1.ΑΡΙΣΤΑ ΚΑΤΑ PARETO ΣΗΜΕΙΑ

Τα αριστα κατα παρετο σημεια,η διανυσματικά μέγιστα, ορίζονται πάντα ως προς μια συναρτηση στοχου της μορφης $f(x)=(f_1(x), f_2(x),..., f_k(x)), x \in R^n$,και ενα εφικτο συνολο $S \subset R^n$. Η συνηθης ερμηνεια ειναι οτι

- Τα σημεια x περιγραφουν κατανομες των πορων
- η συναρτηση $f_i(x)$ ειναι η συναρτηση οφελους του παικτη $i=1,..,k$
- το εφικτο συνολο S περιγραφει τους περιορισμους που θετουν στις κατανομες των πορων η τεχνολογια,οι διαθεσιμοι poροι,και η διαθεσιμη πληροφορηση

Ενα σημειο θα λεγεται εφικτο εαν και μονο εαν ανηκει στο εφικτο συνολο S

ΟΡΙΣΜΟΣ

Το σημείο x ειναι καλύτερο κατά παρετο απο το σημειο $x*$ εαν μπορουμε να χωρισουμε τους παικτες σε δυο συνολα B, I τετοια ωστε

• καθε παικτης στο B προτιμα το x απο το $x*$

$$f_i(x) > f_i(x*), \forall i \in B$$

• καθε παικτης στο I ειναι αδιαφορος αναμεσα στο x και το $x*$

$$f_i(x) = f_i(x*), \forall i \in I$$

• Το B περιεχει εναν τουλαχιστο παικτη.Το I μπορει να ειναι και κενο.

ΟΡΙΣΜΟΣ

το εφικτο σημειο $x*$ ειναι αριστο κατα παρετο της συναρτησης f στο εφικτο συνολο S εαν δεν υπαρχει κανενα εφικτο σημειο καλυτερο κατα παρετο απο αυτο.

$x \in S$ *και* $f_i(x) \geq f_i(x*)$ *για καθε* $i \in \{1,..,k\}$ *συνεπαγεται*

$f_i(x) = f_i(x*)$ *για καθε* $i \in \{1,..,k\}$

- Τα αριστα κατα παρετο σημεια(pareto effcient points,pareto optimal points) ονομαζονται και διανυσματικα μεγιστα(vector maxima)
- Οταν η διασταση του πεδιου τιμων της συναρτησης στοχου $f: S \to R^k$ ειναι $k=1$ τοτε τα διανυσματικα μεγιστα ειναι τα συνηθη ολικα μεγιστα.

- Ο συμβολισμος $\max f(x), x \in S$ θα σημαινει οτι αναζητουμε τα διανυσματικα μεγιστα της συναρτησης στοχου f στο εφικτο συνολο S.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1
MORE IS BETTER, NO EXTERNALITIES

Θεωρουμε οικονομια με

•δυο παικτες ,τους Α και Β

• ενα αγαθο

•Η συνολικη διαθεσιμη ποσοτητα του αγαθου ειναι 1

Η μεταβλητη Α θα συμβολιζει το επιπεδο καταναλωσης του παικτη Α

Η μεταβλητη Β θα συμβολιζει το επιπεδο καταναλωσης του παικτη Β

Οι κατανομες των πορων θα ειναι τα ζευγη (A, B)

•Οι προτιμησεις των παικτων περιγραφονται απο τις συναρτησεις οφελους

Παικτης Α $U(A,B) = A$

Παικτης Β $V(A,B) = B$

Οι προτιμήσεις αυτές εκφράζουν τις υποθέσεις της απληστίας(greed,more is better), και της αδιαφορίας για τους άλλους (no externalities).

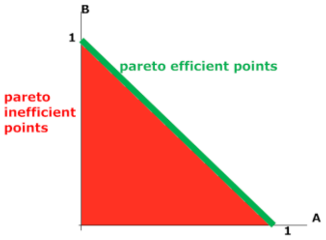
•Με αυτα τα δεδομενα,η συναρτηση στοχου θα ειναι
$f(A,B) = \left(U(A,B), V(A,B)\right) = (A,B)$

•Με αυτα τα δεδομενα,το εφικτο συνολο θα ειναι

$S = \{(A,B) : A + B \le 1, A \ge 0, B \ge 0\}$

Τα σπαταλα κατα παρετο σημεια ειναι ολα αυτα που δεν εξαντλουν τους διαθεσιμους πορους $\{(A,B) : A + B < 1, A \ge 0, B \ge 0\}$.Καθε τετοιο σημειο επιδεχεται βελτιωση και για τους δυο παικτες.

Τα αριστα κατα παρετο σημεια ειναι ολα αυτα που εξαντλουν τους διαθεσιμους πορους $\{(A,B) : A + B = 1, A \ge 0, B \ge 0\}$. Καθε τετοιο σημειο επιδεχεται βελτιωση για τον ενα παικτη μονο σε βαρος του αλλου.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2
IDEAL POINTS,NO EXTERNALITIES

•Το εφικτο συνολο ειναι $S = \{(A,B) : A+B \leq 1, A \geq 0, B \geq 0\}$

• οι προτιμησεις ειναι

Παικτης Α $\quad U(A,B) = -\left(A-\alpha\right)^2$

Παικτης Β $\quad V(A,B) = -\left(B-\beta\right)^2$

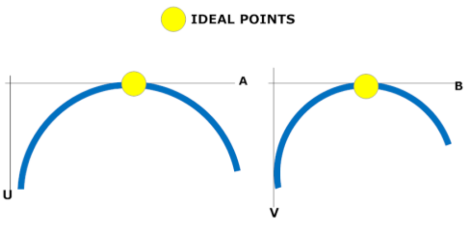
οπου τα $\alpha,\beta > 0, \alpha+\beta \leq 1$ ειναι παραμετροι,που ονομαζονται ιδεωδη σημεια για τους παικτες Α,Β αντιστοιχως.

Οι προτιμησεις αυτες εκφραζουν τις υποθεσεις της αδιαφοριας για τους αλλους,και

της υπαρξης ενος ιδεωδους σημειου καταναλωσης για καθε παικτη.

Η χρησιμοτητα του καθε παικτη εχει μοναδικο μεγιστο στο ιδεωδες σημειο του,και αυξανεται οσο πλησιαζει προς αυτο.

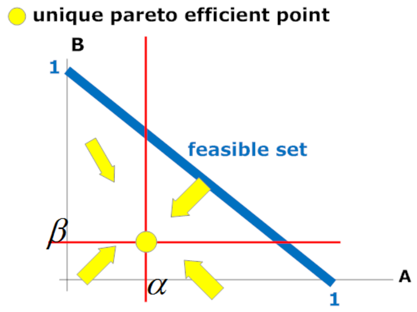
Η υποθεση $\alpha,\beta > 0, \alpha+\beta \leq 1$ σημαινει οτι τα ιδεωδη σημεια ειναι εφικτα και συμβατα μεταξυ τους.



•η συναρτηση στοχου θα ειναι
$f(A,B) = \left(U(A,B), V(A,B)\right) = (-\left(A-\alpha\right)^2, -\left(B-\beta\right)^2)$

Το μοναδικο αριστο κατα παρετο σημειο ειναι το $(A,B) = (\alpha,\beta)$,παρολο που δεν εξαντλει τους διαθεσιμους πορους.

Τα σπαταλα κατα παρετο σημεια ειναι ολα τα υπολοιπα,ακομα και αυτα που εξαντλουν τους διαθεσιμους πορους,διοτι καθε τετοιο σημειο επιδεχεται βελτιωση και για τους δυο παικτες,προς την κατευθυνση των βελων



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3
MORE IS BETTER,ONE-SIDED POSITIVE EXTERNALITIES

•Το εφικτο συνολο ειναι $S=\{(A,B): A+B\leq 1, A\geq 0, B\geq 0\}$

• οι προτιμησεις ειναι

Παικτης Α $\quad U(A,B)=\alpha\log A+B, 0<\alpha<1$

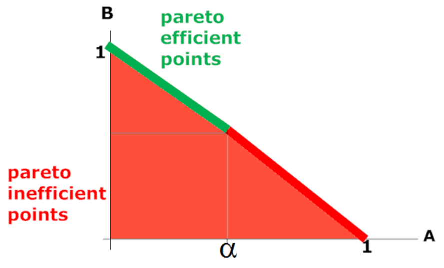
Παικτης Β $\quad V(A,B)=B$

Οι προτιμησεις αυτες εκφραζουν τις υποθεσεις της απληστειας και,για τον Α, της φιλιας προς τους αλλους (positive externalities).

•η συναρτηση στοχου θα ειναι $f(A,B)=\big(U(A,B),V(A,B)\big)=(\alpha\log A+B,B)$

Καθε σημειο παρετο θα εξαντλει τους πορους(εαν $A+B<1$τοτε η αυξηση του Β οφελει και τους δυο παικτες),αρα θα εχουμε $B=1-A, U=\alpha\log A+1-A, V=1-A$

Παραγωγιζοντας βρισκουμε οτι $\dfrac{dU}{dA}=\dfrac{\alpha}{A}-1, \dfrac{dV}{dA}=-1$,αρα τα σημεια παρετο θα ειναι αυτα οπου $\dfrac{dU}{dA}=\dfrac{\alpha}{A}-1\geq 0$ (στα υπολοιπα και οι δυο παικτες συμφωνουν στην μειωση του Α).



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 MORE IS BETTER,TWO-SIDED NEGATIVE EXTERNALITIES

•Το εφικτο συνολο ειναι $S=\{(A,B): A+B\leq 1, A\geq 0, B\geq 0\}$

• οι προτιμησεις ειναι

Παικτης Α $U(A,B) = A - 2B$

Παικτης Β $V(A,B) = B - 3A$

Οι προτιμησεις αυτες εκφραζουν τις υποθεσεις της απληστειας και της εχθροτητας προς τους αλλους (negative externalities)

•η συναρτηση στοχου θα ειναι $f(A,B) = \big(U(A,B), V(A,B)\big) = (A-2B, B-3A)$

Συμφωνα με τον ορισμο,ενα εφικτο σημειο (A_0, B_0) θα ειναι αριστο κατα παρετο εαν και μονο εαν καθε λυση (A,B)των ανισοτητων

$$\begin{aligned} &U(A,B) \geq U(A_0,B_0) \Leftrightarrow A - 2B \geq A_0 - 2B_0 \\ &V(A,B) \geq V(A_0,B_0) \Leftrightarrow B - 3A \geq B_0 - 3A_0 \\ &A + B \leq 1, A \geq 0, B \geq 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

ικανοποιει $U(A,B) = U(A_0,B_0), V(A,B) = V(A_0,B_0)$

Ολα τα σημεια $(A_0,B_0) \gg (0,0)$ ειναι ΣΠΑΤΑΛΑ κατα παρετο,διοτι οι ανισοτητες (1) ικανοποιουνται και απο εφικτα σημεια σαν το

$(A,B) = (A_0 - \varepsilon, B_0 - \varepsilon) \gg (0,0), \varepsilon > 0$

$$U(A,B) = A - 2B = A_0 - 2B_0 + \varepsilon > A_0 - 2B_0 = U(A_0,B_0)$$
$$V(A,B) = B - 3A = B_0 - 3A_0 + 2\varepsilon > B_0 - 3A_0 = V(A_0,B_0)$$

στα οποια εχουμε βελτιωση και για τους δυο παικτες.

Ολα τα σημεια της μορφης $(A_0, 0), 0 \leq A_0 \leq 1$ ειναι ΑΡΙΣΤΑ κατα παρετο διοτι λυνοντας τις ανισοτητες (1) ως προς το σημειο $(A_0, 0)$

$$\begin{aligned} &U(A,B) \geq U(A_0,0) \Leftrightarrow A - 2B \geq A_0 \\ &V(A,B) \geq V(A_0,0) \Leftrightarrow B - 3A \geq -3A_0 \\ &A + B \leq 1, A \geq 0, B \geq 0 \end{aligned}$$

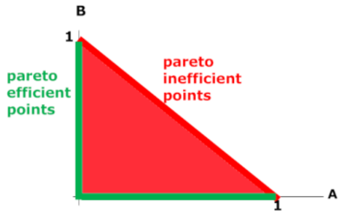
βρισκουμε οτι η μοναδικη λυση τους ειναι $(A,B) = (A_0, 0)$.

ολα τα σημεια της μορφης $(0, B_0), 0 \leq B_0 \leq 1$) ειναι ΑΡΙΣΤΑ κατα παρετο διοτι

λυνοντας τις ανισοτητες (1) ως προς το σημειο $(0, B_0)$

$U(A,B) \geq U(0,B_0) \Leftrightarrow A-2B \geq -2B_0$
$V(A,B) \geq V(0,B_0) \Leftrightarrow B-3A \geq B_0$
$A+B \leq 1, A \geq 0, B \geq 0$

βρισκουμε οτι η μοναδικη λυση τους ειναι $(A,B)=(0,B_0)$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 MORE IS BETTER,NONRIVALRY IN CONSUMPTION

•Το εφικτο συνολο ειναι $S=\{(A,B): A \leq 1, B \leq 1, A \geq 0, B \geq 0\}$

• οι προτιμησεις ειναι

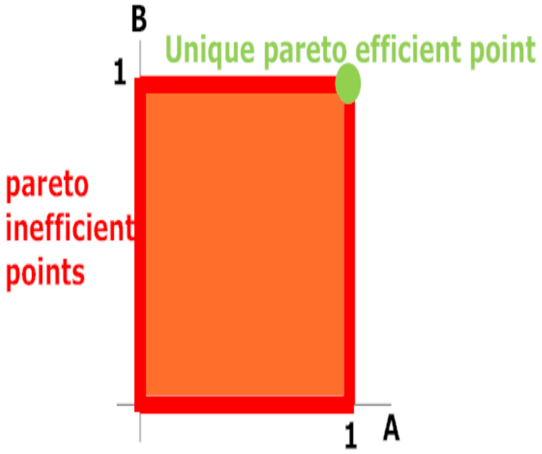
Παικτης A $U(A,B)=A$

Παικτης B $V(A,B)=B$

•η συναρτηση στοχου θα ειναι $f(A,B)=\big(U(A,B),V(A,B)\big)=(A,B)$

•το προβλημα διανυσματικης μεγιστοποιησης ειναι
max $f(A,B)=(A,B)$ subject to $A \leq 1, B \leq 1, A \geq 0, B \geq 0$

$$\max f(A,B)=(A,B) \text{ subject to } A \leq 1, B \leq 1, A \geq 0, B \geq 0$$



2.ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΣΕ ΣΥΝΗΘΗ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ(SCALARIZATION)

Θα κατασκευασουμε <u>συνηθη</u> προβληματα μεγιστοποιησης της μορφης

ΟΡΙΣΜΟΣ *Παραμετρικο προβλημα*

$$\max_{x} \; g(x,\theta), \text{subject to } x \in C(\theta)$$

ισοδυναμα με το αρχικο προβλημα διανυσματικης μεγιστοποιησης.

ορισμος *Παραμετροποιηση(scalarization)*

Το παραμετρικο προβλημα ειναι ισοδυναμο με το αρχικο προβλημα εαν ικανοποιει τις αρχες της πληροτητας και της ορθοτητας

Ορισμος ***πληροτητα***

καθε αριστο κατα παρετο σημειο $x*$ της f στο S ειναι και λυση του παραμετρικου προβληματος για καποια τιμη των παραμετρων θ.

Ορισμος ***ορθοτητα***

Για καθε τιμη των παραμετρων θ ,καθε λυση του αντιστοιχου παραμετρικου προβληματος ειναι και αριστο κατα παρετο σημειο της f στο S

Θα συζητησουμε δυο τετοια παραμετρικα προβληματα

1.ελαχιστα εγγυημενα επιπεδα ευημεριας

2.γραμμικη συναρτηση κοινωνικης ευημεριας

2.1 ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΕΓΓΥΗΜΕΝΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΕΥΗΜΕΡΙΑΣ

Σε καθε προβλημα διανυσματικης μεγιστοποιησης

$$\max\ f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)), \text{subject to } x \in S$$

αντιστοιχουμε κ τον αριθμο συνηθη παραμετρικα προβληματα μεγιστοποιησης της μορφης

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{problem } P_i(\theta) \\ \max\ f_i(x) \text{ subject to } f_j(x) \geq \theta_j, \forall j \neq i, \mathrm{x} \in \mathrm{S} \end{array}} \qquad (2)$$

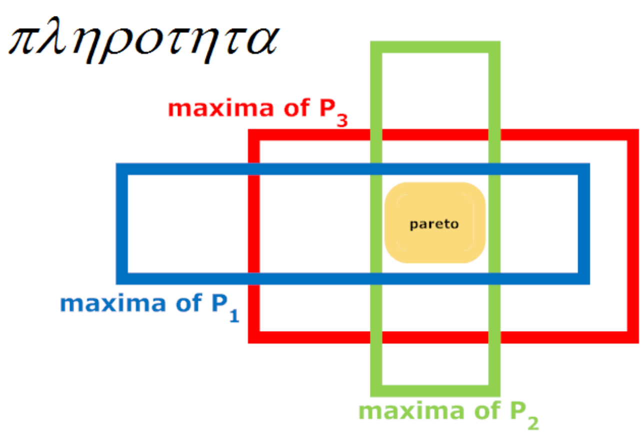
ΘΕΩΡΗΜΑ *πληροτητα*

Εαν το σημειο $x^* \in S$ *ειναι αριστο κατα παρετο τοτε ειναι μεγιστο ολων των* $P_i(\theta)$ *για τις τιμες των παραμετρων* $\theta = f(x^*)$

Αποδειξη θα υποθεσουμε οτι το σημειο x^* ειναι αριστο κατα παρετο, αλλα οχι και μεγιστο του $P_1(\theta)$ και θα καταληξουμε σε μια αντιφαση. Εαν το σημειο x^* δεν ηταν μεγιστο του $P_1(\theta)$ τοτε θα υπηρχε σημειο x εφικτο στο $P_1(\theta)$ και καλυτερο απο το x^*, δηλαδη τετοιο ωστε

$$\begin{array}{l} f_1(x) > f_1(x^*) \\ f_2(x) \geq f_2(x^*) \\ \vdots \\ f_k(x) \geq f_k(x^*) \\ x \in S \end{array}$$

Αντιφαση στην υποθεση οτι το σημειο x^* ειναι αριστο κατα παρετο.

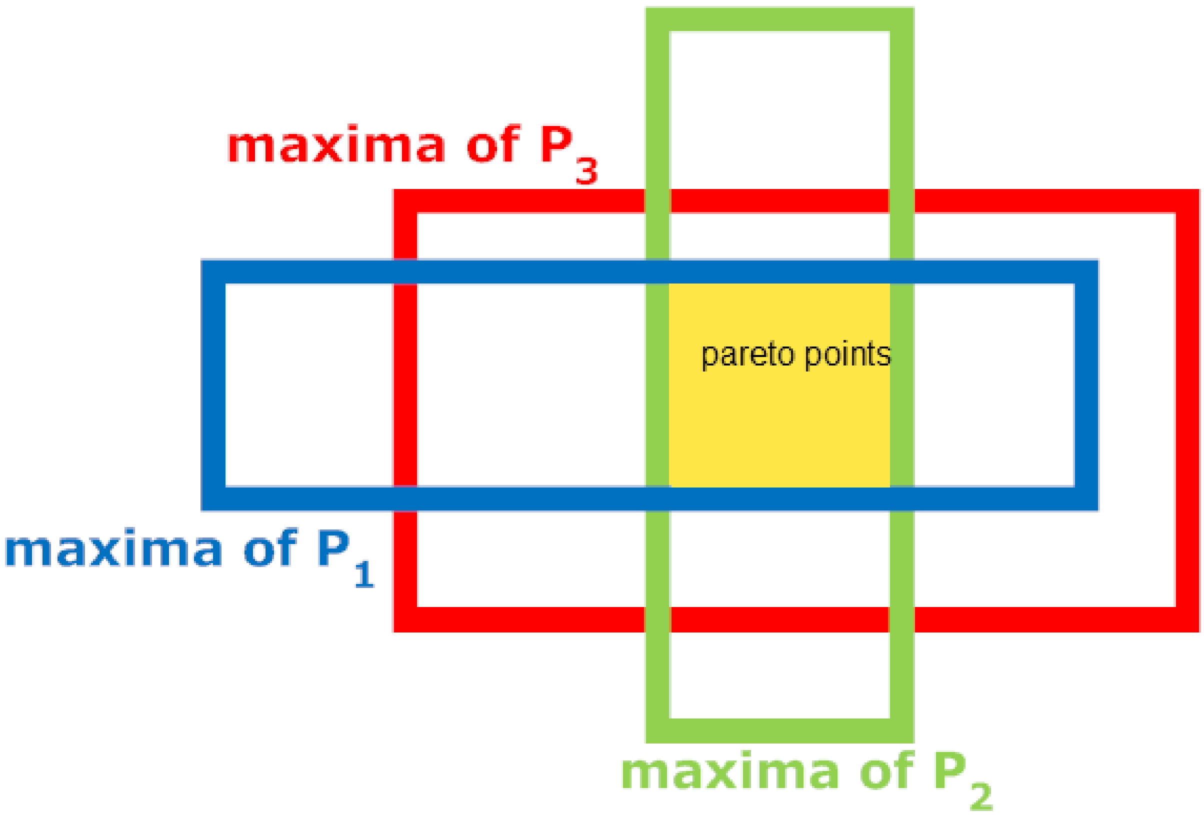


ΘΕΩΡΗΜΑ *ορθοτητα*

Εαν το σημειο $x^* \in S$ ειναι μεγιστο ολων των $P_i(\theta)$ για καποιες τιμες των παραμετρων θ τοτε ειναι και αριστο κατα παρετο

Αποδειξη θα υποθεσουμε οτι το σημειο x^* ειναι μεγιστο ολων των $P_i(\theta)$ αλλα δεν ειναι αριστο κατα παρετο,και θα καταληξουμε σε μια αντιφαση.Εαν το σημειο x^* δεν ηταν αριστο κατα παρετο,θα υπηρχε $x \in S$ και παικτης κ τετοια ωστε $f_k(x) > f_k(x^*),\ f_i(x) \geq f_i(x^*) \forall i \neq k$.Επειδη το σημειο $x^* \in S$ ειναι μεγιστο του $P_k(\theta)$ θα εχουμε $f_k(x) > f_k(x^*),\ f_i(x) \geq f_i(x^*) \geq \theta_i \forall i \neq k$ δηλαδη το x ειναι εφικτο σημειο του $P_k(\theta)$ και αποδιδει περισσοτερο απο το μεγιστο του $P_k(\theta)$.

πληροτητα και ορθοτητα



υπολογισμος ολων των σημειων παρετο με τη μεθοδο ελαχιστων εγγυημενων επιπεδων ευημεριας

λυνω ολα τα προβληματα μεγιστοποιησης $P_1(\theta), P_2(\theta), \dots, P_k(\theta)$ για ολες τις τιμες των παραμετρων θ

Σε ορισμενες περιπτωσεις αρκει να λυσουμε μονο ενα απο τα προβληματα $P_i(\theta)$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 **κατ'ουσιαν μοναδικα μεγιστα για καποιο** P_i
Υπαρχει παικτης ,εστω ο παικτης 1,τετοιος ωστε για ολες τις τιμες των παραμετρων θ **,και για οποιαδηποτε δυο μεγιστα** m, μ **του** $P_1(\theta)$, $f(m) = f(\mu)$

ΘΕΩΡΗΜΑ *ορθοτητα με κατ'ουσιαν μοναδικα μεγιστα*

Εαν το P_1 εχει κατ'ουσιαν μοναδικα μεγιστα,τοτε για ολες τις τιμες των παραμετρων θ ,καθε μεγιστο του $P_1(\theta)$ ειναι και αριστο κατα παρετο

Αποδειξη θα υποθεσουμε οτι το σημειο $x*$ ειναι μεγιστο του $P_1(\theta)$ αλλα δεν ειναι αριστο κατα παρετο,και θα καταληξουμε σε μια αντιφαση.Εαν το σημειο $x*$ δεν ηταν αριστο κατα παρετο,θα υπηρχε $x \in S$ και καποιος παικτης ,εστω ο 2, τετοια ωστε

$$\begin{aligned} & f_1(x) \geq f_1(x*) \\ & f_2(x) > f_2(x*) \\ & f_3(x) \geq f_3(x*) . \\ & \vdots \\ & f_k(x) \geq f_k(x*) \end{aligned}$$

Επειδη το σημειο $x*$ λυνει το προβλημα $P_1(\theta)$ θα εχουμε

$$\begin{aligned} & f_1(x) \geq f_1(x*) \\ & f_2(x) > f_2(x*) \geq \theta_2 \\ & f_3(x) \geq f_3(x*) \geq \theta_3 \\ & \vdots \\ & f_k(x) \geq f_k(x*) \geq \theta_k \end{aligned}$$

δηλαδη

- το σημειο x ανηκει στο εφικτο συνολο του προβληματος $P_1(\theta)$ και
- αποφερει τουλαχιστον οσο και το μεγιστο του $P_1(\theta)$,

αρα

- το σημειο x ειναι και αυτο μεγιστο του $P_1(\theta)$,

αρα

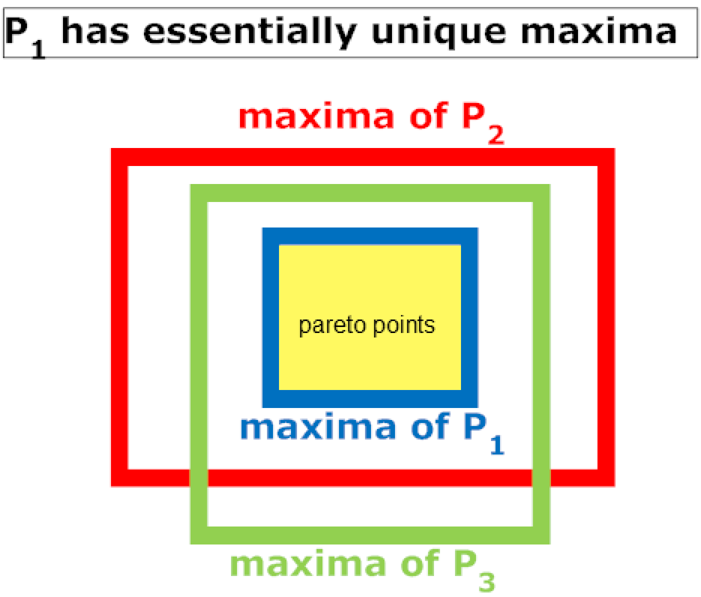
- για τα δυο αυτα μεγιστα $x, x*$ του $P_1(\theta)$ ισχυει οτι $f(x) = f(x*)$

δηλαδη

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_1(x*) \\ f_2(x) &= f_2(x*) \\ f_3(x) &= f_3(x*) \\ &\vdots \\ f_k(x) &= f_k(x*) \end{aligned}$$

αντιφαση στην ανισωση $f_2(x) > f_2(x*)$.

- Το θεωρημα ορθοτητας με κατ'ουσιαν μοναδικα μεγιστα,μαζι με το θεωρημα πληροτητας, δειχνουν οτι η αναζητηση αριστων κατα παρετο συνισταται στην αναζητηση μεγιστων καποιου $P_i(\theta)$ με κατ'ουσιαν μοναδικα τοπικα μεγιστα



υπολογισμος ολων των σημειων παρετο με τη μεθοδο ελαχιστων εγγυημενων επιπεδων ευημεριας

εστω οτι υπαρχει P_i με κατ'ουσιαν μοναδικα μεγιστα. Τοτε ***λυνω το προβλημα μεγιστοποιησης*** *$P_i(\theta)$* ***για ολες τις τιμες των παραμετρων*** *θ*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

max $f(A,B)=(A,B)$ subject to $A+B\le 1, A\ge 0, B\ge 0$

problem $P_A(\theta)$
max $U(A,B)=A$ subject to
$V(A,B)=B\ge\theta_B$
$A+B\le 1, A\ge 0, B\ge 0$

Το προβλημα $P_A(\theta)$ εχει μοναδικα μεγιστα τα σημεια $(A,B)=(1-\theta_A,\theta_B), 0\le\theta_B\le 1$,αρα η λυση του $P_A(\theta)$ αρκει για να δωσει ολα τα αριστα κατα παρετο σημεια

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

max $f(A,B)=(-(A-\alpha)^2,-(B-\beta)^2)$ subject to $A+B\le 1, A\ge 0, B\ge 0$
parameters $\alpha>0,\beta>0,\alpha+\beta\le 1$

problem $P_A(\theta)$	problem $P_B(\theta)$
max $U(A,B)=-(A-\alpha)^2$ subject to	max $U(A,B)=-(B-\beta)^2$ subject to
$V(A,B)=-(B-\beta)^2\ge\theta_B$	$V(A,B)=-(A-\alpha)^2\ge\theta_A$
$A+B\le 1, A\ge 0, B\ge 0$	$A+B\le 1, A\ge 0, B\ge 0$
solutions(over all θ)	solutions(over all θ)
$A=\alpha, 0\le B\le 1-\alpha$	$0\le A\le 1-\beta, B=\beta$
solutions that are pareto optima	solutions that are pareto optima
$A=\alpha, B=\beta$	$A=\alpha, B=\beta$

Εδω η λυση ενος απο τα παραμετρικα προβληματα (εστω του $P_A(\theta)$) θα δωσει το μοναδικο σημειο παρετο μαζι με απειρα αλλα σημεια που δεν ειναι αριστα κατα παρετο διοτι ο Β δεν ειναι αδιαφορος μεταξυ αυτων.Επιβαλλεται η λυση και των δυο παραμετρικων προβληματων για να βρεθουν τα σημεια παρετο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

max $f(A,B)=(\alpha\log A+B, B)$ subject to $A+B\le 1, A\ge 0, B\ge 0$
parameters $0<\alpha<1$

problem $P_A(\theta)$

max $U(A,B)=\alpha\log A+B$ subject to

$V(A,B)=B\geq\theta_B$

$A+B\leq 1, A\geq 0, B\geq 0$

solutions

$$(A,B)=\begin{cases}(1-\theta_B,\theta_B) & if \quad \alpha+\theta_B<1\\ (\alpha,1-\alpha) & if \quad \alpha+\theta_B\geq 1\end{cases}$$

solutions that are pareto optima

all

Εδω η λυση ενος απο τα παραμετρικα προβληματα (του $P_A(\theta)$) για καθε θ ειναι μοναδικη,αρα η λυση του $P_A(\theta)$ αρκει για να δωσει ολα τα αριστα κατα παρετο σημεια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

max $f(A,B)=(A-2B,B-3A)$ subject to $A+B\leq 1, A\geq 0, B\geq 0$

problem $P_A(\theta)$

max $U(A,B)=A-2B$ subject to

$V(A,B)=B-3A\geq\theta_B$

$A+B\leq 1, A\geq 0, B\geq 0$

solutions

$$(A,B)=\begin{cases}(0,\theta_B) & if \quad 0\leq\theta_B\leq 1\\ \left(-\frac{\theta_B}{3},0\right) & if \quad -3\leq\theta_B\leq 0\end{cases}$$

solutions that are pareto optima

all

Εδω η λυση ενος απο τα παραμετρικα προβληματα (του $P_A(\theta)$) για καθε θ ειναι μοναδικη,αρα η λυση του $P_A(\theta)$ αρκει για να δωσει ολα τα αριστα κατα παρετο σημεια.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 ολα τα ασθενως αριστα κατα παρετο σημεια ειναι και αριστα κατα παρετο

ΟΡΙΣΜΟΣ

Το σημειο x *ειναι ομοφωνως καλυτερο κατα παρετο απο το σημειο* x^* *εαν ολοι προτιμουν το* x *απο* x^* .

$f_i(x) > f_i(x^*)$ *για καθε* $i \in \{1,..,k\}$

ΟΡΙΣΜΟΣ

το εφικτο σημειο x^* *ειναι ασθενως αριστο κατα παρετο της συναρτησης* f *στο εφικτο συνολο* S *εαν δεν υπαρχει κανενα εφικτο σημειο ομοφωνως καλυτερο κατα παρετο απο αυτο.*

$f_i(x) > f_i(x^*)$ *για καθε* $i \in \{1,..,k\}$ *συνεπαγεται* $x \notin S$

ΘΕΩΡΗΜΑ *ορθοτητα οταν ολα τα ασθενως αριστα κατα παρετο σημεια ειναι και αριστα κατα παρετο.*

Εαν ολα τα ασθενως αριστα κατα παρετο σημεια ειναι και αριστα κατα παρετο,τοτε για ολες τις τιμες των παραμετρων θ *,καθε μεγιστο του* $P_1(\theta)$ *ειναι και αριστο κατα παρετο*

Αποδειξη θα υποθεσουμε οτι το σημειο x^* ειναι μεγιστο του $P_1(\theta)$ αλλα δεν ειναι αριστο κατα παρετο,και θα καταληξουμε σε μια αντιφαση.Εαν το σημειο x^* δεν ηταν αριστο κατα παρετο,τοτε δεν θα ηταν και ασθενως αριστο κατα παρετο,αρα θα υπηρχε $x \in S$ τετοιο ωστε

$$
\begin{aligned}
&f_1(x) > f_1(x^*)\\
&f_2(x) > f_2(x^*)\\
&f_3(x) > f_3(x^*)\\
&\vdots\\
&f_k(x) > f_k(x^*)
\end{aligned}
$$

Επειδη το σημειο x^* λυνει το προβλημα $P_1(\theta)$ θα εχουμε

$$
\begin{aligned}
&f_1(x) > f_1(x^*)\\
&f_2(x) > f_2(x^*) \geq \theta_2\\
&f_3(x) > f_3(x^*) \geq \theta_3\\
&\vdots\\
&f_k(x) > f_k(x^*) \geq \theta_k
\end{aligned}
$$

δηλαδη

- το σημειο x ανηκει στο εφικτο συνολο του προβληματος $P_1(\theta)$ και
- αποφερει περισσοτερο απο και το μεγιστο του $P_1(\theta)$

αντιφαση στην υποθεση οτι το σημειο x^* ειναι μεγιστο του $P_1(\theta)$.

υπολογισμος ολων των σημειων παρετο με τη μεθοδο ελαχιστων εγγυημενων επιπεδων ευημεριας

εστω οτι ολα τα ασθενως αριστα κατα παρετο σημεια ειναι και αριστα κατα παρετο Τοτε

λυνω το προβλημα μεγιστοποιησης $P_1(\theta)$ ***για ολες τις τιμες των παραμετρων*** θ

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Μια περιπτωση οπου ολα τα ασθενως αριστα κατα παρετο σημεια ειναι και αριστα κατα παρετο.*

Εστω οτι μπορουμε να χωρισουμε τις n *μεταβλητες* $x_1,..,x_n$ *σε* k *μη κενα συνολα*

$$
\begin{aligned}
&Q^1 = \{x_1^1, x_2^1, ..., x_{n1}^1\}\\
&Q^2 = \{x_1^2, x_2^2, ..., x_{n2}^2\}\\
&\vdots\\
&Q^k = \{x_1^k, x_2^k, ..., x_{nk}^k\}
\end{aligned}
$$

τετοια ωστε

1. $Q_i \bigcap Q_j = \varnothing, \forall i \neq j$

2.Η συναρτηση f_i *εξαρταται μονο απο τις τιμες των μεταβλητων στο συνολο* Q_i *(δεν υπαρχουν εξωτερικοτητες)*

3. Η συναρτηση f_i *ειναι αυστηρως αυξουσα ως προς καθε μεταβλητη στο συνολο* Q_i *(μονοτονικοτητα)*

Εστω επισης οτι το εφικτο συνολο ειναι της μορφης που προκυπτει σε μια οικονομια απο τους περιορισμους των πορων

$$
S = \{x \geq 0, \sum_{i=1}^{k} x_1^i \leq t^1, \sum_{i=1}^{k} x_2^i \leq t^2, ..., \sum_{i=1}^{k} x_n^i \leq t^n\}
$$
$$
\text{parameters } t^1 > 0, ..., t^n > 0
$$

Τοτε καθε ασθενως αριστο κατα παρετο σημειο ειναι και αριστο κατα παρετο

Αποδειξη θα υποθεσουμε οτι το σημειο $x*$ ειναι ασθενως αριστο κατα παρετο αλλα οχι αριστο κατα παρετο,και θα καταληξουμε σε μια αντιφαση.Εαν το σημειο $x*$ δεν ηταν αριστο κατα παρετο,θα υπηρχε $x \in S$ καλυτερο κατα παρετο,δηλαδη θα μπορουσαμε να χωρισουμε τους παικτες σε δυο συνολα $B \neq \varnothing, I$ τετοια ωστε $f_i(x) > f_i(x*), \forall i \in B,\ f_i(x) = f_i(x*), \forall i \in I$.Οριζουμε ενα νεο σημειο y ως εξης

1.Για καθε παικτη i στο συνολο Β αφαιρουμε μια αρκετα μικρη ποσοτητα απο τις θετικες μεταβλητες που τον ενδιαφερουν ετσι ωστε $f_i(x) > f_i(y) > f_i(x*), \forall i \in B$

2.οι μειωσεις των μεταβλητων που ενδιαφερουν τους παικτες στο Β αναδιανεμονται στους παικτες του Ι ως αυξησεις στις μεταβλητες που τους ενδιαφερουν,και αρα $f_i(y) > f_i(x*), \forall i \in I$

3.Το σημειο y ειναι εφικτο($y \in S$) και ομοφωνως καλυτερο απο το $x*$,αντιφαση στην υποθεση οτι το $x*$ ειναι ασθενως αριστο κατα παρετο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

$$\max f(A,B) = (A,B) \text{ subject to } A+B \le 1, A \ge 0, B \ge 0$$

ολα τα ασθενως αριστα κατα παρετο σημεια ειναι και αριστα κατα παρετο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

$$\max f(A,B) = (-\left(A-\alpha\right)^2, -\left(B-\beta\right)^2) \text{ subject to } A+B \le 1, A \ge 0, B \ge 0$$
$$\text{parameters } \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta \le 1$$

Τα ασθενως αριστα κατα παρετο σημεια $A = \alpha, 0 \le B < 1-\alpha$ δεν ειναι αριστα κατα παρετο.

Τα ασθενως αριστα κατα παρετο σημεια $0 \le A < 1-\beta, B = \beta$ δεν ειναι αριστα κατα παρετο.

Οι συναρτησεις δεν ειναι αυστηρως αυξουσες ως προς τις μεταβλητες που ενδιαφερουν τον καθε παικτη

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

$$\max f(A,B) = (\alpha \log A + B, B) \text{ subject to } A+B \le 1, A \ge 0, B \ge 0$$
$$\text{parameters } 0 < \alpha < 1$$

Συμφωνα με την αναλυση της σελιδας 5,ολα τα ασθενως αριστα κατα παρετο σημεια ειναι και αριστα κατα παρετο,παρολο που δεν πληρουνται οι υποθεσεις του θεωρηματος

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

$$\max f(A,B) = (A-2B, B-3A) \text{ subject to } A+B \le 1, A \ge 0, B \ge 0$$

Συμφωνα με την αναλυση της σελιδας 6,ολα τα ασθενως αριστα κατα παρετο σημεια ειναι και αριστα κατα παρετο,παρολο που δεν πληρουνται οι υποθεσεις του θεωρηματος .

2.2 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΕΥΗΜΕΡΙΑΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ *Οριο παρετο*

Το οριο παρετο ορίζεται ως η σχεση μεταξυ των επιπεδων χρησιμοτητας στα σημεια παρετο

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

•Στο προβλημα $\max f(A,B)=(A,B)$ subject to $A+B\le 1, A,B\ge 0$

τα σημεια παρετο ειναι τα $A+B=1, A,B\ge 0$

οι χρησιμοτητες στα σημεια παρετο ειναι $u_A=A, u_B=B=1-A$,και αρα

το οριο παρετο ειναι $u_A+u_B=1, u_A\ge 0, u_B\ge 0$

•Στο προβλημα $\max f(A,B)=(A^2,B^2)$ subject to $A+B\le 1, A,B\ge 0$

τα σημεια παρετο ειναι τα $A+B=1, A,B\ge 0$

οι χρησιμοτητες στα σημεια παρετο ειναι $u_A=A^2, u_B=B^2=(1-A)^2$,και αρα

το οριο παρετο ειναι $u_B=\left(1-\sqrt{u_A}\right)^2, 0\le u_A\le 1$

•Στο προβλημα $f(A,B)=(-(A-\alpha)^2, -(B-\beta)^2)$ subject to $A+B\le 1, A,B\ge 0$

τα σημεια παρετο ειναι τα $A=\alpha, B=\beta$

οι χρησιμοτητες στα σημεια παρετο ειναι $u_A=0, u_B=0$,και αρα

το οριο παρετο ειναι το σημειο $(u_B,u_A)=(0,0)$

ΟΡΙΣΜΟΣ *συνολο εφικτων επιπεδων χρησιμοτητας*

Το συνολο εφικτων επιπεδων χρησιμοτητας ειναι το συνολο ‘κατω απο το οριο παρετο’

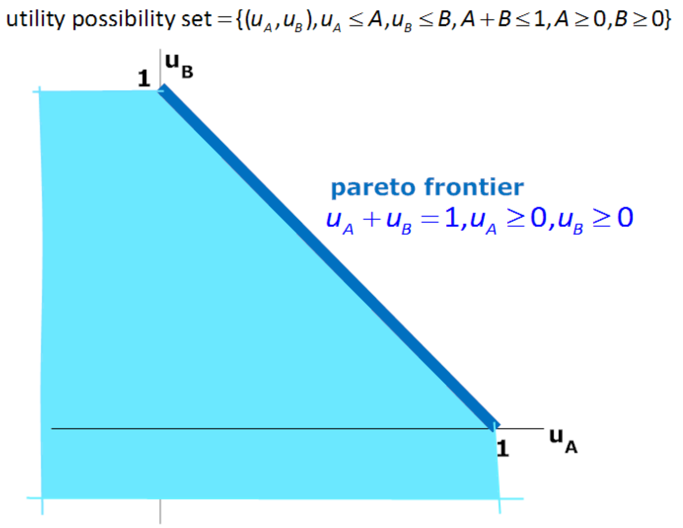
$$\text{utility possibility set} = \bigcup_{x\in S}\{(u_1,\dots,u_k), u_1\le f_1(x),\dots,u_k\le f_k(x)\}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

•Στο προβλημα $\max f(A,B)=(A,B)$ subject to $A+B\le 1, A,B\ge 0$

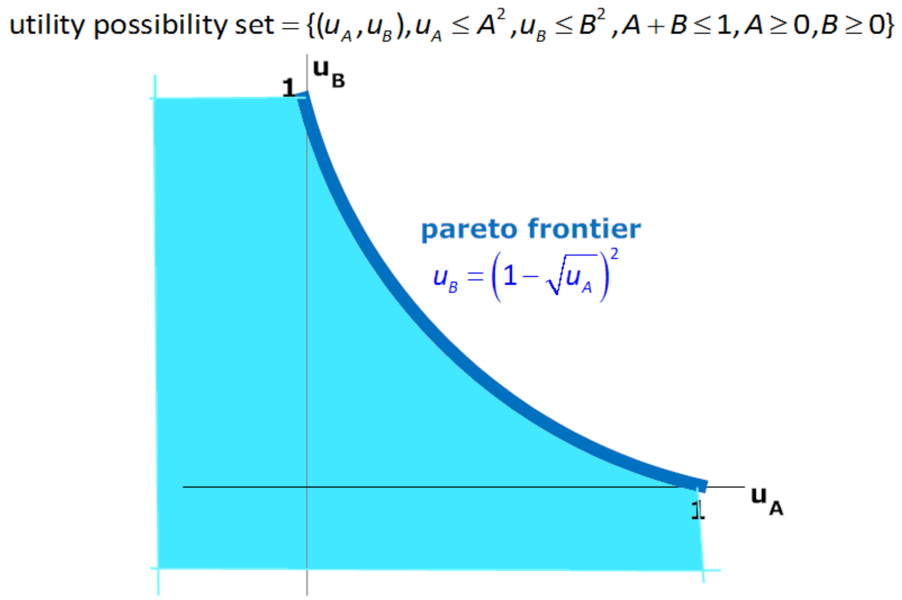
το συνολο εφικτων επιπεδων χρησιμοτητας ειναι

utility possibility set $=\{(u_A,u_B), u_A\le A, u_B\le B, A+B\le 1, A\ge 0, B\ge 0\}$



•Στο προβλημα $\max f(A,B)=(A^2,B^2)$ subject to $A+B\le 1, A,B\ge 0$

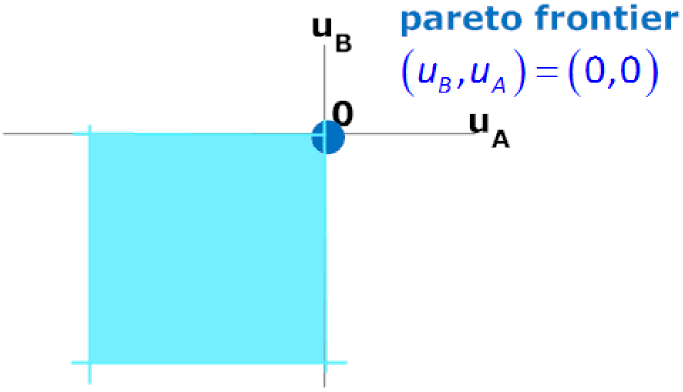
Το συνολο εφικτων επιπεδων χρησιμοτητας ειναι



•Στο προβλημα $f(A,B)=(-\left(A-\alpha\right)^2,-\left(B-\beta\right)^2)$ subject to $A+B\le 1, A,B\ge 0$

Το συνολο εφικτων επιπεδων χρησιμοτητας ειναι

$$\text{utility possibility set} = \{(u_A,u_B), u_A \le -(A-\alpha)^2, u_B \le -(B-\beta)^2, A+B \le 1, A \ge 0, B \ge 0\}$$



ΟΡΙΣΜΟΣ *Μεγιστοποιηση γραμμικης συναρτησης κοινωνικης ευημεριας*

problem $w(\theta)$

max $W(x) = \theta_1 f_1(x) + ... + \theta_k f_k(x)$ subject to $x \in S$

parameters $\theta_1 \ge 0, ..., \theta_k \ge 0, \theta_1 + ... + \theta_k = 1$

ΘΕΩΡΗΜΑ *πληροτητα*

οταν το συνολο των εφικτων επιπεδων καταναλωσης ειναι κυρτο,τοτε καθε αριστο κατα παρετο $x*$ *ειναι και μεγιστο του προβληματος* $w(\theta)$ *για καποιες τιμες των παραμετρων* θ

- το συνολο εφικτων επιπεδων καταναλωσης ειναι κυρτο εαν το εφικτο συνολο ειναι κυρτο και ολες οι συναρτησεις $f_1(x), ..., f_k(x)$ ειναι κοίλες.

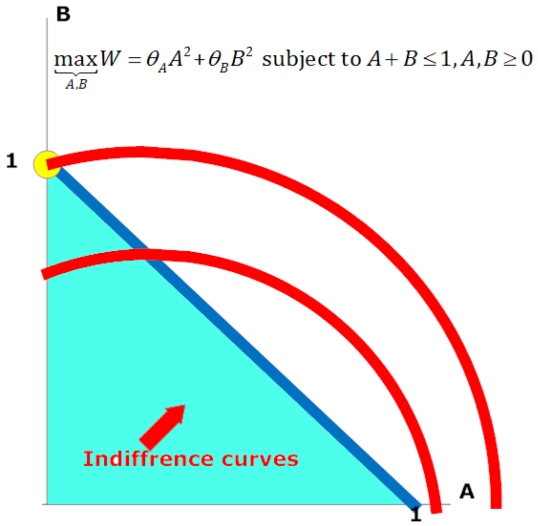
  Η κυρτοτητα ειναι απαραιτητη για να μπορει η μεθοδος της γραμμικης συναρτησης κοινωνικης ευημεριας να υπολογισει ολα τα σημεια παρετο. Στο προβλημα

  max $f(A,B) = (A^2, B^2)$ subject to $A + B \le 1, A, B \ge 0$

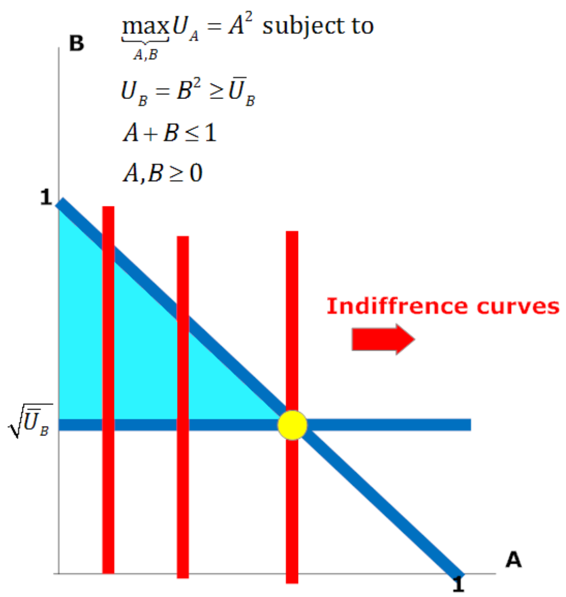
  το συνολο εφικτων επιπεδων καταναλωσης δεν ειναι κυρτο.Οι λυσεις του προβληματος μεγιστοποιησης μιας γραμμικης συναρτησης κοινωνικης ευημεριας

  $$\boxed{W = \theta_A A^2 + \theta_B B^2 \text{ subject to } A + B \le 1, A, B \ge 0}$$

  ειναι ΜΟΝΟ ΔΥΟ σημεια παρετο,τα $(A,B) = (1,0)$ και $(A,B) = (0,1)$



- Η κυρτοτητα ΔΕΝ ειναι απαραιτητη για να μπορει η μεθοδος των ελαχιστων εγγυημενων επιπεδων ευημεριας να υπολογισει ολα τα σημεια παρετο.
  Στο προβλημα $\max f(A,B) = (A^2, B^2)$ subject to $A+B \le 1, A,B \ge 0$,το συνολο εφικτων επιπεδων καταναλωσης δεν ειναι κυρτο.Οι λυσεις του προβληματος μεγιστοποιησης $\max U_A = A^2$ subject to $U_B = B^2 \ge \bar{U}_B, A+B \le 1, A,B \ge 0$ ειναι
  $B = \sqrt{\bar{U}_B}, A = 1 - \sqrt{\bar{U}_B}, 0 \le \bar{U}_B \le 1$,αρα περιγραφουν ολα τα σημεια παρετο.



- Στο προβλημα $\max f(A,B) = (A,B)$ subject to $A+B \le 1, A,B \ge 0$ το συνολο εφικτων επιπεδων καταναλωσης ειναι κυρτο.Οι λυσεις του προβληματος μεγιστοποιησης μιας γραμμικης συναρτησης κοινωνικης ευημεριας

$$\boxed{\max W = \theta_A \mathrm{U} + \theta_B V = \theta_A \mathrm{A} + \theta_B B \text{ subject to } A+B \le 1, A,B \ge 0}$$

ειναι ακριβως τα σημεια παρετο $A+B=1, A,B \ge 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ *ορθοτητα*

Εαν το σημειο $x*$ ειναι μεγιστο του προβληματος $w(\theta)$ για καποιες τιμες των παραμετρων θ ,και

- *ειτε $\theta_i > 0, \forall i$*

- *ειτε $x*$ ειναι το μοναδικο ολικο μεγιστο του προβληματος $w(\theta)$*

τοτε το σημειο $x*$ ειναι και αριστο κατα παρετο

Αποδειξη θα υποθεσουμε οτι το σημειο $x*$ ειναι μεγιστο του προβληματος $w(\theta)$ αλλα οχι αριστο κατα παρετο,και θα καταληξουμε σε μια αντιφαση.Εαν το σημειο $x*$ δεν ηταν αριστο κατα παρετο,θα υπηρχε $x \in S$ καλυτερο κατα παρετο,δηλαδη θα μπορουσαμε να χωρισουμε τους παικτες σε δυο συνολα $B \neq \emptyset, I$ τετοια ωστε $f_i(x) > f_i(x*), \forall i \in B, f_i(x) = f_i(x*), \forall i \in I$.

Στην περιπτωση που $\theta_i > 0, \forall i$ εχουμε $\theta_i f_i(x) > \theta_i f_i(x*), \forall i \in B, \theta_i f_i(x) = \theta_i f_i(x*), \forall i \in I$
Αθροιζοντας βρισκουμε οτι $\sum_{i=1}^k \theta_i f_i(x) > \sum_{i=1}^k \theta_i f_i(x*)$,αντιφαση στην υποθεση οτι το σημειο $x*$ ειναι μεγιστο του προβληματος $w(\theta)$.

Στην περιπτωση που το $x*$ ειναι το μοναδικο ολικο μεγιστο του προβληματος $w(\theta)$,θα πρεπει να εχουμε $\sum_{i=1}^k \theta_i f_i(x) < \sum_{i=1}^k \theta_i f_i(x*)$ (αλλοιως το $x \in S$ θα ηταν και αυτο μεγιστο).Ταυτοχρονα ομως οι ανισοτητες $f_i(x) > f_i(x*), \forall i \in B, f_i(x) = f_i(x*), \forall i \in I$ συνεπαγονται $\sum_{i=1}^k \theta_i f_i(x) \geq \sum_{i=1}^k \theta_i f_i(x*)$,αντιφαση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)ΜΗ ΟΡΘΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

$\max f(A,B) = (A,B)$ subject to $A \leq 1, B \leq 1, A \geq 0, B \geq 0$

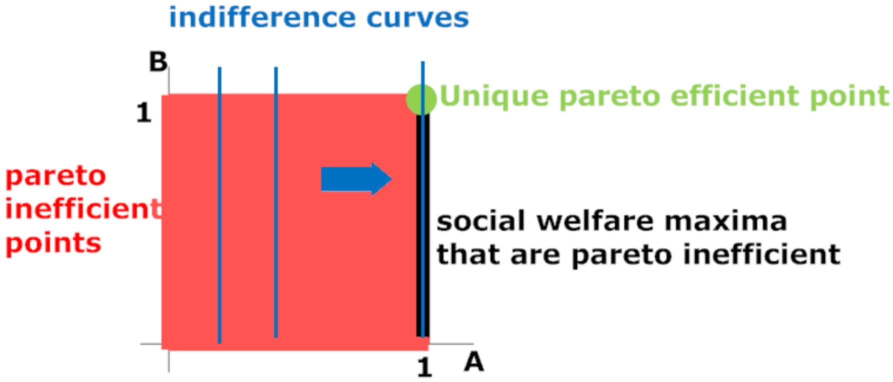
το συνολο εφικτων επιπεδων καταναλωσης ειναι κυρτο.

Οι λυσεις του προβληματος μεγιστοποιησης μιας γραμμικης συναρτησης κοινωνικης ευημεριας οταν $\theta_B = 0$

$$\boxed{\max W = A \text{ subject to } A \leq 1, B \leq 1, A \geq 0, B \geq 0}$$

ειναι τα σημεια $A = 1, 0 \leq B \leq 1$.Απο αυτα μονο το $A = 1, B = 1$ ειναι αριστο κατα παρετο.

$\max W = A$ subject to $A \leq 1, B \leq 1, A \geq 0, B \geq 0$



υπολογισμος ολων των σημειων παρετο με τη μεθοδο της γραμμικης συναρτησης κοινωνικης ευημεριας

λυνω το προβλημα μεγιστοποιησης $w(\theta)$ ***για ολες τις τιμες των παραμετρων*** θ

- το προβλημα ορθοτητας στην περιπτωση που καποια παραμετρος ειναι ιση με το μηδεν και υπαρχουν πολλαπλα μεγιστα μπορει να λυθει με παραιτερω μεγιστοποιησεις της συναρτησης κοινωνικης ευημεριας σε καταλληλα επιλεγμενα υποσυνολα του εφικτου συνολου .