$$\underline{\phi(x_i, y_j)} = \phi(x_i)^T \phi(x_j) = \underline{x_i^T x_j}$$

$$K(x_i, x_j) = \begin{pmatrix} \|x_1\|^2 & (x_1, x_2) & \cdots & (x_1, x_2) \\ (x_2, x_1) & \|x_2\|^2 & & \\ & & \ddots & \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\phi(x, y) = \phi(x)^T \phi(y) = (\underline{x}^T y + c)^\beta \rightarrow$$

$$\phi(x, y) = \underline{e^{-\frac{\|x-y\|}{2\sigma}}} \rightarrow$$

Έστω ο ταυτοτικός πυρήνας (1). Τι σημαίνει να κάνω PCA στον ταυτοτικό πυρήνα

$$\underline{\{x_1, x_2, \ldots x_m\} \quad x_i \in \mathbb{R}^n}$$

$$X = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

SVD(X)

$$X \in \mathbb{R}^{n,m}$$

$$X \overset{SVD}{=} \underline{U} \Sigma \underline{V}^T$$

$$\underline{X^T X} = V \Sigma U^T U \Sigma V^T = \underline{V \Sigma^2 V^T}$$

$$\underline{X^T X} \in \mathbb{R}^{m,m}$$

Συμμ. + θετ. ημι ορισμ.

$$\underline{XX^T} = U\Sigma V^T V \Sigma U^T = U\Sigma^2 U^T \qquad \underline{XX^T} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

$$\mathrm{rank}(XX^T) = m$$

$m = 2 \qquad n = 100$

$$x_i = \begin{pmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \end{pmatrix} \qquad (i = 1..100)$$

$$\underline{X^T X} = \begin{bmatrix} \text{---} & \vec{x}_1 & \text{---} \\ \text{---} & \vec{x}_2 & \text{---} \\ \text{---} & \vec{x}_m & \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^T x_1 & x_1^T x_2 \\ & \end{bmatrix} =$$

Γενικά ο πίνακας K του πυρήνα εί

$$K = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle & \cdots & \langle x_1, x_n\rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle x_n, x_1\rangle & \cdots & \cdots & \langle x_n, x_n\rangle \end{pmatrix}$$

G.

$$F \xrightarrow{PCA}$$

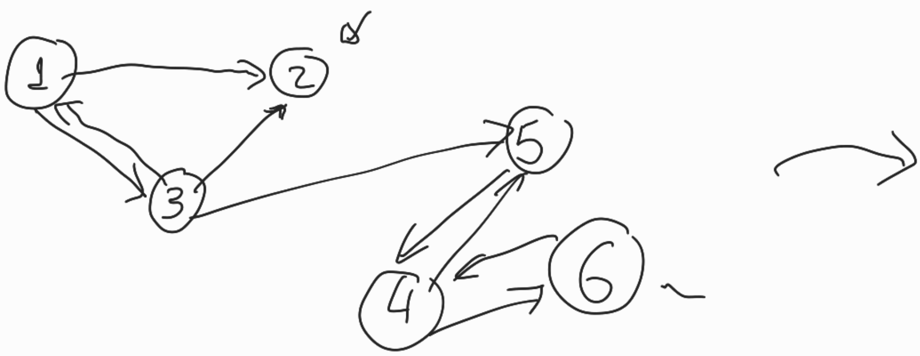
$$\text{span}\langle x_1, x_2, \dots x_m\rangle \qquad \text{span}\langle v_1, v_2, \dots v_m\rangle$$

$$\sum a_i x_i \quad \sum b_i x_i \dots \quad \sum w_i x_i$$

$$\sim v_i$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_1^T x_2 + a_3 x_2^T x_2$$

Page Ranking



$$P = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \rightsquigarrow \hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac12 & \frac12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac13 & \frac13 & 0 & 0 & \frac13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac12 & \frac12 \\ 0 & 0 & 0 & \frac12 & 0 & \frac12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \hat{\hat{P}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac12 & \frac12 & 0 & 0 & 0 \\ \frac16 & \frac16 & \frac16 & \frac16 & \frac16 & \frac16 \\ \frac13 & \frac13 & 0 & 0 & \frac13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac12 & \frac12 \\ 0 & 0 & 0 & \frac12 & 0 & \frac12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \hat{\hat{P}} = \hat{P} + v e^T$$

$$v = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^T = (1, 1, \dots)$$

$$\bar{P} = a \hat{\hat{P}} + (1-a) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac1n & \cdots & \frac1n \\ \frac1n & & \frac1n \\ \vdots & & \vdots \\ \frac1n & \cdots & \frac1n \end{pmatrix}}_{E}$$

Av $e = (1, 1, \dots 1)$ $\leftarrow$ $v =$

$$E = \frac{1}{n} e e^T$$

$$\bar{P} x = \left(a \hat{\hat{P}} + (1-a) \frac{1}{n} e e^T\right) x$$

$$e^T x = 1 \quad \underline{\sum x_i} = 2.$$

$$\bar{P}x = (a\hat{\hat{P}}x + (1-a)\frac{2}{n} \cdot e$$

$$\hat{\hat{P}} = \hat{P} + d v^T \Rightarrow \bar{P} = a\hat{\hat{P}} + (1-a)\underline{e v^T} =$$

Το διάνυσμα d έχει 1 ή 0 ως στοιχεία 1 στην θέση i αν η γραμμή i είναι dangling node

$$\pi^T \bar{P} = 1 \pi^T \quad \text{(αριστερό ιδιοδιάνυσμα)}$$

$$Ax = \lambda x \quad \text{(δεξια ιδιοδιανύσματα του } A\text{)}$$

$$y^T A = \lambda y^T \quad \text{(αριστερα '' του } A\text{)}$$

Πάντα σε έναν στοχαστικό κατα γραμμές πίνακα το δεξί ιδιοδιάνυσμα της μεγαλύτερης ιδιοτιμής (1) είναι το

$$X = \begin{pmatrix} | \\ | \\ | \end{pmatrix}$$