

ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ- 2026, msm - 23

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ 1.

ΔΙΑΧΡΟΝΙΚΗ ΑΞΙΑ ΧΡΗΜΑΤΟΣ & ΤΡΑΠΕΖΙΚΑ ΔΑΝΕΙΑ

**ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΘΗΝΩΝ**



ATHENS UNIVERSITY
OF ECONOMICS
AND BUSINESS

ΣΧΟΛΗ
ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ
SCHOOL OF
BUSINESS

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ στη
ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΥΠΗΡΕΣΙΩΝ
MSc in SERVICES MANAGEMENT

Δρ.Α.Α.Δράκος

Σύντομη επανάληψη στο θέμα του εκτοκισμού ποσών

- Εκτοκιστική περίοδος είναι η περίοδος εκείνη που οι τόκοι (i) ΕΝΣΩΜΑΤΩΝΟΝΤΑΙ ΣΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ (C). Αυτό σημαίνει ότι μετά την εκτοκιστική περίοδο, το νέο κεφάλαιο (C_n) που υπολογίζονται οι νέοι τόκοι είναι μεγαλύτερο του αρχικού (C).
- Οι δεδουλευμένοι τόκοι εντός μίας εκτοκιστικής περιόδου (στο παραπάνω παράδειγμα εντός του έτους), με επιτόκιο εκτοκιστικής περιόδου i , για d ημέρες (ή για m μήνες) υπολογίζονται ως εξής :

$$C * i * d/360 \quad \text{ή} \quad C * i * m/12$$

Περιγραφική Άσκηση Κατανόησης

Έστω ότι καταθέτουμε σε ένα αποταμιευτικό Τραπεζικό λογαριασμό ένα ποσό $C=100\text{ΕΥΡΩ}$, το οποίο τοκίζεται στο τέλος κάθε έτους με ετήσιο επιτόκιο $i=12\%$.

Αναλύουμε το λογαριασμό στο τέλος του 3^{ου} και 9^{ου} μήνα (m), του 1^{ου} έτους, του 2^{ου} έτους και του 3^{ου} έτους

Τέλος 3^{ου} μήνα, $\text{Κεφάλαιο} + \text{Τόκοι} = C + C * i * m/12 = 100 + 100 * 12\% * 3/12 = 100 + 3$

Τέλος 9^{ου} μήνα, $\text{Κεφάλαιο} + \text{Τόκοι} = C + C * i * m/12 = 100 + 100 * 12\% * 9/12 = 100 + 9$

Τέλος 1ου έτους.

$\text{Κεφάλαιο} + \text{Τόκοι} = C + C * i * m/12 = 100 + 100 * 12\% * 12/12 = 100 + 100 * 12\% = 100 * (1 + 12\%) = 112\text{ΕΥΡΩ (a)}$

Τέλος 2ου έτους

$\text{Κεφάλαιο (αρχή 2ου έτους)} + \text{Τόκοι} = C_1 + C_1 * i = 112 + 112 * 12\% = 112 * (1 + 12\%) = 125,44\text{ΕΥΡΩ (b)}$

όμως από την εξίσωση (α) το $112 = 100 * (1 + 12\%)$

Αντικαθιστώντας το 112 στην εξίσωση (b) με την εξίσωση (α), το ποσό στο τέλος του 2^{ου} έτους μπορεί να γραφεί : $100 * (1 + 12\%) * (1 + 12\%) = 100 * (1 + 12\%)^2 = 125,44\text{ ΕΥΡΩ (c)}$

Τέλος του 3ου έτους

$\text{Κεφάλαιο (αρχή 3ου έτους)} + \text{Τόκοι} = C_2 + C_2 * i = 125,44 + 125,44 * 12\% = 125,44 * (1 + 12\%) = 140,49\text{ΕΥΡΩ (d)}$

όμως από την εξίσωση (c) το $125,44 = 100 * (1 + 12\%)^2$

Αντικαθιστώντας το ποσό 125,44 στην εξίσωση (d) με την εξίσωση (c), το ποσό στο τέλος του 3^{ου} έτους μπορεί να γραφεί : $125,44 * (1 + 12\%) = 100 * (1 + 12\%)^2 * (1 + 12\%) = 100 * (1 + 12\%)^3 = 140,49\text{ ΕΥΡΩ}$

1. ΜΕΛΛΟΥΣΑ (Μ.Α.) και ΠΑΡΟΥΣΑ Αξία (Π.Α.) ΧΡΗΜΑΤΟΣ

Ουσιαστικά αναζητούμε την ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ανάμεσα σε ένα ποσό σήμερα (**Παρούσα Αξία-Π.Α.**) και σε ένα ποσό στο μέλλον (**Μέλλουσα Αξία-Μ.Α.**) λαμβάνοντας υπόψη τη αξία του χρήματος ή κόστος ευκαιρίας ή επιτόκιο προεξόφλησης (ανατοκισμού).

Αναγωγή
σημερινών ποσών
στο μέλλον

$$M.A. = \Pi.A. \times (1 + i)^n$$

όπου $(1 + i)^n$ ο συντελεστής
ανατοκισμού Σ.Α. – Πίνακας Π.1.

Να υπολογίσετε την Μέλλουσα Αξία μετά από 6 έτη, ενός ποσού €120 που καταθέτετε σήμερα, αν το ετήσιο επιτόκιο είναι 5%.

$$M.A. = 120 \times (1 + 5\%)^6 = 160.81 \text{ ΕΥΡΩ} \rightarrow \text{Αυτό πολύ απλά σημαίνει ότι το ποσό των €160,81 μετά από 6 έτη είναι ισοδύναμο με το ποσό των €120 σήμερα.}$$

Αναγωγή
μελλοντικών
ποσών στο
σήμερα

$$\Pi.A. = \frac{M.A.}{(1+i)^n} = M.A. \times \frac{1}{(1+i)^n}$$

όπου $\frac{1}{(1+i)^n}$ ο συντελεστής
προεξόφλησης Σ. Π. – Πίνακας Π. 2.

Να υπολογίσετε την Παρούσα Αξία ενός ποσού 200ΕΥΡΩ μετά από 3 έτη, αν το ετήσιο επιτόκιο προεξόφλησης είναι 5%.

$$\Pi.A. = 200 \times \frac{1}{(1+5\%)^3} = 172,77 \rightarrow \text{Αυτό πολύ απλά σημαίνει ότι το ποσό των €200 μετά από 3 έτη είναι ισοδύναμο με το ποσό των €172,77 σήμερα.}$$

Σημαντική Διευκρίνιση:

Η περίοδος εκτοκισμού (n) θα πρέπει να έχει την ίδια χρονική βάση αναφοράς με το επιτόκιο.

.....Έτσι αν το n αναφέρεται σε εξάμηνα, το επιτόκιο θα πρέπει να είναι εξαμηνιαίο

.....αν το n αναφέρεται σε έτη το επιτόκιο θα πρέπει να είναι ετήσιο.

2. Πίνακες
Συντελεστών
Ανατοκισμού
(Σ.Α.) και
Προεξόφλησης
(Σ.Π.)

Note Pad...

ΠΙΝΑΚΑΣ Π.1. ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΜΕΛΛΟΥΣΑΣ ΑΞΙΑΣ ΜΙΑΣ ΜΟΝΑΔΑΣ ΜΕΤΑ ΑΠΟ Ν ΠΕΡΙΟΔΟΥΣ (ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΑΞΙΑΣ -ΣΜΑ), (1+i) ⁿ																				
Εκτοκιστικές Περίοδοι	Επιτόκια Εκτοκιστικής Περιόδου																			
	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%
1	1,010	1,020	1,030	1,040	1,050	1,060	1,070	1,080	1,090	1,100	1,110	1,120	1,130	1,140	1,150	1,160	1,170	1,180	1,190	1,200
2	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,369	1,392	1,416	1,440
3	1,030	1,061	1,093	1,125	1,158	1,191	1,225	1,260	1,295	1,331	1,368	1,405	1,443	1,482	1,521	1,561	1,602	1,643	1,685	1,728
4	1,041	1,082	1,126	1,170	1,216	1,262	1,311	1,360	1,412	1,464	1,518	1,574	1,630	1,689	1,749	1,811	1,874	1,939	2,005	2,074
5	1,051	1,104	1,159	1,217	1,276	1,338	1,403	1,469	1,539	1,611	1,685	1,762	1,842	1,925	2,011	2,100	2,192	2,288	2,386	2,488
6	1,062	1,126	1,194	1,265	1,340	1,419	1,501	1,587	1,677	1,772	1,870	1,974	2,082	2,195	2,313	2,436	2,565	2,700	2,840	2,986
7	1,072	1,149	1,230	1,316	1,407	1,504	1,606	1,714	1,828	1,949	2,076	2,211	2,353	2,502	2,660	2,826	3,001	3,185	3,379	3,583
8	1,083	1,172	1,267	1,369	1,477	1,594	1,718	1,851	1,993	2,144	2,305	2,476	2,658	2,853	3,059	3,278	3,511	3,759	4,021	4,300
9	1,094	1,195	1,305	1,423	1,551	1,689	1,838	1,999	2,172	2,358	2,558	2,773	3,004	3,252	3,518	3,803	4,108	4,435	4,785	5,160
10	1,105	1,219	1,344	1,480	1,629	1,791	1,967	2,159	2,367	2,594	2,839	3,106	3,395	3,707	4,046	4,411	4,807	5,234	5,695	6,192
11	1,116	1,243	1,384	1,539	1,710	1,898	2,105	2,332	2,580	2,853	3,152	3,479	3,836	4,226	4,652	5,117	5,624	6,176	6,777	7,430
12	1,127	1,268	1,426	1,601	1,796	2,012	2,252	2,518	2,813	3,138	3,498	3,896	4,335	4,818	5,350	5,936	6,580	7,288	8,064	8,916
13	1,138	1,294	1,469	1,665	1,886	2,133	2,410	2,720	3,066	3,452	3,883	4,363	4,898	5,492	6,153	6,886	7,699	8,599	9,596	10,699
14	1,149	1,319	1,513	1,732	1,980	2,261	2,579	2,937	3,342	3,797	4,310	4,887	5,535	6,261	7,076	7,988	9,007	10,147	11,420	12,839
15	1,161	1,346	1,558	1,801	2,079	2,397	2,759	3,172	3,642	4,177	4,785	5,474	6,254	7,138	8,137	9,266	10,539	11,974	13,590	15,407
16	1,173	1,373	1,605	1,873	2,183	2,540	2,952	3,426	3,970	4,595	5,311	6,130	7,067	8,137	9,358	10,748	12,330	14,129	16,172	18,488
17	1,184	1,400	1,653	1,948	2,292	2,693	3,159	3,700	4,328	5,054	5,895	6,866	7,986	9,276	10,761	12,468	14,426	16,672	19,244	22,186
18	1,196	1,428	1,702	2,026	2,407	2,854	3,380	3,996	4,717	5,560	6,544	7,690	9,024	10,575	12,375	14,463	16,879	19,673	22,901	26,623
19	1,208	1,457	1,754	2,107	2,527	3,026	3,617	4,316	5,142	6,116	7,263	8,613	10,197	12,056	14,232	16,777	19,748	23,214	27,252	31,948
20	1,220	1,486	1,806	2,191	2,653	3,207	3,870	4,661	5,604	6,727	8,062	9,646	11,523	13,743	16,367	19,461	23,106	27,393	32,429	38,338
ΠΙΝΑΚΑΣ Π.2. ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣ ΑΞΙΑΣ ΜΙΑΣ ΜΟΝΑΔΑΣ ΜΕΤΑ ΑΠΟ Ν ΠΕΡΙΟΔΟΥΣ (ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣ ΑΞΙΑΣ -ΣΠΑ) , 1 / (1+i) ⁿ																				
Εκτοκιστικές Περίοδοι	Επιτόκια Εκτοκιστικής Περιόδου																			
	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%
1	0,990	0,980	0,971	0,962	0,952	0,943	0,935	0,926	0,917	0,909	0,901	0,893	0,885	0,877	0,870	0,862	0,855	0,847	0,840	0,833
2	0,980	0,961	0,943	0,925	0,907	0,890	0,873	0,857	0,842	0,826	0,812	0,797	0,783	0,769	0,756	0,743	0,731	0,718	0,706	0,694
3	0,971	0,942	0,915	0,889	0,864	0,840	0,816	0,794	0,772	0,751	0,731	0,712	0,693	0,675	0,658	0,641	0,624	0,609	0,593	0,579
4	0,961	0,924	0,888	0,855	0,823	0,792	0,763	0,735	0,708	0,683	0,659	0,636	0,613	0,592	0,572	0,552	0,534	0,516	0,499	0,482
5	0,951	0,906	0,863	0,822	0,784	0,747	0,713	0,681	0,650	0,621	0,593	0,567	0,543	0,519	0,497	0,476	0,456	0,437	0,419	0,402
6	0,942	0,888	0,837	0,790	0,746	0,705	0,666	0,630	0,596	0,564	0,535	0,507	0,480	0,456	0,432	0,410	0,390	0,370	0,352	0,335
7	0,933	0,871	0,813	0,760	0,711	0,665	0,623	0,583	0,547	0,513	0,482	0,452	0,425	0,400	0,376	0,354	0,333	0,314	0,296	0,279
8	0,923	0,853	0,789	0,731	0,677	0,627	0,582	0,540	0,502	0,467	0,434	0,404	0,376	0,351	0,327	0,305	0,285	0,266	0,249	0,233
9	0,914	0,837	0,766	0,703	0,645	0,592	0,544	0,500	0,460	0,424	0,391	0,361	0,333	0,308	0,284	0,263	0,243	0,225	0,209	0,194
10	0,905	0,820	0,744	0,676	0,614	0,558	0,508	0,463	0,422	0,386	0,352	0,322	0,295	0,270	0,247	0,227	0,208	0,191	0,176	0,162
11	0,896	0,804	0,722	0,650	0,585	0,527	0,475	0,429	0,388	0,350	0,317	0,287	0,261	0,237	0,215	0,195	0,178	0,162	0,148	0,135
12	0,887	0,788	0,701	0,625	0,557	0,497	0,444	0,397	0,356	0,319	0,286	0,257	0,231	0,208	0,187	0,168	0,152	0,137	0,124	0,112
13	0,879	0,773	0,681	0,601	0,530	0,469	0,415	0,368	0,326	0,290	0,258	0,229	0,204	0,182	0,163	0,145	0,130	0,116	0,104	0,093
14	0,870	0,758	0,661	0,577	0,505	0,442	0,388	0,340	0,299	0,263	0,232	0,205	0,181	0,160	0,141	0,125	0,111	0,099	0,088	0,078
15	0,861	0,743	0,642	0,555	0,481	0,417	0,362	0,315	0,275	0,239	0,209	0,183	0,160	0,140	0,123	0,108	0,095	0,084	0,074	0,065
16	0,853	0,728	0,623	0,534	0,458	0,394	0,339	0,292	0,252	0,218	0,188	0,163	0,141	0,123	0,107	0,093	0,081	0,071	0,062	0,054
17	0,844	0,714	0,605	0,513	0,436	0,371	0,317	0,270	0,231	0,198	0,170	0,146	0,125	0,108	0,093	0,080	0,069	0,060	0,052	0,045
18	0,836	0,700	0,587	0,494	0,416	0,350	0,296	0,250	0,212	0,180	0,153	0,130	0,111	0,095	0,081	0,069	0,059	0,051	0,044	0,038
19	0,828	0,686	0,570	0,475	0,396	0,331	0,277	0,232	0,194	0,164	0,138	0,116	0,098	0,083	0,070	0,060	0,051	0,043	0,037	0,031
20	0,820	0,673	0,554	0,456	0,377	0,312	0,258	0,215	0,178	0,149	0,124	0,104	0,087	0,073	0,061	0,051	0,043	0,037	0,031	0,026

3.

Παραδείγματα Κατανόησης

Παράδειγμα 1.

Αν η αρχική κατάθεση σε μία Τράπεζα ανέρχεται σε € 18.000, να υπολογίσετε το ποσό που θα έχετε συγκεντρώσει σε κάθε μία περίπτωση μετά από συγκριμένα έτη και για διαφορετικά ετήσια επιτόκια

Παρούσα Αξία (Π.Α.)	Ετήσιο επιτόκιο	Ετη	Υπολογισμός Μέλλουσας Αξίας (Μ.Α.) με χρήση του Πίνακα Π.1.
€ 18.000	8%	7	$18.000 \times (1+8\%)^7 = 18.000 \times \Sigma\text{ΜΑ}(8\%,7) = 18.000 \times 1,714$ € 30.848,8
	12%	4	$18.000 \times (1+12\%)^4 = 18.000 \times \Sigma\text{ΜΑ}(12\%,4) = 18.000 \times 1,574$ € 28.323,3
	5%	12	$18.000 \times (1+5\%)^{12} = 18.000 \times \Sigma\text{ΜΑ}(5\%,12) = 18.000 \times 1,796$ € 32.325,4

Παράδειγμα 2.

Στο τέλος του 2040 λήγει ένα επενδυτικό πρόγραμμα στο οποίο θα λάβετε €50.000, και το οποίο δημιουργήθηκε από μία αρχική κατάθεση με ετήσια εγγυημένη απόδοση. Να υπολογίσετε το ποσό που θα λάβετε αν το προεξοφλούσατε, για διαφορετικές ετήσιες εγγυημένες αποδόσεις σε διαφορετικές χρονικές στιγμές πριν τη λήξη.

Μέλλουσα Αξία (Μ.Α.)	Ετήσιο επιτόκιο	Ετη έως 2040	Υπολογισμός Παρούσας Αξίας (Π.Α.) με χρήση του Πίνακα Π.2.
€ 50.000	5%	20	$50.000 / (1+5\%)^{20} = 50.000 \times \Sigma\text{ΠΑ}(5\%,20) = 50.000 \times 0,377$ € 18.844,5
	11%	15	$50.000 / (1+11\%)^{15} = 50.000 \times \Sigma\text{ΠΑ}(11\%,15) = 50.000 \times 0,209$ € 10.450,2
	9%	9	$50.000 / (1+9\%)^9 = 50.000 \times \Sigma\text{ΠΑ}(9\%,9) = 50.000 \times 0,460$ € 23.021,4

4. ΜΕΛΛΟΥΣΑ (Μ.Α.Ρ.) και ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ (Π.Α.Ρ.) σειράς πληρωμών - ΡΑΝΤΑΣ

Note Pad...

Στην περίπτωση αυτή καλούμαστε να υπολογίσουμε την Μέλλουσα ή Παρούσα Αξία, επαναλαμβανόμενων καταβολών ή εισπράξεων. Η σειρά πληρωμών που δημιουργείται από ένα σταθερό ποσό το οποίο επαναλαμβάνεται εντός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος, ονομάζεται **ράντα και το σταθερό ποσό αυτό, όρος της ράντας (Α)**. Στην περίπτωση μας θεωρούμε ότι οι Ράντες είναι Ληξιπρόθεσμες, (η καταβολή – είσπραξη του σταθερού ποσού - όρος της ράντας Α πραγματοποιείται στο τέλος κάθε εκτοκιστικής περιόδου).

Αναγωγή σειράς Πληρωμών στο Μέλλον (Μέλλουσα Αξία Ράντας-Μ.Α.Ρ.)

$$\text{Μ.Α.Ρ.} = A \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \quad \text{όπου } \frac{(1+i)^n - 1}{i} \text{ ο συντελεστής Σ.Μ.Α.Ρ. – Πίνακας Π.3.}$$

Πόσα χρήματα θα συγκεντρωθούν στο τέλος της 8ετίας αν κάνετε 50ΕΥΡΩ κατάθεση στο τέλος κάθε έτους με $i=7\%$ → $\text{Μ.Α.} = 50 \times \left[\frac{(1+7\%)^8 - 1}{7\%} \right] = €512,99$

Αναγωγή μελλοντικής σειράς πληρωμών στο σήμερα (Παρούσα Αξία Ράντας Π.Α.Ρ.)

$$\text{Π.Α.Ρ.} = A \times \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} \right] \quad \text{όπου } \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} \right] \text{ ο συντελεστής Σ.Π.Α.Ρ. – Πίνακας Π. 4.}$$

Ποιο είναι το ποσό που θα καταβάλατε σήμερα προκαταβολικά ώστε να αντιστοιχεί στο σύνολο των ετήσιων ενοικίων ύψους 2.500ΕΥΡΩ/έτος το καθένα, που θα πληρώνατε για τα επόμενα 12 έτη, αν το ετήσιο επιτόκιο προεξόφλησής είναι 4% → $\text{Π.Α.Ρ.} = 2.500 \times \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+4\%)^{12}}}{4\%} \right] = €23.462,5$

Σημαντική Διευκρίνιση:

Η περίοδος εκτοκισμού (n) θα πρέπει να έχει την ίδια χρονική βάση αναφοράς με το επιτόκιο και την ίδια χρονική βάση αναφοράς που γίνεται η καταβολή ή είσπραξη.

Π.χ.... καταβολή 100ΕΥΡΩ το μήνα με μηνιαίο επιτόκιο 6% για 23 μήνες

.....καταβολή 1.200 ΕΥΡΩ στο τέλος κάθε έτους με ετήσιο επιτόκιο 9% για 5 έτη.

5. Πίνακες
Συντελεστών
ΜΕΛΛΟΥΣΑΣ
(ΣΜΑΡ) και
ΠΑΡΟΥΣΑΣ Αξίας
Ράντας (ΣΠΑΡ)

Note Pad...

ΠΙΝΑΚΑΣ Π.3. ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΜΕΛΛΟΥΣΑΣ ΑΞΙΑΣ ΜΙΑΣ ΜΟΝΑΔΑΣ ΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΗΣ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΚΑΘΕ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΓΙΑ Ν ΠΕΡΙΟΔΟΥΣ (ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΑΞΙΑΣ ΡΑΝΤΑΣ -ΣΜΑΡ) - [(1+i) ^ν -1] / i																				
Επιτόκια Εκτοκιστικής Περίοδου																				
Εκτοκιστικές Περίοδοι	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2	2,010	2,020	2,030	2,040	2,050	2,060	2,070	2,080	2,090	2,100	2,110	2,120	2,130	2,140	2,150	2,160	2,170	2,180	2,190	2,200
3	3,030	3,060	3,091	3,122	3,153	3,184	3,215	3,246	3,278	3,310	3,342	3,374	3,407	3,440	3,473	3,506	3,539	3,572	3,606	3,640
4	4,060	4,122	4,184	4,246	4,310	4,375	4,440	4,506	4,573	4,641	4,710	4,779	4,850	4,921	4,993	5,066	5,141	5,215	5,291	5,368
5	5,101	5,204	5,309	5,416	5,526	5,637	5,751	5,867	5,985	6,105	6,228	6,353	6,480	6,610	6,742	6,877	7,014	7,154	7,297	7,442
6	6,152	6,308	6,468	6,633	6,802	6,975	7,153	7,336	7,523	7,716	7,913	8,115	8,323	8,536	8,754	8,977	9,207	9,442	9,683	9,930
7	7,214	7,434	7,662	7,898	8,142	8,394	8,654	8,923	9,200	9,487	9,783	10,089	10,405	10,730	11,067	11,414	11,772	12,142	12,523	12,916
8	8,286	8,583	8,892	9,214	9,549	9,897	10,260	10,637	11,028	11,436	11,859	12,300	12,757	13,233	13,727	14,240	14,773	15,327	15,902	16,499
9	9,369	9,755	10,159	10,583	11,027	11,491	11,978	12,488	13,021	13,579	14,164	14,776	15,416	16,085	16,786	17,519	18,285	19,086	19,923	20,799
10	10,462	10,950	11,464	12,006	12,578	13,181	13,816	14,487	15,193	15,937	16,722	17,549	18,420	19,337	20,304	21,321	22,393	23,521	24,709	25,959
11	11,567	12,169	12,808	13,486	14,207	14,972	15,784	16,645	17,560	18,531	19,561	20,655	21,814	23,045	24,349	25,733	27,200	28,755	30,404	32,150
12	12,683	13,412	14,192	15,026	15,917	16,870	17,888	18,977	20,141	21,384	22,713	24,133	25,650	27,271	29,002	30,850	32,824	34,931	37,180	39,581
13	13,809	14,680	15,618	16,627	17,713	18,882	20,141	21,495	22,953	24,523	26,212	28,029	29,985	32,089	34,352	36,786	39,404	42,219	45,244	48,497
14	14,947	15,974	17,086	18,292	19,599	21,015	22,550	24,215	26,019	27,975	30,095	32,393	34,883	37,581	40,505	43,672	47,103	50,818	54,841	59,196
15	16,097	17,293	18,599	20,024	21,579	23,276	25,129	27,152	29,361	31,772	34,405	37,280	40,417	43,842	47,580	51,660	56,110	60,965	66,261	72,035
16	17,258	18,639	20,157	21,825	23,657	25,673	27,888	30,324	33,003	35,950	39,190	42,753	46,672	50,980	55,717	60,925	66,649	72,939	79,850	87,442
17	18,430	20,012	21,762	23,698	25,840	28,213	30,840	33,750	36,974	40,545	44,501	48,884	53,739	59,118	65,075	71,673	78,979	87,068	96,022	105,931
18	19,615	21,412	23,414	25,645	28,132	30,906	33,999	37,450	41,301	45,599	50,396	55,750	61,725	68,394	75,836	84,141	93,406	103,740	115,266	128,117
19	20,811	22,841	25,117	27,671	30,539	33,760	37,379	41,446	46,018	51,159	56,939	63,440	70,749	78,969	88,212	98,603	110,285	123,414	138,166	154,740
20	22,019	24,297	26,870	29,778	33,066	36,786	40,995	45,762	51,160	57,275	64,203	72,052	80,947	91,025	102,444	115,380	130,033	146,628	165,418	186,688
ΠΙΝΑΚΑΣ Π.4. ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΑΞΙΑΣ ΜΙΑΣ ΜΟΝΑΔΑΣ ΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΗΣ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΚΑΘΕ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΓΙΑ Ν ΠΕΡΙΟΔΟΥΣ (ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΑΞΙΑΣ ΡΑΝΤΑΣ -ΣΠΑΡ) - [1-1/(1+i) ^ν] / i																				
Επιτόκια Εκτοκιστικής Περίοδου																				
Εκτοκιστικές Περίοδοι	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%
1	0,990	0,980	0,971	0,962	0,952	0,943	0,935	0,926	0,917	0,909	0,901	0,893	0,885	0,877	0,870	0,862	0,855	0,847	0,840	0,833
2	1,970	1,942	1,913	1,886	1,859	1,833	1,808	1,783	1,759	1,736	1,713	1,690	1,668	1,647	1,626	1,605	1,585	1,566	1,547	1,528
3	2,941	2,884	2,829	2,775	2,723	2,673	2,624	2,577	2,531	2,487	2,444	2,402	2,361	2,322	2,283	2,246	2,210	2,174	2,140	2,106
4	3,902	3,808	3,717	3,630	3,546	3,465	3,387	3,312	3,240	3,170	3,102	3,037	2,974	2,914	2,855	2,798	2,743	2,690	2,639	2,589
5	4,853	4,713	4,580	4,452	4,329	4,212	4,100	3,993	3,890	3,791	3,696	3,605	3,517	3,433	3,352	3,274	3,199	3,127	3,058	2,991
6	5,795	5,601	5,417	5,242	5,076	4,917	4,767	4,623	4,486	4,355	4,231	4,111	3,998	3,889	3,784	3,685	3,589	3,498	3,410	3,326
7	6,728	6,472	6,230	6,002	5,786	5,582	5,389	5,206	5,033	4,868	4,712	4,564	4,423	4,288	4,160	4,039	3,922	3,812	3,706	3,605
8	7,652	7,325	7,020	6,733	6,463	6,210	5,971	5,747	5,535	5,335	5,146	4,968	4,799	4,639	4,487	4,344	4,207	4,078	3,954	3,837
9	8,566	8,162	7,786	7,435	7,108	6,802	6,515	6,247	5,995	5,759	5,537	5,328	5,132	4,946	4,772	4,607	4,451	4,303	4,163	4,031
10	9,471	8,983	8,530	8,111	7,722	7,360	7,024	6,710	6,418	6,145	5,889	5,650	5,426	5,216	5,019	4,833	4,659	4,494	4,339	4,192
11	10,368	9,787	9,253	8,760	8,306	7,887	7,499	7,139	6,805	6,495	6,207	5,938	5,687	5,453	5,234	5,029	4,836	4,656	4,486	4,327
12	11,255	10,575	9,954	9,385	8,863	8,384	7,943	7,536	7,161	6,814	6,492	6,194	5,918	5,660	5,421	5,197	4,988	4,793	4,611	4,439
13	12,134	11,348	10,635	9,986	9,394	8,853	8,358	7,904	7,487	7,103	6,750	6,424	6,122	5,842	5,583	5,342	5,118	4,910	4,715	4,533
14	13,004	12,106	11,296	10,563	9,899	9,295	8,745	8,244	7,786	7,367	6,982	6,628	6,302	6,002	5,724	5,468	5,229	5,008	4,802	4,611
15	13,865	12,849	11,938	11,118	10,380	9,712	9,108	8,559	8,061	7,606	7,191	6,811	6,462	6,142	5,847	5,575	5,324	5,092	4,876	4,675
16	14,718	13,578	12,561	11,652	10,838	10,106	9,447	8,851	8,313	7,824	7,379	6,974	6,604	6,265	5,954	5,668	5,405	5,162	4,938	4,730
17	15,562	14,292	13,166	12,166	11,274	10,477	9,763	9,122	8,544	8,022	7,549	7,120	6,729	6,373	6,047	5,749	5,475	5,222	4,990	4,775
18	16,398	14,992	13,754	12,659	11,690	10,828	10,059	9,372	8,756	8,201	7,702	7,250	6,840	6,467	6,128	5,818	5,534	5,273	5,033	4,812
19	17,226	15,678	14,324	13,134	12,085	11,158	10,336	9,604	8,950	8,365	7,839	7,366	6,938	6,550	6,198	5,877	5,584	5,316	5,070	4,843
20	18,046	16,351	14,877	13,590	12,462	11,470	10,594	9,818	9,129	8,514	7,963	7,469	7,025	6,623	6,259	5,929	5,628	5,353	5,101	4,870

Παράδειγμα 3.

Να υπολογίσετε το τελικό ποσό το οποίο θα λάβετε, αν καταθέσετε στο τέλος κάθε εξαμήνου, το ποσό των 900ΕΥΡΩ σε ένα αποταμιευτικό πρόγραμμα, για διαφορετικό αριθμό ετών και με διαφορετικά ετήσια επιτόκια.

Ορος Ράντας (Α)	Ετήσιο επιτόκιο	Μηνιαίο επιτόκιο (=ΕΕ/2)	Αριθμός μηνιαίων καταβολών	Μελλοντική Αξία Ράντας (ΜΑΡ) με χρήση του Πίνακα (Π.3.)	
€ 900	6%	3%	14	$900 \times [(1+3\%)^{14} - 1] / 3\% =$	$900 \times \Sigma\text{ΜΑΡ}(3\%,14) = 900 \times 17,086$ € 15.377,7
	10%	5%	11	$900 \times [(1+5\%)^{11} - 1] / 5\% =$	$900 \times \Sigma\text{ΜΑΡ}(5\%,11) = 900 \times 14,207$ € 12.786,1
	16%	8%	7	$900 \times [(1+8\%)^7 - 1] / 8\% =$	$900 \times \Sigma\text{ΜΑΡ}(8\%,7) = 900 \times 8,923$ € 8.030,5

Θεωρούμε ότι η περίοδος κεφαλαιοποίησης είναι το 6μηνο

Παράδειγμα 4.

Στο τέλος κάθε μήνα πληρώνεται στην Τράπεζα μηνιαίες δόσεις για 3 διαφορετικά καταναλωτικά δάνεια, διαφορετικού επιτοκίου και διαφορετικής χρονικής διάρκειας. Να υπολογίσετε το ποσό το οποίο θα καταβάλετε σήμερα για την πλήρη εξόφληση του κάθε δανείου.

Ορος Ράντας (Α)	Ετήσιο επιτόκιο (ΕΕ)	Μηνιαίο επιτόκιο (=ΕΕ/12)	Αριθμός μηνιαίων πληρωμών που απομένουν	Παρούσα Αξία Ράντας (ΠΑΡ) με χρήση του Πίνακα Π.4.	
€ 850	12%	1%	14	$850 \times [1-1/(1+1\%)^{14}] / 1\% =$	$850 \times \Sigma\text{ΠΑΡ}(1\%,14) = 850 \times 13,004$ € 11.053,1
€ 420	24%	2%	19	$420 \times [1-1/(1+2\%)^{19}] / 2\% =$	$420 \times \Sigma\text{ΠΑΡ}(2\%,19) = 420 \times 15,678$ € 6.585,0
€ 710	36%	3%	17	$710 \times [1-1/(1+3\%)^{17}] / 3\% =$	$710 \times \Sigma\text{ΠΑΡ}(3\%,17) = 710 \times 13,166$ € 9.347,9

Θεωρούμε ότι η περίοδος κεφαλαιοποίησης είναι ο μήνας

7. ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ σειράς πληρωμών – ΡΑΝΤΑΣ ΣΤΟ ΔΙΗΝΕΚΕΣ

Οι προηγούμενοι τύποι αφορούν σε σειρές πληρωμών με πεπερασμένη χρονική διάρκεια. Όταν όμως οι πληρωμές / καταβολές δεν έχουν ορισμένη χρονική διάρκεια αλλά συνεχίζουν επ'άπειρον (στο διηνεκές), τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την Παρούσα Αξία μίας τέτοιας Ράντας στο Διηνεκές (Π.Α.Ρ.Δ.), διακρίνοντας 2 περιπτώσεις

A. Περίπτωση

Αν η πληρωμή που γίνεται επαναλαμβανόμενα δεν μεταβάλλεται

$$\text{Π.Α.Ρ.Δ.} = \frac{A}{i}$$

Παράδειγμα 5. Η σύνταξη σας (η οποία μεταφέρεται κληρονομικά και σε όλες τις επόμενες γενεές) είναι 1.200ΕΥΡΩ/μήνα. Να υπολογίσετε το ποσό με το οποίο θα ανταλλάσσατε το δικαίωμα αυτό σήμερα, αν το μηναίο επιτόκιο προεξόφλησης είναι 2%

$$\rightarrow \text{Π.Α.Ρ.Δ.} = \frac{1.200}{2\%} = \text{€}60.000$$

B. Περίπτωση

Αν η πληρωμή / καταβολή αυξάνεται ετησίως με σταθερό ρυθμό (g)

$$\text{Π.Α.Ρ.Δ.} = \frac{A}{i-g}$$

Παράδειγμα 6. Να υπολογίσετε την Παρούσα Αξία Ράντας στο διηνεκές (Π.Α.Ρ.Δ.) του προηγούμενου παραδείγματος, αν θεωρήσουμε ότι η σύνταξη αυξάνεται με ετήσιο ρυθμό 3%.

$$\rightarrow \text{Π.Α.Ρ.Δ.} = \frac{1.200 \times 12}{2\% \times 12 - 3\%} = \frac{24.000}{24\% - 3\%} = \text{€}114.285,7$$

Απορία ?

Ποια είναι η Μέλλουσα Αξία Ράντας στο Διηνεκές??

8.

Ασκήσεις Ανακεφαλαίωσης Στη Διαχρονική Αξία Χρήματος

Note Pad...

Άσκηση1. Σε πόσα έτη θα διπλασιάσω ένα ποσό €12.000, αν το καταθέσω σε ένα αποταμιευτικό λογαριασμό με ετήσιο επιτόκιο 8% (και εκτοκιστική περίοδο το έτος).

$M.A. = P.A \times (1+i)^n \rightarrow 2 \times P.A. = P.A. \times (1+8\%)^n \rightarrow 2 = (1+8\%)^n \rightarrow \ln 2 = n \times \ln (1+8\%) \rightarrow n = \ln 2 / \ln 1.08 \rightarrow n = 9$ έτη
Εναλλακτικά,

Μπορούμε προσεγγιστικά να λύσουμε την άσκηση μέσω της χρήσης του πίνακα Π.1. βρίσκοντας στην οριζόντια γραμμή το επιτόκιο 8%, σαρώνουμε κάθετα τη στήλη αυτή έως ότου συναντήσουμε την τιμή του Σ.Α. =2 ($2 = (1+8\%)^n$). Παρατηρούμε ότι η τιμή του Σ.Α. 2, βρίσκεται οριακά στις 9 εκτοκιστικές περιόδους.

Άσκηση2. Ένας αναλυτής υποστηρίζει ότι αν καταθέσετε €30.000 σε ένα πρόγραμμα σήμερα, μπορείτε

α) είτε να λάβετε εφάπαξ €45.500 μετά από 4 έτη

β) είτε να λαμβάνετε €9.900 στο τέλος κάθε έτους για τα επόμενα 4 έτη.

Αν οι ετήσιες αποδόσεις αντίστοιχων προγραμμάτων είναι 10%, ποια από τις 2 εναλλακτικές θα επιλέγατε.
(περίοδος κεφαλαιοποίησης είναι το έτος)

1ος τρόπος. Υπολογίζω τις Π.Α. κάθε εναλλακτικής βάσει αποδόσεων των αντίστοιχων προγραμμάτων στην αγορά

-η Παρούσα Αξία των €45.500 είναι $P.A = €45.500 \times \Sigma\text{ΠΑ}(4,10\%) = 45.500 \times 0,683 = €31.077$

-η Παρούσα Αξία της Ράντας είναι $P.A.P = €9.900 \times \Sigma\text{ΠΑΡ}(4,10\%) = €9.900 \times 3,170 = €31.381,7$

Διαπιστώνω ότι η πρόταση των ετήσιων καταβολών (β) είναι καλύτερη από την (α), αφού θα εισπράττω το ποσό των €9.900 κάθε έτος, καταβάλλοντας πολύ λιγότερα χρήματα σήμερα (30.000) από το ποσό των €31.381,7 ή από το €31.077 που θα έπρεπε με βάση τα δεδομένα της αγοράς.

2ος. Τρόπος. Εξετάζω την ετήσια απόδοση που υπονοεί η κάθε εναλλακτική.

- Η επένδυση των €30.000 σήμερα που αποδίδει €45.500 μετά από 4 έτη, έχει ετήσια απόδοση $M.A. = P.A. \times \Sigma\text{Α}(X\%,4) \rightarrow €45.500 = €30.000 \times \Sigma\text{Α}(X\%,4) \rightarrow \Sigma\text{Α}(X\%,4) = €45.500 / €30.000 = 1,517$. Από τον Πίνακα Π.1.

αναζητούμε το επιτόκιο της εκτοκιστικής περιόδου (ετήσια απόδοση) που για 4 περιόδους έχει Σ.Α. = 1,517 και βρίσκω το **11%**

- Υπολογίζω την απόδοση που υπονοείται από τη 2^η εναλλακτική μέσα από τον τύπο της Παρούσας Αξίας Ράντας, $P.A.P = A \times \Sigma\text{ΠΑΡ}(X\%,4) \rightarrow 30.000 = 9.900 \times \Sigma\text{ΠΑΡ}(X\%,4) \rightarrow \Sigma\text{ΠΑΡ}(X\%,4) = 30.000 / 9.900 = 3,034$. Από τον Πίνακα Π.4. (που δίνεται ο ΣΠΑΡ) αναζητούμε το επιτόκιο (ετήσια απόδοση) που για 4 περιόδους έχει Σ.Π.Α.Ρ. = 3,034 και βρίσκω ότι η απόδοση είναι σχεδόν 12%. Άρα και με το 2^ο τρόπο επιλέγω την εναλλακτική (β), αφού η ετήσια απόδοση είναι υψηλότερη

Άσκηση 3.1. Το σύνολο των ασφαλιστικών εισφορών που έχει συγκεντρωθεί όλα αυτά τα χρόνια από 500.000 εργαζόμενους και τις οποίες διαχειρίζονται το Υπουργείο Εργασίας, προκειμένου την πληρωμή συντάξεων είναι €45δισ. Αν το προσδόκιμο όλων των εργαζόμενων που βγαίνουν σε σύνταξη είναι 20 έτη να υπολογίσετε το μέσο ύψος της ετήσιας σύνταξης ανά άτομο. Το επιτόκιο προεξόφλησης είναι 6% και η περίοδος κεφαλαιοποίησης ετήσια.

Το ύψος των €45δισ είναι η Παρούσα Αξία μίας Ράντας καταβλητέα στο τέλος κάθε έτους για 20 έτη. Αναζητούμε τον όρο της Ράντας -----> Π.Α.Ρ. = A * ΣΠΑΡ (6%,20) ----> €45.000.000.000 = A * 11,470 --> A= €45.000.000.000 / 11,470 = €3.923.305.064
Άρα η μέση ετήσια σύνταξη για κάθε εργαζόμενο θα είναι €3.923.305.064 / 500.000 = €7.846,61

Άσκηση 3.2. Να απαντήσετε στο ίδιο ερώτημα αν το Υπουργείο Εργασίας θέλει να κρατήσει ένα απόθεμα στο τέλος της 20ετίας ύψους €3δισ.

$$45\text{δισ} = A \times \text{ΣΠΑΡ}(6\%, 20) + \frac{3\text{δισ}}{(1+6\%)^{20}} \Leftrightarrow €45\text{δισ} = A \times 11,470 + 3\text{δισ} * 0,312 \Leftrightarrow A = \frac{45\text{δισ} - 3\text{δισ} * 0,312}{3,326} = €3.841.700.319$$

Άρα η μέση ετήσια σύνταξη για κάθε εργαζόμενο θα είναι €3.841.700.319 / 500.000 = €7.683,40

Άσκηση 4. Ο Κος. Λαζάρου έχει συγκεντρώσει το ποσό των 20.000€ και το καταθέτει σε μία τράπεζα με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 12%, ώστε να χρηματοδοτήσει τις μεταπτυχιακές σπουδές της κόρης του.

Α). Πόσα λεφτά πρέπει να παίρνει κάθε 6μήνο για τους επόμενους 18 μήνες (που θα διαρκέσουν οι σπουδές της ώστε να επαρκέσει (και εξαντληθεί) το αρχικό κεφάλαιο για την κάλυψη των σπουδαστικών της αναγκών.

Β). Στο παραπάνω παράδειγμα να υπολογίσετε το ποσό της ανάληψης, στη περίπτωση όπου η φοιτήτρια σχεδίαζε στο τέλος των σπουδών να διατηρήσει ένα υπόλοιπο στο λογαριασμό της, ύψους 1.500€.

	0	1	2	3
	€ 20.000	€ 0	€ 0	€ 0
	ΠΑΡ	A	A	A
Ερώτηση Α.	Π.Α.Ρ. = A * ΣΠΑΡ (3,6%) --> A= ΠΑΡ / ΣΠΑΡ(3,6%) A = 20.000 / 2,673 --> A = € 7.482			
Ερώτηση Β.	0	1	2	3
	20.000 €	A	A	A
	Π.Α.Ρ.			€ 1.500
Π.Α.Ρ. = A * ΣΠΑΡ (3, 6%) + 1.500*ΣΠ(3,6%)				
20.000 = A*2,673 + 1.500*0,840 -->				
A=(20.000-1.500*0,840) / 2,673--> A= 7.011 €				

Ο Πίνακας Ανάλυσης Δανείων αφορά στον τρόπο αποπληρωμής δανείων που λαμβάνουμε σήμερα εφάπαξ, μέσα από μελλοντικές πληρωμές και τον από επιμερισμό τους σε τόκους και κεφάλαιο

Περίοδος	Αρχικό Ποσό Περιόδου	Δόση-τοκοχρεολύσιο	Τόκοι	Χρεολύσιο	Υπόλοιπο Κεφαλαίου
1	A	$B = \Gamma + \Delta$	$\Gamma = A \times \text{επιτόκιο}$	$\Delta = B - \Gamma$	$E = A - \Delta$
2	E	$B.1. = \Gamma.1. + \Delta.1.$	$\Gamma.1. = E \times \text{επιτόκιο}$	$\Delta.1. = B.1. - \Gamma.1.$	$E.1. = E - \Delta.1.$
...	Z		...	...	...
N			...	...	0

Όπου :

Αρχικό Ποσό Περιόδου είναι το ποσό του δανείου (του αρχικού κεφαλαίου που δανείστηκα) και οφείλω στο τέλος κάθε περιόδου.

Δόση, είναι το ύψος της καταβολής η οποία αποτελείται από Τόκους και Χρεολύσια ΔΟΣΗ = ΤΟΚΟΣ +ΧΡΕΩΛΥΣΙΟ

Οι τόκοι υπολογίζονται επί του συνολικού κεφαλαίου (αρχικού ποσό) που έχω δεσμεύσει μεταξύ δύο περιόδων καταβολής των δόσεων

Χρεολύσιο, είναι το ποσό το οποίο αφορά στην τμηματική εξόφληση του κεφαλαίου που έχω δανεισθεί (δεν περιλαμβάνει τόκους)

Υπόλοιπο Κεφαλαίου είναι το ποσό του δανείου το οποίο οφείλω μετά την καταβολή της δόσης και προκύπτει από τη διαφορά μεταξύ του αρχικού ποσού και του Χρεολυσίου. Είναι προφανές ότι το υπόλοιπο κεφαλαίου στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου ισούται με το αρχικό ποσό της επόμενης περιόδου.

Σημαντική Διευκρίνιση:
Η περίοδος αφορά στο τέλος κάθε χρονικής στιγμής.
Στο παράδειγμα που η περίοδος είναι έτος, η 1^η περίοδος είναι το τέλος του 1^{ου} έτους, στην αρχή του οποίου έλαβα το Δάνειο ύψους A.

Παράδειγμα 9. Έστω ότι δανείτε ποσό € 6.000 από μία Τράπεζα με ετήσιο επιτόκιο 8%. Το αρχικό ποσό θα πρέπει να το επιστρέψετε σε 3 ισόποσες ετήσιες δόσεις, ενώ στην καταβολή κάθε ετήσιας δόσης θα πρέπει να επιστρέψετε και τους αναλογούντες τόκους.
Ζητείται να σχεδιάσετε τον Πίνακα Ανάλυσης Δανείου

Ετος	Αρχικό Ποσό	Δόση-Τοκοχρεωλύσιο	Τόκοι	Χρεολύσιο	Υπόλοιπο Κεφαλαίου
1	<u>6.000</u>	$2.000 + 480 = \underline{2.480}$	$6.000 * 8\% = \underline{480}$	$6.000 / 3 = \underline{2.000}$	$6.000 - 2.000 = \underline{4.000}$
2	<u>4.000</u>	$2.000 + 320 = \underline{2.320}$	$4.000 * 8\% = \underline{320}$	$6.000 / 3 = \underline{2.000}$	$4.000 - 2.000 = \underline{2.000}$
3	<u>2.000</u>	$2.000 + 160 = \underline{2.160}$	$2.000 * 8\% = \underline{160}$	$6.000 / 3 = \underline{2.000}$	$2.000 - 2.000 = \underline{0}$

10.

Δάνεια Σταθερού Χρεολυσίου

Note Pad...

Δάνεια ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΧΡΕΩΛΥΣΙΟΥ

Ο Πίνακα Ανάλυσης Δανείου, καταρτίζεται διαιρώντας το ποσό Δανείου με τον αριθμό περιόδων (που αφορούν στη διάρκεια εξόφλησης) και υπολογίζουμε το Χρεολύσιο που είναι σταθερό κάθε έτος.

Παράδειγμα 10. Σχεδιάστε τον Πίνακα Ανάλυσης για εξόφληση αρχικού Δανείου ύψους 40.000ΕΥΡΩ, με ετήσιο επιτόκιο 6%, διάρκεια 5 έτη και καταβολές δόσεων στο τέλος κάθε έτους



Ποσό Δανείου	40.000 €	
Επιτόκιο	6%	A
Διάρκεια Αποπληρωμής-έτη	5	
ΣΤΑΘΕΡΟ ΧΡΕΩΛΥΣΙΟ	8.000 €	

Περίοδος	Ποσό Αρχής	Δόση	Τόκοι	Χρεωλύσια	Υπόλοιπο
1	40.000	10.400	2.400	8.000	32.000
2	32.000	9.920	1.920	8.000	24.000
3	24.000	9.440	1.440	8.000	16.000
4	16.000	8.960	960	8.000	8.000
5	8.000	8.480	480	8.000	0

10.1. Να υπολογίσετε το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει ο δανειολήπτης (οφειλέτης), στην περίπτωση που επιθυμεί να αποπληρώσει το Δάνειο στο τέλος του 3ου έτους

- Αν θεωρήσουμε ότι έχει καταβληθεί η Δόση τέλος 3^{ου} έτους = 16.000 (είναι το Υπόλοιπο που οφείλει από το αρχικό κεφάλαιο)
- Πριν την καταβολή της Δόσης = 16.000+ 9.440 (το υπόλοιπο από από το αρχικό κεφάλαιο και η δόση της 3^{ης} περιόδου) ή = 24.000 + 1.440 (ή το σύνολο του κεφαλαίου από τη προηγούμενη δόση συν δεδουλευμένους τόκους της 3^{ης} περιόδου)

10.2. Να υπολογίσετε το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει ο δανειολήπτης, στην περίπτωση που επιθυμεί να αποπληρώσει το Δάνειο στο τέλος τον 27^ο μήνα.

Οφείλεται το Ποσό στο τέλος της 2^{ης} περιόδου (24^{ος} μήνας) και οι Δεδουλευμένοι Τόκοι των 3 μηνών (24ος-27^{ος})
Άρα = 24.000 +(3/12)*6%*24.000 = €24.360

11.

Δάνεια Σταθερής Δόσης

Δάνεια ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΔΟΣΗΣ

Αποτελούν την πιο συνήθη μέθοδο εξόφλησης Δανείου. Το ύψος της Δόσης στα Δάνεια σταθερής Δόσης (Τοκοχρεολυσίου) υπολογίζεται ως ο όρος μίας σταθερής ακέραιης ράντας, η Παρούσα Αξία της οποίας ισούται με το ύψος του Δανείου. Δηλαδή ισχύει :

P.A.P. = A x ΣΠΑΡ (n, i)

ΠΟΣΟ ΔΑΝΕΙΟΥ = ΔΟΣΗ x ΣΠΑΡ (ΔΙΑΡΚΕΙΑ, ΕΠΙΤΟΚΙΟ)

Παράδειγμα 11. Τα δεδομένα είναι ίδια με το Παρ. 10, αλλά για εξόφληση με μέθοδο Σταθερής Δόσης



Ποσό Δανείου	40.000 €				
Επιτόκιο	6%				B
Διάρκεια Αποπληρωμής-έτη 5		40.000= ΔΟΣΗ x ΣΠΑΡ (5,6%)			
ΔΟΣΗ (ΤΟΚ/ΩΛΥΣΙΟ)	9.496 €	ΔΟΣΗ = 40.000 / 4,212			
Περίοδος	Ποσό Αρχής	Δόση	Τόκοι	Χρεωλύσια	Υπόλοιπο
1	40.000	9.496	2.400	7.096	32.904
2	32.904	9.496	1.974	7.522	25.382
3	25.382	9.496	1.523	7.973	17.409
4	17.409	9.496	1.045	8.451	8.958
5	8.958	9.496	537	8.958	0

11.1. Να υπολογίσετε το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει ο δανειολήπτης (οφειλέτης), στην περίπτωση που επιθυμεί να αποπληρώσει το Δάνειο στο τέλος του 2ου έτους και στο τέλος του 32 μήνα

Τέλος 2^{ου} έτους. Αν θεωρήσουμε ότι έχει καταβληθεί η Δόση τέλος 2^{ου} έτους = 25.382.
Εναλλακτικά μπορώ να υπολογίσω το Δάνειο που απομένει ως την παρούσα αξία των επόμενων 3 σταθερών δόσεων δηλαδή 9.496 * ΣΠΑΡ (3,6%) = 25.382.
Αν δεν έχει πληρωθεί η Δόση = 32.904 + 1.974 = 34.878.
Τέλος 32^{ου} μήνα. Οφείλεται το Ποσό στο τέλος της 2^{ης} περιόδου (24^{ος} μήνας) και οι Δεδουλευμένοι Τόκοι των 8 μηνών (24ος-32^{ος}) Άρα = 25.382 +(8/12)*6%*25.382 = €26.397

12.Ομολογιακού
Τύπου (Balloon ή
Bullet Payment)

Note Pad...

Δάνεια Ομολογιακού Τύπου
Αφορούν μέθοδο εξόφλησης για μεγάλου ύψους δάνεια. Ο Δανειολήπτης εξυπηρετεί μόνο τους τόκους/έτος οι οποίοι είναι σταθεροί αφού το Αρχικό Ποσό Δανείου δεν μειώνεται. Στη λήξη του Δανείου ο οφειλέτης επιστρέφει το σύνολο του Δανείου συν τους αναλογούντες τόκους της περιόδου αυτής.

Παράδειγμα 12. Τα δεδομένα είναι ίδια με το Παρ. 10, αλλά για εξόφληση του οφειλόμενου κεφαλαίου στη λήξη.



Ποσό Δανείου		40.000 €			
Επιτόκιο		6%	Γ		
Διάρκεια Αποπληρωμής-έτη		5			
ΣΤΑΘΕΡΟΙ ΤΟΚΟΙ		2.400 €			
Περίοδος	Ποσό Αρχής	Δόση	Τόκοι	Χρεωλύσια	Υπόλοιπο
1	40.000	2.400	2.400	0	40.000
2	40.000	2.400	2.400	0	40.000
3	40.000	2.400	2.400	0	40.000
4	40.000	2.400	2.400	0	40.000
5	40.000	42.400	2.400	40.000	0

12.1. Να υπολογίσετε το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει ο δανειολήπτης (οφειλέτης), στην περίπτωση που επιθυμεί να αποπληρώσει το Δάνειο στο τέλος του 3ου έτους και στο τέλος του 40ου μήνα

Τέλος 2ου έτους. Αν θεωρήσουμε ότι έχει καταβληθεί η Δόση τέλος 3ου έτους = 40.000, ενώ αν δεν έχει πληρωθεί η Δόση = 40.000 + 2.400 = € 42.400

Τέλος 40ου μήνα. Οφείλεται το Ποσό στο τέλος της 3ης περιόδου (36ος μήνας) και οι Δεδουλευμένοι Τόκοι των 4 μηνών (36ος-40ος) Άρα = 40.000 +(4/12)*6%*40.000 = €40.800

13.Δάνεια με
Περίοδο Χάριτος

Note Pad...

Η Περίοδος χάριτος είναι μία πρακτική της Τράπεζας για να διευκολύνει τους δανειολήπτες στα αρχικά στάδια εξόφλησης, ώστε να μην ΚΑΤΑΒΑΛΟΥΝ δόσεις ή να καταβάλλουν μόνο τους τόκους. Προσοχή αυτό σε περίπτωση που δεν καταβάλλονται οι τόκοι, τότε αυτοί ΚΕΦΑΛΑΙΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ με αποτέλεσμα την αύξηση του χρέους. !!!

Παράδειγμα 13. Το Τραπεζικό Δάνειο που λαμβάνετε προκειμένου την αγορά της Κατοικίας σας, ανέρχεται σε €100.000, σταθερού επιτοκίου 6%, διάρκειας 8 ετών και περίοδο χάριτος το 1ο έτος (στην περίοδο χάριτος δεν καταβάλλεται χρεολύσιο ή τόκοι, αφού η Δόση είναι Μηδέν). Το Δάνειο αποπληρώνεται με τη μέθοδο της Σταθερής Δόσης στο τέλος κάθε εξαμήνου. Να κάνετε τον Πίνακα ανάλυσης Δανείου σε περίπτωση που η περίοδος κεφαλαιοποίησης είναι το εξάμηνο.

Αρχικό Ποσό Δανείου 100.000 €

Επιτόκιο Ετήσιο 6%

Επιτόκιο 6μηνιαίο 3%

Ποινή Πρόωρης Εξόφλησης 4%

Σταθερή Δόση Αρχικού Δανείου 9.391,7 = 106.090 / ΣΠΑΡ(14,3%)

τα έτη υπολογισμού του ΣΠΑΡ είναι 14 γιατί τα 2 πρώτα δεν καταβάλλεται δόση

εξάμηνα	Αρχικό Ποσό	Τόκοι	Χρεωλύσια	Δόση	Υπόλοιπο
1	100.000	3.000	-3.000	0	103.000
2	103.000	3.090	-3.090	0	106.090

το αρνητικό πρόσημο στα ΧΡΕΩΛΥΣΙΑ, σημαίνει ότι το Αρχικό Δάνειο, προσαυξάνεται κατά το ποσό των τόκων που ΔΕΝ καταβάλλονται ΑΛΛΑ ΧΡΕΩΝΟΝΤΑΙ. Έτσι ποσό που οφείλεται στο 3ο εξάμηνο :

όσο μετά την περίοδο χάριτος = ΑΡΧΙΚΟ ΠΟΣΟ ΔΑΝΕΙΟΥ x (1+3%)² = 106.090 €

3	106.090	3.183	6.209	9.392	99.881
4	99.881	2.996	6.395	9.392	93.486
5	93.486	2.805	6.587	9.392	86.898
6	86.898	2.607	6.785	9.392	80.114
7	80.114	2.403	6.988	9.392	73.125
8	73.125	2.194	7.198	9.392	65.927
9	65.927	1.978	7.414	9.392	58.513
10	58.513	1.755	7.636	9.392	50.877
11	50.877	1.526	7.865	9.392	43.012
12	43.012	1.290	8.101	9.392	34.910
13	34.910	1.047	8.344	9.392	26.566
14	26.566	797	8.595	9.392	17.971
15	17.971	539	8.853	9.392	9.119
16	9.119	274	9.118	9.392	0

1) Αγοράσατε έπιπλα τα οποία θα αποπληρώσετε με 5 ισόποσες ετήσιες δόσεις των €2.500 στο τέλος κάθε έτους. Η 1^η δόση θα καταβληθεί στο τέλος του 3ου έτους από σήμερα. Εάν το επιτόκιο κατάθεσης σε τράπεζα είναι 5%, πόσα χρήματα πρέπει να καταθέσετε σήμερα ώστε να καλυφθούν ακριβώς οι δόσεις;
 $2.500 \times \Sigma\text{ΠΑΡ } (5,5\%) / (1+5\%)^2$ από Πίνακες Π.4. και Π.2. $2.500 \times 4,329 \times 0,907 = € 9.816$

2). Πριν από 3 χρόνια λάβατε δάνειο €100.000 με επιτόκιο 4% ετησίως το οποίο θα αποπληρώνατε μέσα από 8 ετήσιες σταθερές δόσεις στο τέλος κάθε έτους. Προ μιας ώρας καταβάλλατε στην τράπεζα την 2^η δόση. Ποιο είναι τώρα το υπόλοιπο που οφείλετε ακόμα στην τράπεζα (υπόλοιπο δανείου); Σημειώνεται ότι δεν επιβάλλεται ποινή πρόωρης εξόφλησης.
Δόση: $100.000 / 6,733 = €14.852,22$ / Υπόλοιπο δανείου: $14.852,22 \times 5,242 = €77.855,34$

1. Ο Συντελεστής Παρούσας Αξίας (Σ.Π.) θα είναι πάντα μικρότερος ή ίσος του 1.	ΣΩΣΤΟ
2. Η ετήσια απόδοση είναι ίση με το ετησιοποιημένο επτόκιο	ΣΩΣΤΟ
3. Το ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο είναι ίσο με το ετησιοποιημένο στη περίπτωση που η περίοδος κεφαλαιοποίησης των τόκων είναι το 6μηνο	ΛΑΘΟΣ
4. Όσο συχνότερη είναι η περίοδος κεφαλαιοποίησης των τόκων εντός του έτους, τόσο μεγαλύτερη είναι η Μέλλουσα Αξία	ΣΩΣΤΟ
5. Η Μέλλουσα Αξία Ράντας χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να υπολογίσουμε το Τελικό Ποσό που θα προκύψει από μία Τραπεζική κατάθεση που γίνεται μία φορά στην αρχή.	ΛΑΘΟΣ
6. Η περιοδική δόση που καταβάλλουμε για την εξόφληση ενός δανείου αποτελείται μόνο από το χρεολύσιο.	ΛΑΘΟΣ
7. Προκειμένου τον υπολογισμό της Δόσης σε ένα δάνειο Σταθερού Χρεολυσίου, χρησιμοποιούμε τον Τύπο της Παρούσας Αξίας Ράντας	ΛΑΘΟΣ
8. Η δόση σε ένα δάνειο ομολογιακού Τύπου, που πληρώνονται μόνο οι Τόκοι, είναι πάντα σταθερή εκτός από την τελευταία πληρωμή.	ΣΩΣΤΟ
9. Όσο μεγαλύτερη είναι διάρκεια της περιόδου χάριτος σε ένα δάνειο τόσο μικρότερο είναι το οφειλόμενο κεφάλαιο στην Τράπεζα.	ΛΑΘΟΣ
10. Η αναχρηματοδότηση ενός υφιστάμενου Δανείου με ένα νέο Δάνειο το οποίο για την ίδια εναπομείνουσα διάρκεια εξόφλησης με το παλαιό φέρει μικρότερο επιτόκιο, συμφέρει πάντα ανεξάρτητα από το ύψος της ποινής πρόωρης εξόφλησης.	ΛΑΘΟΣ