{4}$$

όπου w_t είναι ο μισθός (η αμοιβή μιας εργατοώρας).

Το κεφάλαιο συσσωρεύεται σύμφωνα με τον κανόνα:

$$K_{t+1}^h = (1-\delta)K_t^h + I_t^h \tag{5}$$

όπου $0 < \delta < 1$ είναι ο ρυθμός απόσβεσης. Το αρχικό επίπεδο κεφαλαίου K_0^h είναι εξωγενώς δεδομένο.

Όλες οι αγορές (προϊόντος και συντελεστών παραγωγής) είναι τέλεια ανταγωνιστικές. Συνεπώς, το αντιπροσωπευτικό νοικοκυριό συμπεριφέρεται ανταγωνιστικά θεωρώντας τις τιμές (προιόντος και συντελεστών παραγωγής) δεδομένες. Επίσης δεδομένη θεωρεί και την ακολουθία των μερισμάτων. Δηλαδή, κάθε νοικοκυριό h επιλέγει την ακολουθία $\left\{C_t^h, I_t^h, H_t^h, L_t^h, K_{t+1}^h\right\}_{t=0}^{\infty}$ έτσι ώστε να μεγιστοποιεί την διαχρονική του χρησιμότητα (1), υπό τους περιορισμούς (3), (4), (5), τους φυσικούς περιορισμούς $C_t^h > 0, I_t^h > 0, H_t^h > 0, L_t^h > 0, K_{t+1}^h > 0,\ t = 0,1,...$ και με εξωγενώς δεδομένη την αρχική τιμή του κεφαλαίου K_0^h>0.

Άρα το αντιπροσωπευτικό νοικοκυριό h λύνει το παρακάτω δυναμικό πρόβλημα αριστοποίησης με περιορισμούς:

$$\max_{\left\{C_t^h, I_t^h, H_t^h, L_t^h, K_{t+1}^h\right\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{*t} u\left(C_t^h, L_t^h\right) \tag{1}$$

s.t.

$$C_t^h + I_t^h = r_t K_t^h + w_t H_t^h + \Pi_t^h \tag{3}$$

$$L_t^h + H_t^h = 1 \tag{4}$$

$$K_{t+1}^h = (1-\delta) K_t^h + I_t^h \tag{5}$$

$$C_t^h > 0,\ I_t^h > 0,\ H_t^h > 0,\ L_t^h > 0,\ K_{t+1}^h > 0,\ \ t = 0,1,\ldots$$

$K_0^h > 0$ εξωγενώς δεδομένο

Λύνω τις (4) και (5) ως προς L_t^h και I_t^h

$$L_t^h = 1 - H_t^h \tag{4'}$$

$$I_t^h = K_{t+1}^h - (1-\delta)K_t^h \tag{5'}$$

Αντικαθιστώ το I_t^h από την (5') στην (3) και λύνω ως προς C_t^h:

$$C_t^h = (1-\delta+r_t)K_t^h + w_t H_t^h - K_{t+1}^h + \Pi_t^h \tag{3'}$$

Αντικαθιστώ τα C_t^h και L_t^h από τις (3') και (4') αντίστοιχα στην (1), οπότε το πρόβλημα αριστοποίησης απλοποιείται σημαντικά σε ένα δυναμικό πρόβλημα αριστοποίησης χωρίς περιορισμούς:

$$\max_{\left\{H_t^h, K_{t+1}^h\right\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{*t} u\Big((1-\delta+r_t)K_t^h + w_t H_t^h - K_{t+1}^h + \Pi_t^h \,, 1 - H_t^h\Big) \tag{1'}$$

$H_t^h > 0,\ K_{t+1}^h > 0,\ t = 0,1,...$

K_0^h>0 εξωγενώς δεδομένο

Οι συνθήκες πρώτης τάξης αυτού του προβλήματος είναι:

$$H_t^h: \quad \frac{\partial u_t(.)}{\partial C_t^h}\frac{\partial C_t^h}{\partial H_t^h}+\frac{\partial u_t(.)}{\partial L_t^h}\frac{\partial L_t^h}{\partial H_t^h}=0$$

$$K_{t+1}^h: \quad \frac{\partial u_t(.)}{\partial C_t^h}\frac{\partial C_t^h}{\partial K_{t+1}^h}+\beta^*\frac{\partial u_{t+1}(.)}{\partial C_{t+1}^h}\frac{\partial C_{t+1}^h}{\partial K_{t+1}^h}=0$$

ή

$$\frac{\partial u_t(.)}{\partial C_t^h}w_t = \frac{\partial u_t(.)}{\partial L_t^h} \tag{6}$$

$$\frac{\partial u_t(.)}{\partial C_t^h}=\beta^*\frac{\partial u_{t+1}(.)}{\partial C_{t+1}^h}\left(1-\delta+r_{t+1}\right) \tag{7}$$

Οι παραπάνω συνθήκες συμπληρώνονται με την συνθήκη transversality για το κεφάλαιο $\lim_{t\to\infty}\beta^{*t}\frac{\partial u_t(.)}{\partial C_t^h}K_{t+1}^h=0$.

Αν $u(C_t^h,L_t^h)=\mu\ln C_t^h+(1-\mu)\ln L_t^h$ οι συνθήκες πρώτης τάξης γίνονται

$$\frac{(1-\mu)}{\mu}\frac{C_t^h}{L_t^h}=w_t \tag{6'}$$

$$\frac{1}{C_t^h}=\beta^*\frac{1}{C_{t+1}^h}\left(1-\delta+r_{t+1}\right) \tag{7'}$$

Α2. Επιχειρήσεις

Υπάρχουν M όμοιες επιχειρήσεις και κάθε μια συμβολίζεται με τον δείκτη f, $f = 1, 2, ..., M$. Θα αναφερόμαστε στην επιχειρήση f ως την αντιπροσωπευτική επιχείρηση (representative firm). Κάθε επιχείρηση παράγει ένα ομοιογενές προϊόν, Y_t^f, χρησιμοποιώντας ιδιωτικό φυσικό κεφάλαιο, K_t^f και ιδιωτική εργασία, H_t^f.

Κάθε επιχείρηση παράγει σύμφωνα με την νεοκλασσική συνάρτηση παραγωγής:

$$Y_t^f = A_t (K_t^f)^{\alpha} (H_t^f)^{1-\alpha} \tag{8}$$

όπου $A_t > 0$ είναι μεταβλητή που εκφράζει την συνολική παραγωγικότητα, και $0 < \alpha < 1$ η ελαστικότητα παραγωγής του κεφαλαίου.

Η αντιπροσωπευτική επιχείρηση f συμπεριφέρεται ανταγωνιστικά θεωρώντας τις τιμές (προιόντος και συντελεστών παραγωγής – η τιμή του προϊόντος είναι νορμαλισμένη στην μονάδα) δεδομένες. Δηλαδή, επιλέγει K_t^f και H_t^f έτσι ωστε να μεγιστοποιεί τα κέρδη της**:**

$$\max_{Y_t^f, K_t^f, H_t^f} \Pi_t^f = Y_t^f - r_t K_t^f - w_t H_t^f \qquad (9)$$

s.t.

$$Y_t^f = A_t (K_t^f)^{\alpha} (H_t^f)^{1-\alpha} \qquad (8)$$

ή

$$\max_{K_t^f, H_t^f} \Pi_t^f = A_t (K_t^f)^{\alpha} (H_t^f)^{1-\alpha} - r_t K_t^f - w_t H_t^f$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$\left(1-\alpha\right)\frac{Y_t^f}{H_t^f}=w_t \qquad (10)$$

$$a\frac{Y_t^f}{K_t^f}=r_t \qquad (11)$$

Αντικαθιστώντας τις (10) και (11) στην συνάρτηση των κερδών προκύπτει ότι

$$\Pi_t^f=0 \qquad (12)$$

Α3. Συνθήκες Εκκαθάρισης των Αγορών (Market Clearing Conditions)

Αγορά Κεφαλαίου $$\sum_{f=1}^{M} K_t^f = \sum_{h=1}^{N} K_t^h \tag{13}$$

Αγορά Εργασίας $$\sum_{f=1}^{M} H_t^f = \sum_{h=1}^{N} H_t^h \tag{14}$$

Αγορά Προϊόντος $$\sum_{f=1}^{M} Y_t^f = \sum_{h=1}^{N} \left(C_t^h + I_t^h \right) \tag{15}$$

όπου $C_t^h + I_t^h$ είναι η ζήτηση προϊόντος από το νοικοκυριό h: $Y_t^h \equiv C_t^h + I_t^h$ (16)

Μερίσματα $$\sum_{f=1}^{M} \Pi_t^f = \sum_{h=1}^{N} \Pi_t^h = 0 \Leftrightarrow \Pi_t^h = 0, \forall t \text{ και } \forall h \tag{17}$$

Α3. Σημείο Αποκεντρωμένης Ανταγωνιστικής Ισορροπίας (Decentralized Competitive Equilibrium)

Το Σημείο Ανταγωνιστικής Ισορροπίας είναι ένα διάνυσμα ποσοτήτων για το αντιπροσωπευτικό νοικοκυριό $\left\{C_t^h, I_t^h, H_t^h, L_t^h, K_{t+1}^h, \Pi_t^h\right\}_{t=0}^{\infty}$, ένα διάνυσμα ποσοτήτων για την αντιπροσωπευτική επιχείρηση $\left\{Y_t^f, H_t^f, K_t^f, \Pi_t^f\right\}_{t=0}^{\infty}$ και ένα διάνυσμα τιμών $\left\{w_t, r_t\right\}_{t=0}^{\infty}$, τέτοια ώστε:

1) Δεδομένων των τιμών, το διάνυσμα των ποσοτήτων του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού $\left\{C_t^h, I_t^h, H_t^h, L_t^h, K_{t+1}^h, \Pi_t^h\right\}_{t=0}^{\infty}$ λύνει το αριστοποιητικό πρόβλημα του νοικοκυριού.

2) Δεδομένων των τιμών, το διάνυσμα των ποσοτήτων της αντιπροσωπευτικής επιχείρησης $\left\{Y_t^f, H_t^f, K_t^f, \Pi_t^f\right\}_{t=0}^{\infty}$ λύνει το αριστοποιητικό πρόβλημα της επιχείρησης.

3) Δεδομένων των διανυσμάτων των ποσοτήτων για το αντιπροσωπευτικό νοικοκυριό και την αντιπροσωπευτική επιχείρηση, το διάνυσμα των τιμών $\left\{w_t, r_t\right\}_{t=0}^{\infty}$ είναι τέτοιο ώστε όλες οι αγορές να εκκαθαρίζονται.

Το Σημείο Ανταγωνιστικής Ισορροπίας περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

i $$\frac{(1-\mu)}{\mu}\frac{C_t^h}{1-H_t^h}=w_t \quad (6')$$

ii $$\frac{1}{C_t^h}=\beta^*\frac{1}{C_{t+1}^h}\left(1-\delta+r_{t+1}\right) \quad (7')$$

iii $$C_t^h=(1-\delta+r_t)K_t^h+w_tH_t^h-K_{t+1}^h \quad (3')$$

iv $$I_t^h=K_{t+1}^h-(1-\delta)K_t^h \quad (5')$$

v $$\left(1-\alpha\right)\frac{Y_t^f}{H_t^f}=w_t \quad (10)$$

vi $$a\frac{Y_t^f}{K_t^f}=r_t \quad (11)$$

vii $$Y_t^f=A_t(K_t^f)^{\alpha}(H_t^f)^{1-\alpha} \quad (8)$$

viii $$\sum_{f=1}^{M} K_t^f = \sum_{h=1}^{N} K_t^h \tag{13}$$

ix $$\sum_{f=1}^{M} H_t^f = \sum_{h=1}^{N} H_t^h \tag{14}$$

x $$\sum_{f=1}^{M} Y_t^f = \sum_{h=1}^{N} (C_t^h + I_t^h) = \sum_{h=1}^{N} Y_t^h \tag{15}$$

xi $$\sum_{f=1}^{M} \Pi_t^f = \sum_{h=1}^{N} \Pi_t^h = 0 \Leftrightarrow \Pi_t^h = 0, \forall t \text{ και } \forall h \tag{17}$$

Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες εκκαθάρισης των αγορών μπορώ να εκφράσω το σημείο ανταγωνιστικής ισορροπίας ως προς μεταβλητές που αφορούν μόνο το αντιπροσωπευτικό νοικοκυριό h:

$$\sum_{f=1}^{M} K_t^f = \sum_{h=1}^{N} K_t^h \Leftrightarrow MK_t^f = NK_t^h \Leftrightarrow K_t^f = \frac{N}{M} K_t^h \qquad (13')$$

$$\sum_{f=1}^{M} H_t^f = \sum_{h=1}^{N} H_t^h \Leftrightarrow MH_t^f = NH_t^h \Leftrightarrow H_t^f = \frac{N}{M} H_t^h \qquad (14')$$

$$\sum_{f=1}^{M} Y_t^f = \sum_{h=1}^{N} Y_t^h \Leftrightarrow MY_t^f = NY_t^h \Leftrightarrow Y_t^f = \frac{N}{M} Y_t^h = \frac{N}{M} (C_t^h + I_t^h) \qquad (15')$$

$$\sum_{f=1}^{M} \Pi_t^f = \sum_{h=1}^{N} \Pi_t^h \Leftrightarrow M\Pi_t^f = N\Pi_t^h \Leftrightarrow \Pi_t^f = \Pi_t^h = 0 \qquad (17')$$

Αντικαθιστώ τις (13’), (14’), (15’) και (17’) στις (10), (11), (8) και (3’). Ετσι το Σημείο Ανταγωνιστικής Ισορροπίας περιγράφεται τελικά από τις εξισώσεις (παρατηρείστε ότι ο αριθμός των νοικοκυριών και ο αριθμός των επιχειρήσεων δεν παίζουν ρόλο).:

I $$\frac{(1-\mu)}{\mu}\frac{C_t^h}{1-H_t^h}=w_t \quad (6')$$

II $$\frac{1}{C_t^h}=\beta^*\frac{1}{C_{t+1}^h}\left(1-\delta+r_{t+1}\right) \quad (7')$$

III $$C_t^h=(1-\delta+r_t)K_t^h+w_tH_t^h-K_{t+1}^h \quad (3')$$

IV $$I_t^h=K_{t+1}^h-(1-\delta)K_t^h \quad (5')$$

V $$\left(1-\alpha\right)\frac{Y_t^h}{H_t^h}=w_t \quad (10)$$

VI $$a\frac{Y_t^h}{K_t^h}=r_t \quad (11)$$

VII $$Y_t^h=A_t(K_t^h)^{\alpha}(H_t^h)^{1-\alpha} \quad (8)$$

Παρατηρείστε ότι αν αντικαταστήσουμε τις εξισώσεις IV, V και VI στην III προκύπτει ο περιορισμός των φυσικών πόρων (resource constraint) $Y_t^h=C_t^h+I_t^h$.

Η διάσταση του προβλήματος μπορεί να μειωθεί ακόμη περισσότερο αν αντικαταστήσουμε τις τιμές στις I, II, III με τα ίσα τους από τις V και VI:

A $$\frac{(1-\mu)}{\mu}\frac{C_t^h}{1-H_t^h}=\left(1-\alpha\right)\frac{Y_t^h}{H_t^h} \qquad (6')$$

B $$\frac{1}{C_t^h}=\beta^*\frac{1}{C_{t+1}^h}\left(1-\delta+a\frac{Y_{t+1}^h}{K_{t+1}^h}\right) \qquad (7')$$

Γ $$Y_t^h=C_t^h+I_t^h \qquad (5')$$

Δ $$I_t^h=K_{t+1}^h-(1-\delta)K_t^h \qquad (17)$$

Ε $$Y_t^h=A_t(K_t^h)^\alpha(H_t^h)^{1-\alpha} \qquad (8)$$

Αυτό είναι ένα δυναμικό σύστημα 5 εξισώσεων ως προς 5 αγνώστους C^h, I^h, Y^h, H^h, K^h *(ένα μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων διαφορών).*

B. Η λύση του κεντρικού σχεδιαστή (Command Economy – Central Planner's Solution)

Ο κεντρικός σχεδιαστής αποφασίζει την κατανομή των πόρων με κριτήριο την μεγιστοποίηση της διαχρονικής ευημερίας του αντιπροσωπευτικού νοικοκυριού και σεβόμενος τον περιορισμό των φυσικών πόρων (resource constraint), την υπάρχουσα τεχνολογία, τον κανόνα μετάβασης του κεφαλαίου, τον διαθέσιμο χρόνο (time constraint), τους φυσικούς περιορισμούς μη αρνητικότητας και την αρχική συνθήκη ως προς το κεφάλαιο (capital initial endowment).

Εδώ, δεν υπάρχουν αγορές, ούτε τιμές.

$$\max_{\left\{C_t^h, I_t^h, H_t^h, L_t^h, K_{t+1}^h\right\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{*t} u\left(C_t^h, L_t^h\right)$$

s.t.

$$Y_t^h = C_t^h + I_t^h$$

$$Y_t^h = A_t (K_t^h)^{\alpha} (H_t^h)^{1-\alpha}$$

$$K_{t+1}^h = (1-\delta) K_t^h + I_t^h$$

$$L_t^h + H_t^h = 1$$

$$C_t^h > 0,\ I_t^h > 0,\ H_t^h > 0,\ L_t^h > 0,\ K_{t+1}^h > 0,\ \ t = 0,1,...$$

$K_0^h > 0$, εξωγενώς δεδομένο

Δείξτε ότι το σημείο αταγωνιστικής ισορροπίας (η κατανομή των πόρων που προκύπτει από την αλληλεπίδραση νοικοκυριών και επιχειρήσεων σε ανταγωνιστικές αγορές) συμπίπτει με την λύση του κεντρικού σχεδιαστή (η κατανομή των πόρων που επιλέγει ο κεντρικός σχεδιαστής).
Αρκεί να δείξετε ότι οι εξισώσεις που περιγράφουν το σημείο αταγωνιστικής ισορροπίας είναι ακριβώς οι ίδιες με τις εξισώσεις που περιγράφουν την λύση του κεντρικού σχεδιαστή.