

Ασκήσεις Εμπέδωσης της Θεωρίας

Άσκηση 1

Στον $\mathbb{R}^3$ θεωρήστε τα σύνολα

$$S_1 = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}, \quad S_2 = \{(x, y, z) : x + y + z = 1\}.$$

εξηγήστε ποιο από τα δύο είναι διανυσματικός υπόχωρος.

Άσκηση 2

Να υπολογίσετε το πλήθος των πράξεων που θα απαιτούνται χρησιμοποιώντας αποτελεσματικό τρόπο για τον υπολογισμό του γινομένου τριών πινάκων

$$X = ABC,$$

όπου

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times 10}, \quad C \in \mathbb{R}^{10 \times n}.$$

Παρατήρηση: Προσέξτε την σειρά εκτέλεσης. Έχει διαφορά!

Άσκηση 3

Έστω ο πίνακας

$$C = Auv^T B,$$

όπου οι $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι πίνακες και $u, v \in \mathbb{R}^n$ είναι διανύσματα.

Το γινόμενο στο δεξί μέλος μπορεί να υπολογιστεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, για παράδειγμα ως

$$A(u(v^T B))$$

ή ως

$$A((uv^T)B),$$

καθώς και με άλλες δυνατές ομαδοποιήσεις των γινομένων. Ποιος είναι ο ταχύτερος τρόπος υπολογισμού, δηλαδή ποια σειρά πράξεων απαιτεί το μικρότερο πλήθος πράξεων, όταν το n είναι μεγάλο;

Άσκηση 4

Έστω υπόχωρος $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

(α') Να αποδείξετε ότι

$$S \cap S^\perp = \{0\}.$$

(β') Γιατί το συμπέρασμα αυτό δεν λέει ότι $S^\perp = \{0\}$;

(γ') Δώστε γεωμετρική ερμηνεία όταν S είναι ευθεία ή επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 5

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^n \times n$ που έχει μόνο μια γραμμικά ανεξάρτητη στήλη.

1. Πόσες μη μηδενικές ιδιοτιμές έχει;
2. Περιγράψτε αναλυτικά πως θα αποθηκεύατε έναν τέτοιο πίνακα στον ΗΥ και πως υπολογίζατε το γινόμενο Ax για οποιοδήποτε $x \in \mathbb{R}^n$.

Άσκηση 6

Έστω δύο υπόχωροι $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ που είναι ορθογώνιοι.

- (α') Ποιο είναι το μόνο διάνυσμα που μπορεί να ανήκει και στους δύο;
- (β') Στον $\mathbb{R}^3$, αν S είναι επίπεδο που περνά από την αρχή, τι γεωμετρική μορφή έχει το $S^\perp$;
- (γ') Αν S είναι ευθεία που περνά από την αρχή, τι μορφή έχει το $S^\perp$;

Άσκηση 7

Έστω μη μηδενικό x και οποιοδήποτε y . Η προβολή του y πάνω στο x είναι

$$y_{\parallel} = \frac{x \cdot y}{\|x\|^2} x, \quad y_{\perp} = y - y_{\parallel}.$$

- (α') Εξηγήστε γιατί $y_{\perp} \perp x$.
- (β') Κατανοήστε ότι αυτή η διάσπαση είναι το βασικό βήμα της Gram-Schmidt;
- (γ') Αν στη Gram-Schmidt προκύψει $q_k = 0$, τι μαθαίνουμε για το αρχικό v_k ;

Άσκηση 8

Έστω

$$A = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]$$

και $x = (x_1, \dots, x_n)^T$. Εξηγήστε γιατί

$$Ax = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n.$$

Χρησιμοποιώντας μόνο αυτή την παρατήρηση:

- (α') εξηγήστε γιατί κάθε Ax ανήκει στο $R(A)$,
- (β') ερμηνεύστε το $R(A)$ ως το σύνολο όλων των δυνατών εξόδων του γραμμικού μετασχηματισμού $x \mapsto Ax$,
- (γ') εξηγήστε γιατί η $\text{rank}(A)$ μετρά πόσες ανεξάρτητες κατευθύνσεις μπορεί να παράγει ο A .

Άσκηση 9

Για το σύστημα

$$Ax = b$$

εξηγήστε γιατί

$$\text{υπάρχει λύση} \iff b \in R(A).$$

Στη συνέχεια σκεφτείτε γιατί η ερώτηση 'έχει λύση το $Ax = b$ ' είναι ουσιαστικά γεωμετρική ερώτηση για το αν το b ανήκει σε έναν συγκεκριμένο υπόχωρο. Σε ποιον;

Άσκηση 10

Έστω $x \neq 0$ και

$$Ax = 0.$$

- (α') Τι σημαίνει αυτό για τον x ως στοιχείο του $N(A)$;
- (β') Γιατί ένας μη μηδενικός $N(A)$ σημαίνει ότι δύο διαφορετικές εισοδοι μπορούν να δώσουν την ίδια έξοδο;
- (γ') Γιατί αυτή η παρατήρηση συνδέεται φυσικά με τη μη αντιστρεψιμότητα ενός τετραγωνικού πίνακα;

Άσκηση 11

Για $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, θεωρήστε τους

$$R(A), \quad R(A^T), \quad N(A), \quad N(A^T).$$

Εξηγήστε εννοιολογικά τις σχέσεις

$$N(A) = R(A^T)^\perp, \quad N(A^T) = R(A)^\perp.$$

Γιατί είναι φυσικό οι γραμμές του A να είναι ορθογώνιες σε κάθε διάνυσμα που μηδενίζει ο A ;

Άσκηση 12

Έστω συμμετρικός πίνακας A .

- (α') Τι σημαίνει ότι
$$x^T Ax > 0 \quad \text{για κάθε } x \neq 0;$$
- (β') Πώς συνδέεται αυτό με το πρόσημο των ιδιοτιμών του A ;
- (γ') Ποιο είναι το εσωτερικό γινόμενο που παράγεται από την παραπάνω σχέση για κάθε τέτοιο πίνακα;
- (δ') Τι χαλάει και δεν έχουμε εσωτερικό γινόμενο όταν ο A δεν είναι συμμετρικός η/και θετικά ορισμένος;

Άσκηση 13

Έστω $A \in \mathbb{R}^{nm}$, $n > m$. Αν $A = U\Sigma V^T$ η ανάλυση SVD του, να βρείτε συναρτήσει αυτής τα ιδιοδιανύσματα και ιδιοτιμές των πινάκων $A^T A$, AA^T .

Άσκηση 14

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη και

$$\nabla f(p) = 0.$$

- (α') Γιατί το p είναι μόνο υποψήφιο ακρότατο;
- (β') Ποιες τρεις διαφορετικές γεωμετρικές συμπεριφορές μπορεί να εμφανιστούν κοντά στο p ;
- (γ') Πώς βοηθούν οι ιδιοτιμές του Hessian να διακρίνουμε τις περιπτώσεις;
- (δ') Γιατί μια μηδενική ιδιοτιμή του Hessian μπορεί να κάνει το κριτήριο δεύτερης τάξης ασαφές;

Άσκηση 15

Σε κρίσιμο σημείο p , η ανάπτυξη Taylor δίνει ως κυρίαρχο όρο δεύτερης τάξης

$$\frac{1}{2}h^T \nabla^2 f(p)h.$$

Εξηγήστε:

- (α') γιατί θετικά ορισμένος Hessian αντιστοιχεί σε τοπικό μολ,
- (β') γιατί αρνητικά ορισμένος Hessian αντιστοιχεί σε ανεστραμμένο μολ,
- (γ') γιατί μη ορισμένος Hessian δημιουργεί σαγματική συμπεριφορά,
- (δ') πώς συνδέεται έτσι η θεωρία βελτιστοποίησης με τη θεωρία συμμετρικών πινάκων.

Άσκηση 16

Θέλουμε ακρότατα της $f(x, y)$ υπό τον περιορισμό

$$g(x, y) = 0.$$

- (α') Εξηγήστε γιατί, σε κανονικό σημείο του περιορισμού, η εφαπτομένη στην καμπύλη $g = 0$ είναι κάθετη στο ∇g .
- (β') Γιατί στο δεσμευμένο ακρότατο δεν πρέπει να υπάρχει εφαπτόμενη κατεύθυνση κατά την οποία η f αυξάνει ή μειώνεται σε πρώτη τάξη;

(γ') Από τα παραπάνω, εξηγήστε γιατί προκύπτει

$$\nabla f = \lambda \nabla g.$$

(δ') Γιατί πρέπει να ελεγχθούν χωριστά σημεία όπου $\nabla g = 0$.

(ε') Γιατί η συνθήκη Lagrange είναι αναγκαία και όχι από μόνη της ικανή για να χαρακτηρίσει το σημείο ως μέγιστο ή ελάχιστο.