



Ακαδημαϊκό έτος 2021-2022

Εαρινό Εξάμηνο

ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΕΠΕΝΔΥΣΕΩΝ

Διάλεξη 3^η – 4^η.

Ανάλυση Θεωρίας Χαρτοφυλακίου

1. Αναμενόμενη Χρησιμότητα και Καμπύλες Αδιαφορίας
2. Κινδύνος και Απόδοση Χαρτοφυλακίου
3. Συστηματικός και Μη συστηματικός Κίνδυνος
4. Οφέλη από τη Διαφοροποίηση
5. Το φαινόμενο της Κυριαρχίας
6. Εισαγωγή του χωρίς κίνδυνο επιτοκίου
7. Γραμμή Κεφαλαιαγοράς
8. Θεωρία Διαχωρισμού

ΥΛΙΚΟ ΜΕΛΕΤΗΣ

1. Σημειώσεις Διαλέξεων, Α.Α. Δράκος
2. Α.Α. Δράκος, Γ.Α. Καραθανάσης, Χρηματοοικονομική Διοίκηση των Επιχειρήσεων, 2010, Εκδόσεις Γ. Μπένος, **Κεφάλαιο 17**
3. Bodie, Kane, Marcus, ΕΠΕΝΔΥΣΕΙΣ, 2015, Εκδόσεις ΥΤΟΡΙΑ, **Κεφάλαιο 6,7**
4. CASE STUDY 2ο.
5. ΣΧΕΤΙΚΑ ΑΡΘΡΑ: Eclass – Ενότητα Διάλεξης 3-4

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

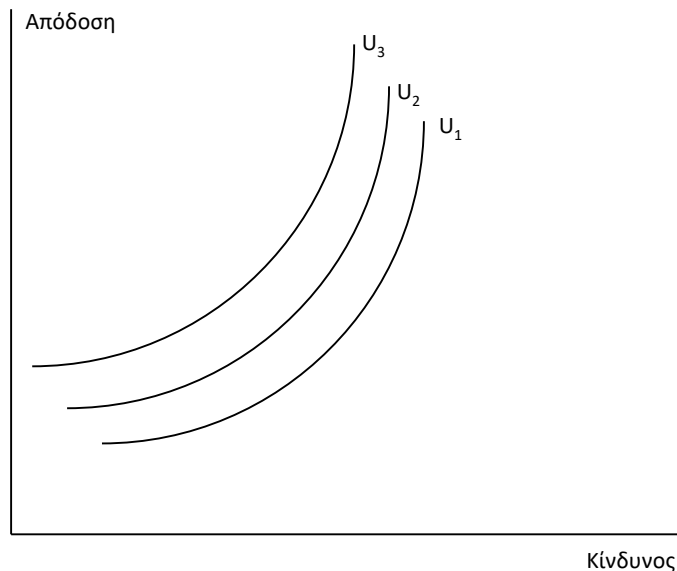
Σύμφωνα με τον Markowitz, ο κίνδυνος που αντιμετωπίζει ένας επενδυτής μειώνεται σημαντικά εάν μοιράσει τον πλούτο του σε περισσότερες από μία μετοχές. Στη σκέψη αυτή βασίζεται η σύγχρονη αντίληψη περί θεωρίας χαρτοφυλακίου. Ουσιαστικά ο συνολικός κίνδυνος ενός επενδυτή μειώνεται σημαντικά, αν τοποθετήσει τα χρήματά του σε ένα χαρτοφυλάκιο μετοχών, έναντι μίας μεμονωμένης μετοχής. Οι διαλέξεις αυτές θα παρουσιάσουν αναλυτικά τις έννοιες της μείωσης του κινδύνου, που προκύπτει από την τοποθέτηση του πλούτου ενός επενδυτή σε περισσότερες από μία μετοχές, δηλαδή σε χαρτοφυλάκια μετοχών. Θα εξετάσουμε διεξοδικά τον τρόπο υπολογισμού της απόδοσης και του κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου, καθώς επίσης και το μηχανισμό με τον οποίο οι επενδυτές μεγιστοποιούν τα οφέλη τους μέσω της συγκρότησης χαρτοφυλακίων.

Οι βασικές έννοιες που θα αναλυθούν είναι οι ακόλουθες:

1. Πως υπολογίζουμε την **αναμενόμενη απόδοση και κίνδυνο ενός χαρτοφυλακίου**
2. Ποια είναι ουσιαστικά τα οφέλη από τη **διαφοροποίηση**
3. Μεταξύ 'καλών' λύσεων, ποια είναι η καλύτερη λύση για τους επενδυτές – μεγιστοποιώντας την **αναμενόμενη απόδοση ανά μονάδα κινδύνου**
4. Το **Φαινόμενο Κυριαρχίας** και το **Φαινόμενο Διαχωρισμού**

1. ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΑΔΙΑΦΟΡΙΑΣ

Στο σετ διαλέξεων 1-2, είδαμε πως προσδιορίζονται οι καμπύλες αδιαφορίας στην περίπτωση των καταναλωτών, μεταξύ 2 προϊόντων. Αν προσπαθήσουμε να απεικονίσουμε τη συνάρτηση χρησιμότητας ενός επενδυτή που αποστρέφεται τον κίνδυνο, λαμβάνοντας υπόψη την απόδοση και τον κίνδυνο που ενέχει η επένδυσή του, θα καταλήξουμε σε μία κυρτή μορφή, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Έτσι, για κάθε μονάδα κινδύνου που προστίθεται στο χαρτοφυλάκιό του, απαιτεί υψηλότερη απόδοση. Επιπλέον, καθώς αυξάνεται το επίπεδο του κινδύνου, η απαιτούμενη απόδοση διαμορφώνεται έτσι, ώστε ο οριακός ρυθμός αύξησής της να είναι θετικός.

Κάθε ορθολογικός επενδυτής που αποστρέφεται τον κίνδυνο, θα προτιμήσει την καμπύλη χρησιμότητας που βρίσκεται επάνω και αριστερά στο διάγραμμα (U_3).

Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε πως η συνάρτηση χρησιμότητας ενός επενδυτή, όπως αντικατοπτρίζεται από τις καμπύλες αδιαφορίας, θα αποτελέσει το βασικό εργαλείο επιλογής του άριστου συνδυασμού επενδυτικών στοιχείων

2. ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΚΑΙ ΑΠΟΔΟΣΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

Γενικό Υπόδειγμα: Χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από n μετοχές

• **Απόδοση Χαρτοφυλακίου.** Η αναμενόμενη απόδοση ενός χαρτοφυλακίου αποτελούμενου από επενδυτικά στοιχεία (χρεόγραφα, μετοχές κ.λ.π.), είναι ο σταθμικός μέσος όρος των αποδόσεων των επιμέρους επενδυτικών στοιχείων.

$$R_P = \sum_{i=1}^n W_i R_i$$

R_i = η αναμενόμενη απόδοση της επένδυσης i

W_i = το ποσοστό συμμετοχής κάθε επένδυσης στο χαρτοφυλάκιο.

• **Ο Κίνδυνος ενός χαρτοφυλακίου** προσδιορίζεται τόσο από τους κινδύνους των επιμέρους επενδύσεων όσο και από την αλληλεπίδραση του κινδύνου ή τη συνδιακύμανση μεταξύ των επενδύσεων

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_j W_i \sigma_{ij}$$

↑
Κίνδυνος (Διακύμανση)
Χαρτοφυλακίου

$$\sigma_{ij} = \text{cov } ij = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Pr(R_i - \bar{R}_i)(R_j - \bar{R}_j)$$

↑
Συνδιακύμανση, επενδυτικών στοιχείων
που αποτελούν το χαρτοφυλάκιο

$$P_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \Leftrightarrow P_{ij} \sigma_i \sigma_j = \sigma_{ij}$$

↑
Συντελεστής συσχέτισης (P_{ij})
επενδυτικών στοιχείων

Υποπερίπτωσης που θα εξετάσουμε:

Στην περίπτωση χαρτοφυλακίου που αποτελείται από 2 ή 3 μετοχές, έστω ότι έχουμε τα ακόλουθα δεδομένα:

	Αναμενόμενη Απόδοση	Κίνδυνος (τυπική απόκλιση)	Στάθμιση
Μετοχή Α	$E(r_A)$	σ_A	w_A
Μετοχή Β	$E(r_B)$	σ_B	w_B
Μετοχή Γ	$E(r_\Gamma)$	σ_Γ	w_Γ

Χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από 2 μετοχές

$$E(r_p) = w_A E(r_A) + w_B E(r_B)$$

$$\sigma_P^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_{AB}$$

$$\sigma_P^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}$$

Χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από 3 μετοχές

$$E(r_p) = w_A E(r_A) + w_B E(r_B) + w_\Gamma E(r_\Gamma)$$

$$\sigma_P^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + w_\Gamma^2 \sigma_\Gamma^2 + 2w_A w_B \sigma_{AB} + 2w_A w_\Gamma \sigma_{A\Gamma} + 2w_B w_\Gamma \sigma_{B\Gamma}$$

2. ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΚΑΙ ΑΠΟΔΟΣΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

Παράδειγμα Υπολογισμού Αποδόσεων Χαρτοφυλακίου αποτελούμενου από 2 μετοχές.

Ετος	Ετήσιες Αποδόσεις Μτχ.		Ετήσιες Αποδόσεις Χαρτοφυλακίου για διαφορετικά ποσοστά συμμετοχής A και B					
	Μτχ. Α.	Μτχ. Β.	Μτχ. Α 50%	Μτχ. Β 50%	Μτχ. Α 40%	Μτχ. Β 60%	Μτχ. Α 20%	Μτχ. Β 80%
1	7%	19%	13,00%	13,00%	14,20%	14,20%	16,60%	16,60%
2	16%	21%	18,50%	18,50%	19,00%	19,00%	20,00%	20,00%
3	19%	27%	23,00%	23,00%	23,80%	23,80%	25,40%	25,40%
4	9%	8%	8,50%	8,50%	8,40%	8,40%	8,20%	8,20%
5								
Μέση Απόδοση (R)	$E(R) = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{N}$		13%	19%	15,75%	16,35%	17,55%	17,55%
Συνδιακύμανση - Cov	$\sigma_{AB} = \text{cov}_{AB} = \frac{\sum_{i=1}^n (R_{A_i} - \bar{R}_A)(R_{B_i} - \bar{R}_B)}{N}$		0,0024					
Συντελεστής Συσχέτισης	$P_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \sigma_B}$		0,0048					
Μετοχών	$\sigma_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2}{N - 1}$		0,0032	0,0063				
Χαρτοφυλακίου	$\sigma_p^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_{AB}$		0,0036	0,0040	0,0040	0,0040	0,0049	0,0049
Απόδοση / Μονάδα κινδύνου (R/σ)	2,245	2,364	2,625	2,600	2,600	2,600	2,498	2,498

Παράδειγμα Υπολογισμού Αποδόσεων Χαρτοφυλακίου αποτελούμενου από 3 μετοχές.

Ετος	Ετήσιες Αποδόσεις Μτχ.			Ετήσιες Αποδόσεις Χαρτοφυλακίου για διαφορετικά ποσοστά συμμετοχής A και B					
	Μτχ. Α.	Μτχ. Β.	Μτχ. C.	Μτχ. Α 30%	Μτχ. Β 40%	Μτχ. C 30%	Μτχ. Α 5%	Μτχ. Β 70%	Μτχ. C 25%
1	-3,78%	2,00%	4,12%		0,90%	0,90%		2,24%	2,24%
2	-2,85%	-1,50%	-2,34%		-2,16%	-2,16%		-1,78%	-1,78%
3	5,00%	1,50%	1,90%		2,67%	2,67%		1,78%	1,78%
4	3,80%	3,90%	2,00%		3,30%	3,30%		3,42%	3,42%
Μέση Απόδοση (R)	$E(R) = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{N}$			0,54%	1,48%	1,42%	1,18%	1,41%	1,41%
Συνδιακύμανση - Cov A,B	$\sigma_{IJ} = \text{cov}_{IJ} = \frac{\sum_{i=1}^n (R_{I_i} - \bar{R}_I)(R_{J_i} - \bar{R}_J)}{N}$			0,000396					
Συνδιακύμανση - Cov B,C				0,000351					
Συνδιακύμανση - Cov A,C				0,000128					
Συντελεστής Συσχέτισης P (A,B)	$P_{IJ} = \frac{\sigma_{IJ}}{\sigma_I \sigma_J}$			0,0001					
Συντελεστής Συσχέτισης P (B,C)				0,0005					
Συντελεστής Συσχέτισης P (A,C)				0,0000					
Μετοχών	$\sigma_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2}{N - 1}$			0,0020	0,0005	0,0007			
Χαρτοφυλακίου	$\sigma_p^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + w_C^2 \sigma_C^2 + 2w_A w_B \sigma_{AB} + 2w_B w_C \sigma_{BC} + 2w_A w_C \sigma_{AC}$			0,00053			0,00045		
Απόδοση / Μονάδα κινδύνου (R/σ)	0,121	0,659	0,524	0,512	0,512	0,512	0,667	0,667	0,667

• **Γνωρίζουμε** ότι με το κριτήριο Μέσου – Διακύμανσης (**Mean-Variance Criterion, MVC**), οι επενδυτές που αποστρέφονται το κίνδυνο (risk averters) επιλέγουν μεταξύ επενδυτικών στοιχείων όπου για δεδομένη απόδοση εμφανίζουν χαμηλότερο κίνδυνο, η υψηλότερη απόδοση για δεδομένο κίνδυνο. Ιδανικά, υψηλότερη απόδοση και χαμηλότερος κίνδυνος συγκριτικά αποτελεί την άριστη επιλογή.

Εναλλακτικά ο υψηλότερος λόγος απόδοσης ανά μονάδα κινδύνου (σε όρους τυπικής απόκλισης R/σ), είναι το κριτήριο επιλογής για επενδυτές που αποστρέφονται τον κίνδυνο.

• **Παρατηρείστε** ότι σίγουρα θα υπάρχουν συνδυασμοί των μετοχών, που θα δίνουν σχέση απόδοσης ανά μονάδα κινδύνου μεγαλύτερη από ότι η επένδυση σε μεμονωμένη επένδυση.

• **ΠΡΟΣΟΧΗ:** Αυτό δεν ισχύει στην περίπτωση όπου οι μετοχές έχουν απόλυτη συσχέτιση.

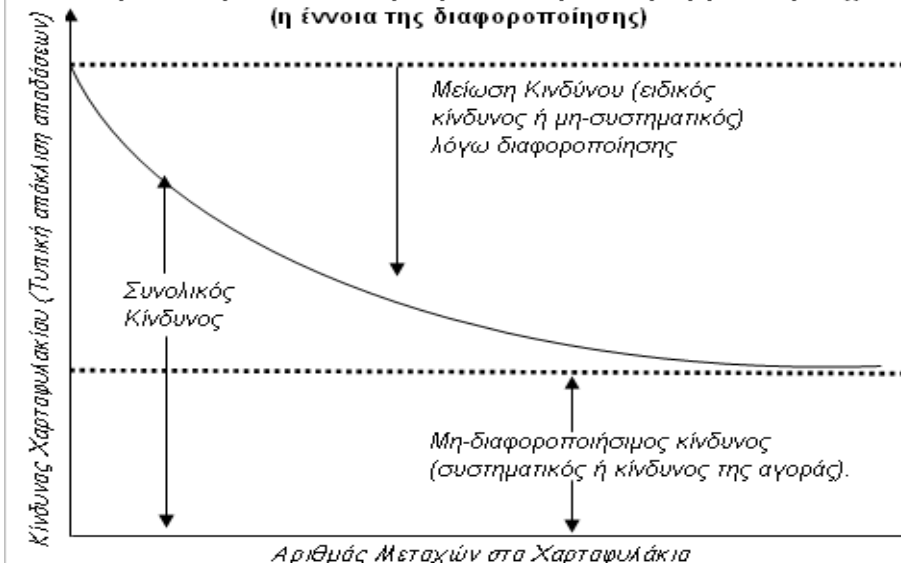
Αυτό οφείλεται στην μείωση του συνολικού κινδύνου του χαρτοφυλακίου λόγω της αλληλεπίδρασης μεταξύ των μετοχών (συνδιακύμανση). →

3. ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΟΣ ΚΑΙ ΜΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΟΣ ΚΙΝΔΥΝΟΣ

Κάθε επενδυτής, επιχειρεί να μεγιστοποιήσει την απόδοση του, αναλαμβάνοντας τον ελάχιστο κίνδυνο (ρίσκο). Η περισσότερο δημοφιλής προσέγγιση σε αυτό το ομολογουμένως δυσεπίλυτο πρόβλημα, είναι αυτή της Σύγχρονης Ανάλυσης Χαρτοφυλακίου (Modern Portfolio Theory), όπως αυτή αναπτύχθηκε από τον Harry Markowitz (“Portfolio Selection”, *Journal of Finance*, 1952). Σύμφωνα με τη θεώρηση αυτή, η επένδυση σε ένα χαρτοφυλάκιο μετοχών μειώνει σημαντικά τον κίνδυνο λόγω της διαφοροποίησης (Diversification). Τα οφέλη της διαφοροποίησης, έγκεινται στο ότι ο κίνδυνος ενός χαρτοφυλακίου αποτελούμενου από διαφορετικές μετοχές, θα είναι πολύ μικρότερος από τον συνολικό κίνδυνο που θα προέκυπτε επενδύοντας σε κάθε μετοχή ξεχωριστά, αφού λόγω των αλληλεπιδράσεων που υπάρχουν μεταξύ των μετοχών, ένα σημαντικό τμήμα του κινδύνου (στα πλαίσια ενός χαρτοφυλακίου) εξουδετερώνεται .

$$\text{Συνολικός Κίνδυνος Μετοχής} = \text{Συστηματικός ή Κίνδυνος Αγοράς (Systematic or Market Risk)} + \text{Μη-Συστηματικός ή Ειδικός Κίνδυνος (Unsystematic or Specific Risk)}$$

Σταδιακή Μείωση Κινδύνου Χαρτοφυλακίου με εισαγωγή νέων μετοχών (η έννοια της διαφοροποίησης)



Ο Μη-Συστηματικός Κίνδυνος μίας μετοχής οφείλεται σε παράγοντες που επηρεάζουν την εταιρεία (Διοίκηση, Εργασιακές σχέσεις, ιδιαιτερότητες προϊόντων, για αυτό άλλωστε ονομάζεται και διαφοροποιήσιμος) και μπορεί να εξαλειφθεί στα πλαίσια ενός χαρτοφυλακίου μέσα από την εισαγωγή περισσότερων μετοχών.

Ο Συστηματικός Κίνδυνος μίας μετοχής οφείλεται σε παράγοντες που επηρεάζουν γενικότερα την αγορά (Επιτόκια, Οικονομική αστάθεια, Πληθωρισμός) και δεν μπορεί να εξαλειφθεί μέσω διαφοροποίησης (π.χ. μία πολεμική σύρραξη στα κοιτάσματα πετρελαίου της Μέσης Ανατολής, θα επηρεάσει αρνητικά το σύνολο της παγκόσμιας οικονομίας)

Σημειώστε ότι ενώ τα αίτια συστηματικού κινδύνου είναι γενικά, ο βαθμός επίδρασης για κάθε εταιρεία μπορεί να διαφέρει σημαντικά

Για ένα επενδυτή, είναι προτιμότερο να αγοράσει περισσότερες από μία μετοχές, γιατί σε ενδεχόμενη πτώση της τιμής της μίας μετοχής, οι υπόλοιπες μετοχές (στα πλαίσια ενός χαρτοφυλακίου) δεν είναι βέβαιο ότι θα αντιδράσουν με τον ίδιο τρόπο, με αποτέλεσμα ή συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου να είναι λιγότερο αρνητική ή ακόμα και θετική. Το συνδυαστικό αυτό αποτέλεσμα εξαρτάται από τους συντελεστές συσχέτισης (Συνδιακύμανση) μεταξύ των μετοχών που συνθέτουν το χαρτοφυλάκιο.

4. ΟΦΕΛΗ ΑΠΟ ΤΗ ΔΙΑΦΟΡΟΠΟΙΗΣΗ

Το παράδειγμα που ακολουθεί σκοπεύει να διασαφηνίσει τα οφέλη που προκύπτουν από την εισαγωγή μετοχών σε ένα χαρτοφυλάκιο σε σχέση με τη διακράτηση μεμονωμένων μετοχών.

Αναμενόμενη Απόδοση και Κίνδυνος (διακύμανση) Χαρτοφυλακίου αποτελούμενου από 2 μετοχές →

$$R_P = W_A R_A + W_B R_B$$

$$\sigma_P^2 = W_A^2 \sigma_A^2 + W_B^2 \sigma_B^2 + 2W_A W_B \text{COV}_{AB}$$

αφού όμως $P_{AB} = \frac{\text{COV}_{AB}}{\sigma_A \sigma_B} \Leftrightarrow P_{AB} \sigma_A \sigma_B = \text{COV}_{AB}$

$$\sigma_P^2 = W_A^2 \sigma_A^2 + W_B^2 \sigma_B^2 + 2W_A W_B P_{AB} \sigma_A \sigma_B$$

Αριθμητικό Παράδειγμα:

Εστω ένα χαρτοφυλάκιο 2 μετοχών Α και Β, με τα εξής χαρακτηριστικά (κίνδυνος σε όρους τυπικής απόκλισης) →

	R_i	σ_i	w_i
Μετοχή Α	10%	30%	50%
Μετοχή Β	25%	60%	50%

Αναμενόμενη Απόδοση Χαρτοφυλακίου →

$$R_P = w_A R_A + w_B R_B = 0,50 * 0,10 + 0,50 * 0,25 = 0.175 = 17,5\%$$

Εστω ότι συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των μετοχών $P_{AB}=0,25$

Κίνδυνος Χαρτοφυλακίου →

$$\sigma_P^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_A \sigma_B P_{AB} =$$

$$= 0,50^2 \times 0,30^2 + 0,50^2 \times 0,60^2 + 2 \times 0,50 \times 0,50 \times 0,30 \times 0,60 \times 0,25 =$$

$$= 0,135$$

$$\sigma_P = \sqrt{\sigma_P^2} = 0,367$$

Παρατηρήστε, ότι η απόδοση ανά μονάδα κινδύνου για το χαρτοφυλάκιο είναι μεγαλύτερη από κάθε μεμονωμένη μετοχή ξεχωριστά. Η μείωση του κινδύνου στα πλαίσια του χαρτοφυλακίου είναι αποτέλεσμα της συνδιακύμανσης – συσχέτισης που υφίσταται μεταξύ των μετοχών. Από τη στιγμή όπου οι μετοχές δεν συσχετίζονται απόλυτα ($P_{AB}<1$), ο συνολικός κίνδυνος μειώνεται →

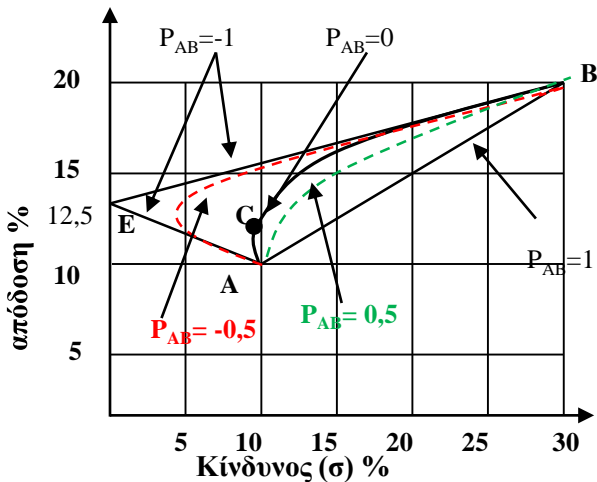
	R	σ	Αναμενόμενη Απόδοση ανά μονάδα κινδύνου R/σ
Μετοχή Α	10%	30%	0,33
Μετοχή Β	25%	60%	0,41
Χαρτοφυλάκιο	17,5%	36,7%	0,48

‘Η Διαφοροποίηση κατά Markowitz’ προσπαθεί να συνδυάσει αξιόγραφα με αποδόσεις που δεν είναι τέλεια θετικά σχετιζόμενα, ώστε να μειωθεί ο κίνδυνος χωρίς να μειώσουμε την απαιτούμενη απόδοση. Ουσιαστικά μιλάμε για μια ανάλυση συνδιακύμανσης.

4. ΟΦΕΛΗ ΑΠΟ ΤΗ ΔΙΑΦΟΡΟΠΟΙΗΣΗ

Το ακόλουθο παράδειγμα είναι διαφωτιστικό ως προς τον τρόπο που μειώνεται ο κίνδυνος μέσα από τη διαφοροποίηση, για όλα τα χαρτοφυλάκια που μπορούν να δημιουργηθούν από 2 μετοχές, χωρίς να μειώνεται η απαιτούμενη απόδοση.

	R_i	σ_i			
Μετοχή Α	0,1	0,1			
Μετοχή Β	0,2	0,3			
% επένδυσης στη μετοχή Α	R_p	σ_p			
		$\rho_{AB}=-1$	$\rho_{AB}=0$	$\rho_{AB}=1$	
0%	20,00%	30,00%	30,00%	30,00%	
20%	18,00%	26,00%	24,08%	22,00%	
40%	16,00%	22,00%	18,44%	14,00%	
60%	14,00%	18,00%	13,42%	6,00%	
80%	12,00%	14,00%	10,00%	2,00%	
100%	10,00%	10,00%	10,00%	10,00%	



Συντελεστής Συσχέτισης $\rho_{AB} = -0,5$ και $\rho_{AB} = 0,5$. Οι καμπύλες με διακεκομμένη γραμμή, παρουσιάζουν τα χαρτοφυλάκια που βρίσκονται σε ενδιάμεσες καταστάσεις.

Οφέλη από τη Διαφοροποίηση υπάρχουν όταν ο συντελεστής Συσχέτισης είναι στα όρια:
Το Ε είναι η ιδανικότερη λύση από όλα τα εφικτα χαρτοφυλάκια

Περίπτωση 2^η. Αρνητική Συσχέτιση $\rho_{AB}=-1$
Όταν ισχύει η σχέση αυτή τότε η διασπορά κεφαλαίων σε πολλές μετοχές έχει τα πλεόν εννοϊκά αποτελέσματα (γραμμή AE, EB)

$$\sigma_p^2 = W_A^2 \sigma_A^2 + W_B^2 \sigma_B^2 - 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B$$

$$\sigma_p = |W_A \sigma_A - W_B \sigma_B|$$

Στην προσπάθεια μας να υπολογισούμε το χαρτοφυλάκιο E το οποίο παρουσιάζει μηδενικό κίνδυνο, στην περίπτωση όπου ο συντελεστής συσχέτισης $\rho = -1$, ουσιαστικά ζητάμε τα βάρη συμμετοχής των μετοχών που ελαχιστοποιούν την τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου

Μαθηματικά παίρνουμε τη πρώτη παράγωγο της εξίσωσης τυπικής απόκλισης ως προς W_A και λύνουμε ως προς 0.

$$\min \sigma_p = \sqrt{W_A^2 \sigma_A^2 + W_B^2 \sigma_B^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}}$$

s.t. $W_A + W_B = 1$

$$W_A^m = \frac{\sigma_B^2 - \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{AB} \sigma_A \sigma_B} = \frac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B}$$

$$-1 \leq \rho_{AB} < 1$$

•Περίπτωση 1^η. Τελεια Θετική Συσχέτιση $\rho_{AB}=1$

Όταν ισχύει η σχέση αυτή τότε η διασπορά κεφαλαίων σε πολλές μετοχές δεν έχει εννοϊκά αποτελέσματα (γραμμή AB)

$$\sigma_p^2 = W_A^2 \sigma_A^2 + W_B^2 \sigma_B^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B$$

$$\sigma_p = \sqrt{(W_A \sigma_A + W_B \sigma_B)^2}$$

$$\sigma_p = W_A \sigma_A + W_B \sigma_B$$

•Περίπτωση 3^η. Απουσία Συσχέτισης $\rho_{AB}=0$

Όταν ισχύει η σχέση αυτή τότε η διασπορά κεφαλαίων σε πολλές μετοχές έχει εννοϊκά αποτελέσματα (καμπύλη ACB)

$$\sigma_p^2 = W_A^2 \sigma_A^2 + W_B^2 \sigma_B^2$$

$$\sigma_p = \sqrt{W_A^2 \sigma_A^2 + W_B^2 \sigma_B^2}$$

Στην προσπάθεια μας να υπολογισούμε τα βάρη των μετοχών που συνθέτουν το χαρτοφυλάκιο C το οποίο παρουσιάζει το μικρότερο κίνδυνο (όταν ο συντελεστής συσχέτισης είναι μηδέν), μαθηματικά παίρνουμε τη πρώτη παράγωγο της εξίσωσης τυπικής απόκλισης ως προς W_A και λύνουμε ως προς 0.

$$W_B^m = \frac{\sigma_A^2 - \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{AB} \sigma_A \sigma_B} = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$$

5. ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΤΗΣ ΚΥΡΙΑΡΧΙΑΣ

Το διάγραμμα παρουσιάζει το σύνολο των **Εφικτών Χαρτοφυλακίων**, μέσα από διαφορετικούς συνδυασμούς των 2 μετοχών (A και B) για τρεις διαφορετικές τιμές του συντελεστή συσχέτισης. Από αυτά, τα **Αποτελεσματικά (Efficient) Χαρτοφυλάκια**, είναι τα χαρτοφυλάκια που για δεδομένο επίπεδο κινδύνου έχουν υψηλότερη απόδοση ή για δεδομένη απόδοση έχουν μικρότερο συγκριτικά κίνδυνο.

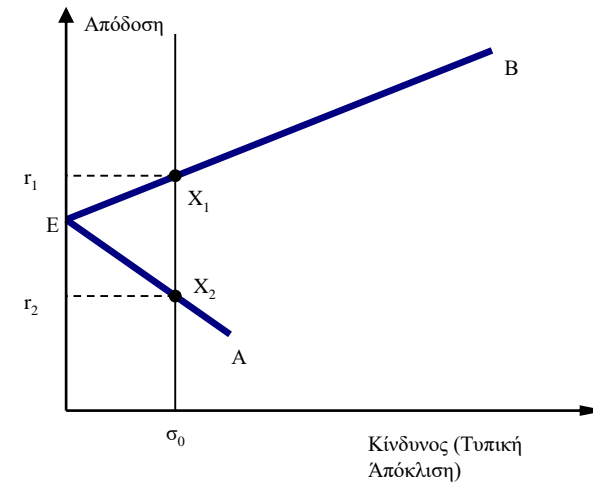
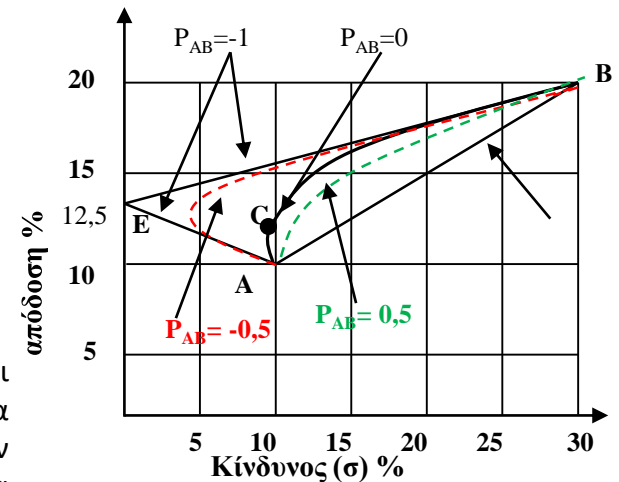
Αποτελεσματικά Χαρτοφυλάκια, ορίζονται :

- A) Για $P_{AB}=-1$ τα χαρτοφυλάκια επί της γραμμής EB (και όχι επί της AE)
- B) Για $P_{AB}=1$ τα χαρτοφυλάκια επί της γραμμής AB (δηλ. το σύνολο)
- Γ) Για $P_{AB}=0$ τα χαρτοφυλάκια επί της γραμμής CB (και όχι τα AC)

Το γεγονός ότι μερικά χαρτοφυλάκια υπερτερούν, σε όρους απόδοσης σε σχέση με τον κίνδυνο έναντι κάποιων άλλων, αποδίδεται στο **φαινόμενο Κυριαρχίας**. Πιο αναλυτικά:

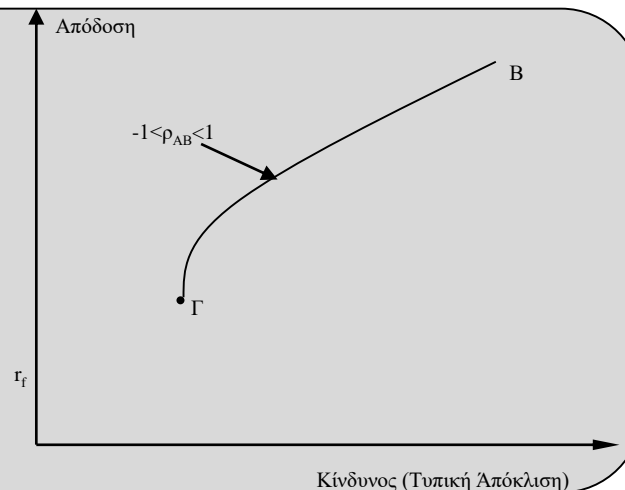
Έστω η περίπτωση όπου $\rho=-1$. Για δεδομένο επίπεδο κινδύνου, το χαρτοφυλάκιο X_1 έχει μεγαλύτερη απόδοση από το χαρτοφυλάκιο X_2 , άρα ένας ορθολογικός επενδυτής για τον κίνδυνο αυτό, δεν θα επιλέξει σε καμία περίπτωση το X_2 (σύμφωνα με τον Markowitz οι επενδυτές θα επιλέξουν από το σύνολο των δυνατών χαρτοφυλακίων, τα χαρτοφυλάκια εκείνα που για δεδομένο επίπεδο κινδύνου προσφέρουν τη μέγιστη δυνατή απόδοση ή τα χαρτοφυλάκια εκείνα των οποίων ελαχιστοποιείται ο κίνδυνος για δεδομένο επίπεδο απόδοσης). Η αρχή αυτή ονομάζεται **Αρχή Κυριαρχίας**: ορισμένα χαρτοφυλάκια, αυτά που βρίσκονται στο άνω μέρος του συνόρου των εφικτών χαρτοφυλακίων, κυριαρχούν έναντι των χαρτοφυλακίων που βρίσκονται στο κάτω μέρος του συνόρου (όπου ο όρος κυριαρχία αναφέρεται σε μεγαλύτερη απόδοση σε δεδομένο επίπεδο κινδύνου).

Επομένως διαχωρίζουμε 2 ομάδες χαρτοφυλακίων: από τη μία έχουμε τα χαρτοφυλάκια επί της AEB, τα οποία αποτελούν το **Σύνολο των Εφικτών Χαρτοφυλακίων**, και από την άλλη έχουμε το σύνολο των χαρτοφυλακίων το οποίο δεν κυριαρχείται από κανένα άλλο, και αποτελεί το **Σύνολο των Αποδοτικών χαρτοφυλακίων (Efficient Frontier – Αποτελεσματικό Σύνορο)**. Στο γράφημα το σύνορο αυτό είναι το EB.

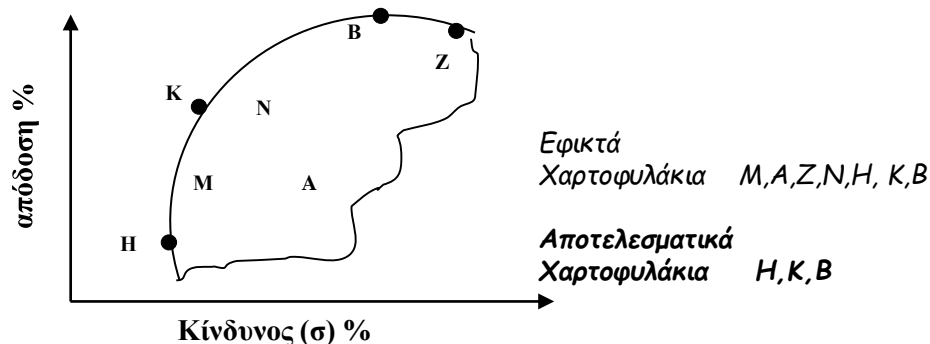


5. ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΤΗΣ ΚΥΡΙΑΡΧΙΑΣ

Στη Γενική Περίπτωση επομένως όπου ο συντελεστής συσχέτισης των 2 μετοχών είναι μεταξύ -1 και 1, το Σύνολο των Αποδοτικών χαρτοφυλακίων (Efficient Frontier – Αποτελεσματικό Σύνορο) είναι το ΓΒ.



Επεκτείνοντας την ανάλυση σε ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από N μετοχές, το επόμενο διάγραμμα παρουσιάζει γενικά όλα τα εφικτά χαρτοφυλάκια. Από αυτά, τα αποτελεσματικά (efficient) χαρτοφυλάκια είναι αυτά που βρίσκονται επί της καμπύλης ΗΒ (μέτωπο αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων- efficient frontier).



Η κατασκευή του μετώπου αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων, συνίσταται στον υπολογισμό των ποσοστών συμμετοχής (βάρη) των περιουσιακών στοιχείων που αποτελούν τα χαρτοφυλάκια, όπου για δεδομένη απόδοση έχουμε το χαμηλότερο συγκριτικά κίνδυνο. Η μαθηματική λύση της ομοιογενούς περίπλοκης αυτής εξίσωσης, γίνεται μέσα από Προγραμματισμό (Quadratic Optimization Program).

Στην περίπτωση χαρτοφυλακίου αποτελούμενο από 2 μετοχές, ανάγεται στη μαθηματική λύση ελαχιστοποίησης της διακύμανσης με συγκεκριμένους περιορισμούς

$$\text{ελαχ} \sigma_P^2 = W_A^2 \sigma_A^2 + W_B^2 \sigma_B^2 + 2W_A W_B \sigma_{AB}$$

$$R_P = W_A R_A + W_B R_B$$

$$1 = W_A + W_B$$

Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης με περιορισμούς λύνεται με τη μέθοδο **Lagrange**

$$\begin{aligned} \text{ελαχ} L = & \frac{1}{2} (W_A^2 \sigma_A^2 + W_B^2 \sigma_B^2 + 2W_A W_B \sigma_{AB}) + \\ & \lambda_1 (R_P - W_A R_A + W_B R_B) + \\ & \lambda_2 (1 - W_A + W_B) \end{aligned}$$

6. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΟΥ ΧΩΡΙΣ ΚΙΝΔΥΝΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ

Έστω ότι εισάγουμε ένα χρεόγραφο χωρίς κίνδυνο. Επομένως ένας επενδυτής μπορεί να συνδυάσει οποιοδήποτε εφικτό χαρτοφυλάκιο με το χωρίς κίνδυνο χρεόγραφο (το οποίο έχει σταθερή απόδοση r_f).

Έστω ότι ο συντελεστής συσχέτισης για δύο μετοχές είναι μεταξύ του -1 και του 1, και ο επενδυτής επιλέγει το χαρτοφυλάκιο με το μικρότερο κίνδυνο. Στην περίπτωση αυτή ο επενδυτής μπορεί να συνδυάσει το χαρτοφυλάκιο με τον ελάχιστο κίνδυνο, με το χωρίς κίνδυνο χρεόγραφο. Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε την **Γραμμή Κατανομής Κεφαλαίου (Capital Allocation Line)**. Ένας επενδυτής μπορεί να κινηθεί στην Γραμμή Κατανομής Κεφαλαίου, ανάλογα με το αν δανείζει ή δανείζεται μέρος του κεφαλαίου του. Είναι όμως ο συνδυασμός του r_f με το χαρτοφυλάκιο ελάχιστου κινδύνου, το καλύτερο που μπορεί να πετύχει ένας επενδυτής?

Ορίζουμε το **Δείκτη Sharpe (Sharpe Ratio)**:

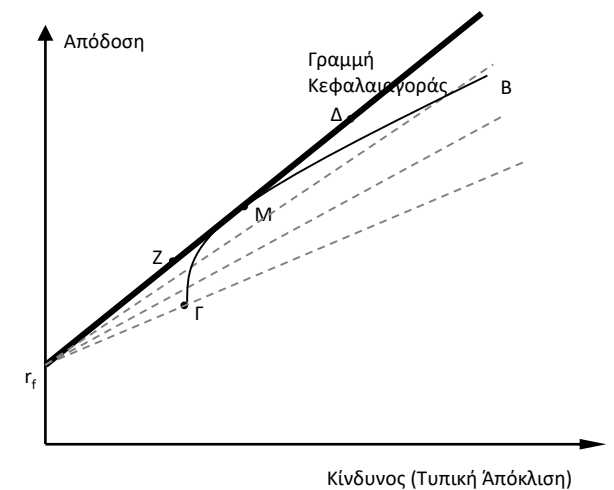
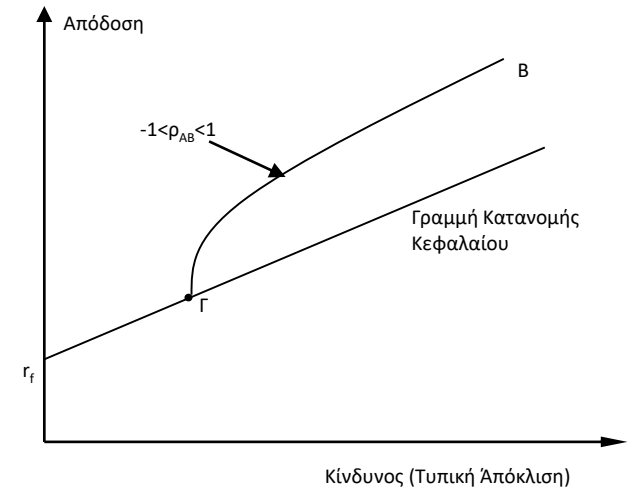
$$r_p: \text{η απόδοση του υπό εξέταση χαρτοφυλακίου} \quad (SR) = \frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p}$$

r_f : η απόδοση του χρεογράφου χωρίς κίνδυνο

σ_p : ο κίνδυνος του υπό εξέταση χαρτοφυλακίου

Ο δείκτης (ο οποίος υπολογίζει και την κλίση της Γραμμής Κατανομής Κεφαλαίου) ονομάζεται **‘Δείκτης Επιβράβευσης της Μεταβλητότητας’** (Reward to Variability Ratio) και δείχνει την επιπλέον ‘αναμενόμενη απόδοση’ που παράγεται από το χαρτοφυλάκιο για κάθε αύξηση του κινδύνου που αναλαμβάνεται.

Ποιο όμως είναι το χαρτοφυλάκιο όπου μεγιστοποιείται η αναμενόμενη απόδοση ανά μονάδα κινδύνου; Το χαρτοφυλάκιο αυτό είναι το σημείο M όπου η Γραμμή Κατανομής Κεφαλαίου εφάπτεται του Αποτελεσματικού Μετώπου. Στο σημείο αυτό η αναμενόμενη απόδοση ανά μονάδα κινδύνου είναι η μεγαλύτερη δυνατή, ενώ το χαρτοφυλάκιο M αποτελεί το Χαρτοφυλάκιο (στην περίπτωση που εισάγουμε ένα χωρίς κίνδυνο χρεόγραφο), που θα επιλεγεί από όλους τους επενδυτές που επιθυμούν να έχουν στο χαρτοφυλάκιό τους το πιο αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο μετοχών, και είναι το Άριστο Χαρτοφυλάκιο. Η δε Γραμμή Κατανομής Κεφαλαίου η οποία εφάπτεται του Αποτελεσματικού Μετώπου ονομάζεται **Γραμμή Κεφαλαιαγοράς (Capital Market Line)**.

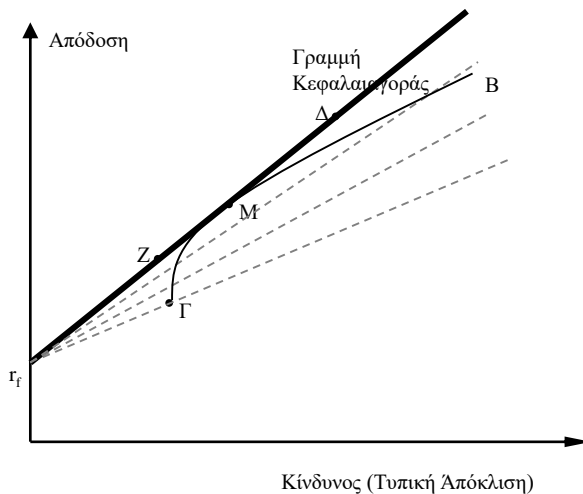


7. ΓΡΑΜΜΗ ΚΕΦΑΛΑΙΑΓΟΡΑΣ

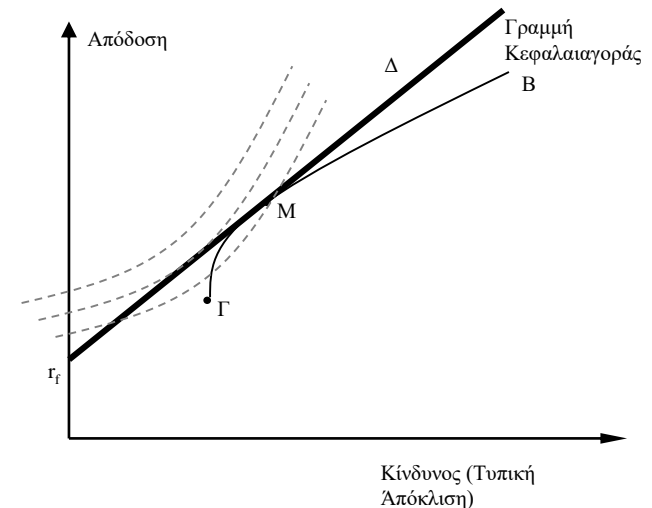
Ας δούμε πάλι τη Γραμμή Κεφαλαιαγοράς:

Κάθε σημείο επί της καμπύλης $r_f M \Delta$ είναι ένας διαφορετικός επενδυτικός συνδυασμός ανάμεσα στο Χαρτοφυλάκιο της Αγοράς και το χωρίς κίνδυνο χρεόγραφο.

- Στο σημείο r_f ο επενδυτής επιλέγει μόνο το Χρεόγραφο χωρίς κίνδυνο
- Στο σημείο M ο επενδυτής επιλέγει ένα χαρτοφυλάκιο από περιουσιακά στοιχεία με κίνδυνο (το Άριστο Χαρτοφυλάκιο, το οποίο ονομάζεται και Χαρτοφυλάκιο της Αγοράς)
- Σε κάθε σημείο μεταξύ r_f και M ο επενδυτής επιλέγει ένα συνδυασμό μεταξύ του Χαρτοφυλακίου της αγοράς M και του χρεογράφου χωρίς κίνδυνο.
- Σε κάθε σημείο μεταξύ M και Δ ο επενδυτής δανειζεται με επιτόκιο r_f για να επενδύσει μεγαλύτερο τμήμα των πόρων του στο χαρτοφυλάκιο M



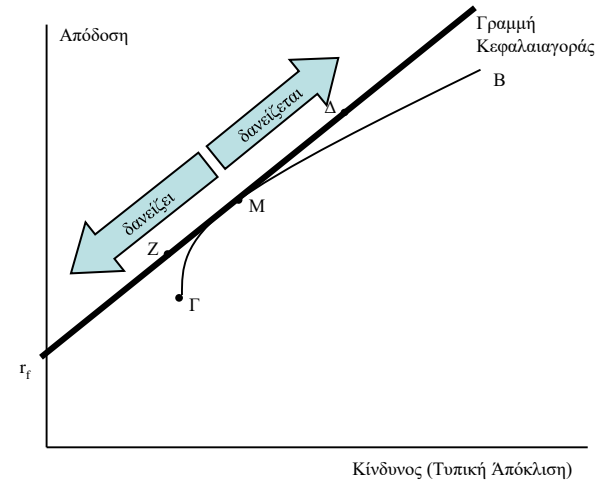
Εάν σε μία αγορά διαπραγματεύονται μόνο οι μετοχές A και B , όλοι επενδυτές θα επιλέξουν το χαρτοφυλάκιο της Αγοράς M , και θα μπορούν να κινηθούν πάνω στην Γραμμή Κεφαλαιαγοράς που ορίζει το χωρίς κίνδυνο χρεόγραφο και το χαρτοφυλάκιο M (ουσιαστικά αυτό που θα μεταβάλλεται για κάθε επενδυτή ξεχωριστά θα είναι το ποσοστό του κεφαλαίου που θα διαθέτει στο χωρίς κίνδυνο χρεόγραφο και το ποσοστό που θα διαθέτει στο χαρτοφυλάκιο των μετοχών – οι σταθμίσεις των μετοχών A και B για τη συγκρότηση του άριστου χαρτοφυλακίου M θα είναι οι ίδιες για όλους τους επενδυτές). Δηλαδή, ο επενδυτής, αφού προσδιορίσει το Χαρτοφυλάκιο της Αγοράς, επιλέγει τον άριστο συνδυασμό μεταξύ αυτού του Χαρτοφυλακίου της Αγοράς και του χρεογράφου χωρίς κίνδυνο, με βάση τις προτιμήσεις του έναντι του κινδύνου, και μπορεί να δανειστεί στην αγορά χρήματος ώστε να επενδύσει στο χαρτοφυλάκιο της Αγοράς ποσό μεγαλύτερο του πλούτου του, ή να υποκαταστήσει ένα μέρος των επενδύσεών του σε μετοχές με το ακίνδυνο αξιόγραφο.



7. ΓΡΑΜΜΗ ΚΕΦΑΛΑΙΑΓΟΡΑΣ

Με βάση την Γραμμή Κεφαλαιαγοράς επομένως παρατηρούμε ότι:

- Με την εκχώρηση δανείου στο Κράτος με επιτόκιο r_f το Αποτελεσματικό Σύνορο Χαρτοφυλακίων ορίζεται ως η ευθεία γραμμή $r_f M$. Ένα σημαντικό συμπέρασμα είναι ότι απ'όλα τα αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια επί της ΓΜ, μόνο ένα χαρτοφυλάκιο είναι αποτελεσματικό το Μ. Τα υπόλοιπα χαρτοφυλάκια επί της ΓΜ καθίστανται μη αποτελεσματικά.
- Παρομοίως, όταν οι επενδυτές δανείζονται από το κράτος με επιτόκιο r_f το Αποτελεσματικό Σύνορο Χαρτοφυλακίων ορίζεται ως η ευθεία γραμμή ΜΔ. Στο σημείο r_f ο επενδυτής δανείζει όλα του τα χρήματα στο ακίνδυνο αξιόγραφο και έχει αναμενόμενη απόδοση ίση με r_f και μηδενικό κίνδυνο. Στο σημείο Μ ο επενδυτής επενδύει όλα του τα χρήματα στο χαρτοφυλάκιο των n μετοχών, το οποίο ανήκει στο Αποτελεσματικό Μέτωπο. Τέλος στο σημείο Δ ο επενδυτής επενδύει στο χαρτοφυλάκιο των n μετοχών όλα τα χρήματά του καθώς επίσης και ένα ποσό χρημάτων που δανείζεται από το κράτος με επιτόκιο r_f .



8. ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ

Η διαδικασία επιλογής του Άριστου Χαρτοφυλακίου, μπορεί να διαχωριστεί σε δύο βήματα:

- Στο πρώτο βήμα ο επενδυτής επιλέγει ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται μόνο από μετοχές και είναι το Χαρτοφυλάκιο της Αγοράς (M). Το Μ είναι κοινό για όλους τους επενδυτές και είναι αντικειμενικά προσδιορισμένο, αφού προσδιορίζεται από το σημείο όπου το Αποτελεσματικό Σύνορο Χαρτοφυλακίων εφάπτεται με την Γραμμή Κεφαλαιαγοράς.
- Στο δεύτερο βήμα, ο επενδυτής συνθέτει ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από το Μ και από το ακίνδυνο αξιόγραφο r_f (δηλαδή, επιλέγει αν θα δανείσει ή αν θα δανεισθεί και πόσο). Στην επιλογή του χαρτοφυλακίου αυτού υπεισέρχεται η υποκειμενική άποψη των επενδυτών αναφορικά με την βέλτιστη, σε όρους αναμενόμενης χρησιμότητας, σχέση απόδοσης και κινδύνου.

Η παραπάνω διαδικασία κατανομής των κεφαλαίων στο Χαρτοφυλάκιο της Αγοράς και στο χωρίς κίνδυνο χρεόγραφο, είναι γνωστή και ως **Θεωρία Διαχωρισμού (Separation Theory)**.

CASE STUDY - ΕΥΡΕΣΗ ΑΡΙΣΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

Το Άριστο Χαρτοφυλάκιο είναι εκείνο το χαρτοφυλάκιο στο οποίο μεγιστοποιείται η απόδοση ανά μονάδα κινδύνου δηλαδή η τιμή του Sharpe Ratio, και προκύπτει από τη μεγιστοποίηση του Δείκτη Επιβράβευσης της Μεταβλητότητας' (Reward to Variability Ratio – Sharpe Ratio), το οποίο μαθηματικά ανάγεται στη λύση του εξής προβλήματος :

$$\begin{aligned} \max (SR) &= \frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p} \\ \text{s.t. } w_A + w_B &= 1 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} w_B^O &= \frac{[E(r_A) - r_f] \sigma_B^2 - (E(r_B) - r_f) \sigma_{AB}}{[E(r_A) - r_f] \sigma_B^2 + [E(r_B) - r_f] \sigma_A^2 + \{[E(r_A) - r_f] + [E(r_B) - r_f]\} \sigma_{AB}} \\ w_A^O &= 1 - w_B^O \end{aligned}$$

CASE STUDY - ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΑ ΔΑΝΕΙΣΜΟΥ

Η δυνατότητα Δανεισμού προκειμένου την επένδυση σε ποσοστό μεγαλύτερο των Ιδίων Κεφαλαίων στο Χαρτοφυλάκιο M, γίνεται κατανοητή από το ακόλουθο αριθμητικό παράδειγμα. Το w_i είναι το ποσοστό των κεφαλαίων που επενδύεται στο χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από μετοχές (M). Στην περίπτωση όπου ο επενδυτής επιθυμεί να δανειστεί επιπλέον χρήματα, για να επενδύσει στο χαρτοφυλάκιο M, το w_i λαμβάνει αρνητικό πρόσημο.

Ο επενδυτής Δανείζει $0 < W < 1$			
	R	σ	W
Αξιογραφο i	7,00%	0,00%	30,00%
Χαρτοφυλάκιο M	15,00%	9,00%	70,00%
Χαρτοφυλάκιο P	12,60%	6,30%	100,00%

$$\text{Sharpe Ratio} = \frac{R_M - R_i}{\sigma_M} = 0,89$$

Ο επενδυτής Δανείζεται $0 > W$			
	R	σ	W
Αξιογραφο i	7,00%	0,00%	-20,00%
Χαρτοφυλάκιο M	15,00%	9,00%	120,00%
Χαρτοφυλάκιο P	16,60%	10,80%	100,00%

$$\text{Sharpe Ratio} = \frac{R_M - R_i}{\sigma_M} = 0,89$$

Παρατηρείστε ότι το Sharpe ratio, είναι το ίδιο, αφού και η δυνατότητα δανεισμού, δημιουργεί χαρτοφυλάκιο επί της ίδιας καμπύλης (η οποία έχει σταθερή κλίση)!!!

Συνεχίζοντας την ανάλυση μας επί της Γραμμής Κεφαλαιαγοράς (Capital Market Line), παρατηρούμε ότι **Η ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΤΟΥ ΧΩΡΙΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΑΞΙΟΓΡΑΦΟΥ ΑΠΟΔΟΣΗ, ΕΝΟΣ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ (p) ΠΟΥ ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ ΕΠΙ ΤΗΣ CML, ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΛΟΓΗ ΤΗΣ ΤΥΠΙΚΗΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ (Η ΚΙΝΔΥΝΟΥ) ΑΥΤΟΥ ΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ (σ_p)**. Έτσι η CML παρουσιάζει τη σχέση κινδύνου-απόδοσης και μετρά τον κίνδυνο για αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια. Η επιπλέον απόδοση αυτή ισούται με την ανταμοιβή για τον επιπλέον κίνδυνο που αναλαμβάνει ο επενδυτής και ονομάζεται **Risk Premium**

	R	σ	W
Riskless Security	7,00%	0,00%	30,00%
Efficient Portfolio M	15,00%	9,00%	70,00%
Χαρτοφυλάκιο P	12,60%	6,30%	
Sharpe Ratio	0,89		
Risk Premium	$R_p - i = \left(\frac{R_M - i}{\sigma_M} \right) \sigma_p = \left(\frac{15\% - 7\%}{9\%} \right) \times 6,3\% = 5,60\%$		

	R	σ	W
Riskless Security	7,00%	0,00%	-20,00%
Efficient Portfolio M	15,00%	9,00%	120,00%
Χαρτοφυλάκιο P	16,60%	10,80%	
Sharpe Ratio	0,89		
Risk Premium	9,60%		

$$R_p - i = \left(\frac{R_M - i}{\sigma_M} \right) \sigma_p$$

CASE STUDY - Παράδειγμα Σχεδιασμού Άριστου χαρτοφυλακίου αποτελούμενο από μετοχές και αξιόγραφο μηδενικού κινδύνου.

Στον Πίνακα παρουσιάζονται οι μέσες εβδομαδιαίες αποδόσεις των μετοχών του ΟΤΕ και ΔΕΗ (έστω Α και Β), για τις τελευταίες 6 εβδομάδες. Εάν τα ποσοστά συμμετοχής σε ένα χαρτοφυλάκιο είναι 70% για τη μετοχή του ΟΤΕ (Α) και 30% για τη μετοχή της ΔΕΗ (Β) να υπολογίσετε :

- Την Απόδοση, και το κίνδυνο χαρτοφυλακίου
- Τα ποσοστά συμμετοχής που ελαχιστοποιούν τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου

(ΟΤΕ) Α	(ΔΕΗ) Β
3.12%	1.49%
-3.76%	-3.83%
3.56%	3.16%
2.28%	1.19%
1.01%	2.26%
1.89%	2.12%

W	70.00%	30.00%
R _{εβδομαδιαία}	1.35%	1.07%
R _{ετήσια}	70.18%	55.42%
σ _{εβδομαδ}	2.66%	2.49%
σ _{ετήσια}	19.19%	17.97%
R _{AB}	0.02	
R _{portfolio}	65.75%	
σ _{portfolio}	14.57%	

Κανόνας Υπολογισμού:

Ετήσιο R = Εβδομ. R*52

Ετήσιο σ = Εβδομ. σ*sqrt(52)

Προκειμένου την εύρεση του χαρτοφυλακίου αποτελούμενο από 2 μετοχές με το χαμηλότερο κίνδυνο,

$$w_B^m = \frac{\sigma_A^2 - \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{AB} \sigma_A \sigma_B}$$

w _A ^G	45.90%
w _B ^G	54.10%
E _{rP}	62.20%
σ _p ²	2.06%
min σ _{portfolio}	14.36%

Εστω ότι η χωρίς κίνδυνο απόδοση είναι i=4%. Να βρείτε το άριστο χαρτοφυλάκιο έστω Μ και να σχεδιάσετε τη Γραμμή Κεφαλαιαγοράς.

w _A ^O	55.36%	$w_B^O = \frac{[R_A - i]\sigma_B^2 - (R_B - i)\text{Cov}_{AB}}{[R_A - i]\sigma_B^2 + [R_B - i]\sigma_A^2 + \{[R_A - i] + [R_B - i]\}\text{Cov}_{AB}}$
w _B ^O	44.64%	
E _{rP}	63.59%	$w_A^O = 1 - w_B^G$
σ _p ²	2.11%	
σ _{portfolio} ^M	14.53%	

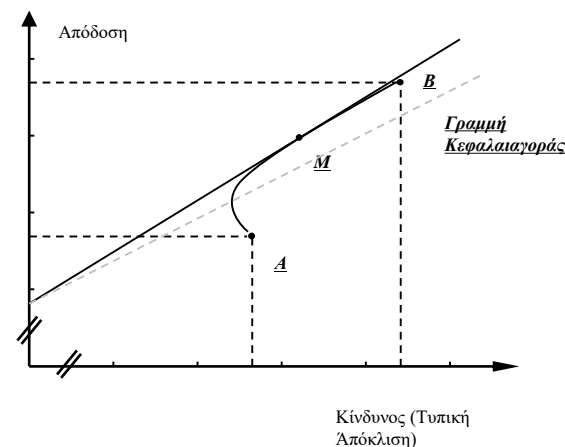
Εστω ότι ένας επενδυτής στοχεύει σε απόδοση 6%, επιλέγοντας ένα χαρτοφυλάκιο επί της γραμμής κεφαλαιαγοράς. Να βρείτε τη σύνθεση του Χαρτοφυλακίου Ζ, το ποίο θα αποτελείται από τις μετοχές Α και Β και το χωρίς κίνδυνο αξιόγραφο. Επιπλέον να υπολογίσετε τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου Ζ. Να επαναληφθούν οι υπολογισμοί εάν ο επενδυτής στοχεύει σε απόδοση 7%.

R _{p-target}	6.0%	Wm	93.97%	wA	52.0180%
				wb	41.9520%
		Wrf	6.0300%		
		TOTAL			100.0000%
σ _{p-target} ^M	13.66%				

$$R_p = W_i R_i + (1 - W_i) R_M \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W_i = \frac{R_p - R_M}{R_i - R_M}$$

$$\sigma_p = (1 - W_i) \sigma_M$$



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Συμβουλευτείτε το αρχείο EXCEL που έχει αναρτηθεί στο eclass για τους σχετικούς υπολογισμούς

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1.

Τα στοιχεία παρακάτω αφορούν τις μετοχές X και Ψ.

	Μετοχή X	Μετοχή Ψ
Απόδοση (%)	15	35
σ (%)	20	40

Ο συντελεστής συσχέτισης είναι 0,50.

Να υπολογιστεί η απόδοση και ο κίνδυνος για τα χαρτοφυλάκια:

A) 50% X και 50% Ψ.

B) 25% X και 75% Ψ

ΑΣΚΗΣΗ 2

Η αναμενόμενη απόδοση από το χαρτοφυλάκιο της αγοράς (M) είναι 12%, ο δε κίνδυνος του M (σ) είναι 10%. Η ετήσια απόδοση από τα ετήσια ομόλογα του δημοσίου είναι 4%. Ένας επενδυτής έχει 100.000€, και εξετάζει να επενδύσει το 50% των κεφαλαίων του στο M, και το υπόλοιπο στο χωρίς κίνδυνο ομόλογο του Δημοσίου. Να υπολογιστεί η αναμενόμενη απόδοση και ο κίνδυνος του παραπάνω χαρτοφυλακίου.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Θεωρείστε μία αγορά στην οποία διαπραγματεύονται μόνο οι μετοχές του Οργανισμού Τηλεπικοινωνιών Ελλάδος – ΟΤΕ, και της Εθνικής Τράπεζας της Ελλάδος – ΕΤΕ, οι οποίες έχουν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά (οι αποδόσεις αφορούν την περίοδο 28/11/2008 – 20/11/2009, για τις μετοχές της ΕΤΕ και ΟΤΕ. Ο πίνακας των τιμών βρίσκεται στο αρχείο excel στο e-class):

A. Βρείτε το χαρτοφυλάκιο των μετοχών ΕΤΕ και ΟΤΕ με τον ελάχιστο κίνδυνο, και υπολογίστε την αναμενόμενη απόδοσή και κίνδυνο του χαρτοφυλακίου αυτού.

B. Δείξτε γραφικά το σύνολο των εφικτών χαρτοφυλακίων που προκύπτουν από το συνδυασμό των μετοχών ΕΤΕ και ΟΤΕ.

Γ. Βρείτε το άριστο χαρτοφυλάκιο όταν έχουμε τη δυνατότητα να δανείσουμε ή να δανειστούμε στο χωρίς κίνδυνο χρεόγραφο, και υπολογίστε την αναμενόμενη απόδοση και κίνδυνό του.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ - ΑΡΘΡΟΓΡΑΦΙΑ

Βιβλιογραφία

- Δράκος, Α., Καραθανάσης, Γ., 'Χρηματοοικονομική Διοίκηση των Επιχειρήσεων', Κεφάλαιο 17
Σπυρου, Σ., 'Αγορές Χρήματος και Κεφαλαίου', Κεφάλαιο 6
Bodie, Z., Kane, A., Marcus, A., 'Investments', Κεφάλαιο 8
Elton, E., Gruber, M., Brown, S., Goetzmann, W., 'Modern Portfolio Theory Investment Analysis', Ενότητα 1

Αρθρογραφία

- Markowitz, H., (1952) 'Portfolio Selection', Journal of Finance
Merton, R., (1972) 'An Analytical Deviation of the Efficient Portfolio Frontier', Journal of Financial and Quantitative Analysis, No 4, 1851-1872
Keith, S., (1968) 'Alternative Procedures for revising Investment Portfolios', Journal of Financial and Quantitative Analysis, No 4, 371-403
Lintner, J., (1965) 'The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets', Review of Economics and Statistics, 128, 13-17