

Value At Risk (VaR)

Το VaR ενός αξιόγραφου ή χαρτοφυλακίου είναι η μέγιστη πιθανή ζημία για κάποια περίοδο, για κάποιο στατιστικό διάστημα εμπιστοσύνης (π.χ. 95% ή 99%).

Για τον υπολογισμό του VaR χρησιμοποιούμε ημερήσιες μεταβολές τιμών και τυπικές αποκλίσεις ημερησίων αποδόσεων.

1

Η τυπική απόκλιση των ημερησίων αποδόσεων μπορεί να υπολογιστεί (προσεγγιστικά) από την τυπική απόκλιση ετήσιων αποδόσεων μέσω της σχέσης:

$$\sigma_{\text{ΗΜΕΡΑΣ}} = \sigma_{\text{ΕΤΗΣΙΑ}} \times \sqrt{252}$$

όπου 252 θεωρείται ότι είναι ο αριθμός των εργάσιμων ημερών στο έτος.

Π.χ. εάν η ετήσια τυπική απόκλιση απόδοσης μετοχής είναι 30% η ημερήσια τυπική απόκλιση είναι:

$$\sigma_{\text{ΗΜΕΡΑΣ}} = \frac{\sigma_{\text{Ετήσια}}}{\sqrt{252}} = \frac{0,3}{15,87} = 1,89\%$$

2

Υπολογισμός VaR

Μέθοδος 1. Υποθέτουμε κανονική κατανομή αποδόσεων χαρτοφυλακίου.

Έστω ότι έχετε €100.000 σε μετοχή με $\sigma_{\text{ΕΤΗΣΙΑ}} = 35\%$.

Θέλετε να υπολογίσετε το VaR 10 ημερών στο 95%.

Δηλαδή θέλετε να υπολογίσετε την πιθανή σωρευτική ζημία 10 ημερών που μπορεί να έχετε βάσει των ιστορικών αποδόσεων της μετοχής.

3

Η τυπική απόκλιση αποδόσεων της μετοχής για διάστημα 10ημέρου υπολογίζεται ως:

$$\sigma_{10\text{ΗΜΕΡΟΥ}} = \frac{\sigma_{\text{ΕΤΗΣΙΑ}}}{\sqrt{252}} \times \sqrt{10} = 6,97\%$$

$$\text{VaR}_{10\text{ΗΜΕΡΟΥ}, 95\%} = 6,97\% \times 1,64 \times 100.000 = \text{€}11.431$$

$$\text{VaR}_{\text{ΗΜΕΡΑΣ}, 95\%} = \frac{0,35}{\sqrt{252}} \times 1,64 \times 100.000 = \text{€}3.616$$

Όπου 1,64 είναι ο αριθμός των τυπικών αποκλίσεων κανονικής κατανομής για διάστημα 95%.

4

VaR ομολόγων

Για το VaR επιτοκιακών προϊόντων υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση μεταβολών της τιμής τους, βάσει της τροποποιημένης διάρκειας.

$$\Delta P = - MD \times P \times \Delta y$$

όπου MD είναι η τροποποιημένη διάρκεια του ομολόγου, P είναι η αξία του ομολόγου και y είναι η απόδοση έως τη λήξη (Yield to Maturity).

5

Επειδή η τιμή των ομολόγων εξαρτάται αποκλειστικά από τις μεταβολές στα επιτόκια, η τυπική απόκλιση της ποσοστιαίας μεταβολής της τιμής ενός ομολόγου ισούται με:

$$\sigma_P = MD \times \sigma_y$$

όπου σ_P είναι η τυπική απόκλιση του ομολόγου και σ_y είναι η τυπική απόκλιση της απόδοσης.

Εάν έχουμε χαρτοφυλάκιο ομολόγων αξίας €1 εκατ. με MD = 5 και ημερήσιο $\sigma_y=0,2\%$, το VaR 10ημέρου στο 99% είναι:

$$1.000.000 \times 5 \times 0,2\% \times \sqrt{10} \times 2,33 = €73.681$$

6

Μέθοδος 2. Προσομοίωση Monte Carlo

- Δημιουργούμε τυχαίες τιμές μεταβολών τιμών και επιτοκίων, οι οποίες να έχουν παρόμοια κατανομή με τις πραγματικές.
 - Αξιολογούμε το χαρτοφυλάκιο σήμερα.
 - Αξιολογούμε το χαρτοφυλάκιο χρησιμοποιώντας κάθε μία από τις τυχαίες τιμές.
 - Οι μεταβολές στην αξία του χαρτοφυλακίου οι οποίες προκύπτουν είναι η κατανομή από την οποία υπολογίζουμε το VaR.
- Π.χ. εάν έχουμε 1.000 τυχαίες μεταβολές, τότε η 10η χειρότερη μεταβολή είναι το VaR στο 1%.

7

Μέθοδος 3. Ιστορική Προσομοίωση

Εξετάζουμε τις ημερήσιες ζημιές που θα προέκυπταν εάν είχαμε το χαρτοφυλάκιο κατά τη διάρκεια κάποιας πρόσφατης περιόδου (π.χ. 1 έτος). Παράδειγμα: έστω οι εξής % ιστορικές μεταβολές τιμών μετοχής. Έχετε €100.000 στη μετοχή.

ημέρα	% μεταβολή	κέρδος/ζημία
t-1	1,5	1.500
t-2	-0,6	-600
t-3	1	1.000
t-4	-1,2	-1.200
t-5	-7	-7.000
t-6	5,5	5.500
t-7	-6,2	-6.200

Εάν θεωρήσουμε 300 ιστορικές παρατηρήσεις, η 3η χειρότερη ζημία είναι το VaR ημέρας στο 99%. Η μέθοδος αυτή δεν κάνει καμία υπόθεση για την κατανομή των μεταβολών των τιμών.

8

Παράδειγμα: Έστω χαρτοφυλάκιο ομολόγων €1 εκατ. με MD = 6 και ημερήσιο $\sigma=0,1\%$. Πουλάτε 7 ΣΜΕ ονομαστικής αξίας €100.000 με MD = 7. Υπολογίστε το 10ήμερο VaR (99%) του χαρτοφυλακίου υποθέτοντας κανονική κατανομή αποδόσεων.

$$N_f = \left(\frac{TVS_0}{FVF_0} \right) \frac{D_s}{D_f}$$

$TVS_0 = \frac{7 \times 100.000 \times 7}{6} = €816.667$ είναι η αντισταθμισμένη θέση

Δηλαδή $1.000.000 - 816.667 = €183.333$ είναι η ανοικτή θέση

$$VaR = 183.333 \times 6 \times 0,1\% \times \sqrt{10} \times 2,33 = €8.105$$

9

Expected Shortfall (ES) ή Conditional VaR (CVaR)

Είναι η μέση ζημία για κάποιο διάστημα εμπιστοσύνης.

Π.χ. έστω ότι κρατήσατε μετοχή 100 ημέρες και οι 5 χειρότερες ημερήσιες αποδόσεις ήταν

-2%, -2,8%, -3%, -4,1% και -5%.

Το VaR ημέρας στο 5% ισούται με 2%.

Το ES στο 5% ισούται με

$(2\% + 2,8\% + 3\% + 4,1\% + 5\%) / 5 = 3,38\%$ της αξίας του χαρτοφυλακίου

10

Για τον υπολογισμό του ES ακολουθείτε τα εξής βήματα:

1. Καθορίζετε το επίπεδο εμπιστοσύνης
2. Υπολογίζετε τη μέση ζημία για αυτό το διάστημα

Εάν υποθέσουμε κανονική κατανομή, το ES ισούται με $2,06\sigma$ επί την αξία του χαρτοφυλακίου.

Π.χ. έστω ότι έχετε χαρτοφυλάκιο αξίας €10.000 του οποίου οι αποδόσεις ακολουθούν κανονική κατανομή με ημερήσιο $\sigma=3\%$.

$$VaR \text{ ημέρας } 95\% = 1,64 \times 3\% \times 10.000 = €492$$

$$ES \text{ } 95\% = 2,06 \times 3\% \times 10.000 = €618$$

11