Στα προηγούμενα παρατηρήσαμε ότι το VaR δεν είναι γενικά συνεκτικό καθώς δεν ικανοποιεί γενικά την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι αυτό συνάδει με το ότι δεν μπορεί γενικά να έρθει σε μορφή που συνάδει με κάποιου είδους υποκειμενική αποστροφή ως προς τον κίνδυνο. Αυτό φαίνεται να συμβαίνει επειδή εκ κατασκευής αγνοεί τα "ακραίως καταστροφικά ενδεχόμενα" που αναπαρίστανται αριστερά του $q_X(\alpha)$. Ίσως τέτοιου είδους αγνόηση είναι αποφεύξιμη μέσω κατασκευής μέτρου κινδύνου που λαμβάνει "ταυτόχρονα" υπ' όψη τα $VaR_X(u)$, $\forall u \leq \alpha$. Ένας τρόπος να γίνει κάτι τέτοιο είναι ο παρακάτω.

Γ. Expected Shortfall

Όπως και προηγουμένως έστω $\alpha \in (0,1)$.

Ορισμός. Το Expected Shortfall του X σε επίπεδο σημαντικότητας α ορίζεται ως
$$ES_X(\alpha) := -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q_X(u)\,du = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_X(u)\,du. \quad \square$$

Δηλαδή το $ES_X(\alpha)$ προκύπτει από την "ισοποιημένη" σύμφωνα με το α ολοκλήρωση όλων των VaR του X για κάθε επίπεδο σημαντικότητας μικρότερο ή ίσο του α. Όπως και προηγουμένως για τροποποίηση του παραπάνω, χρήσιμη για συγκρίσεις στο ζήτημα της βέλτιστης επιλογής είναι η παρακάτω, που αναλόγως απαιτεί την ύπαρξη του μ_X.

Τροποποίηση.
$$ES^*_X(\alpha) := \mu_X + ES_X(\alpha) = \mu_X + \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_X(u)\,du$$
$$= \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha [\mu_X + VaR_X(u)]\,du = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR^*_X(u)\,du. \quad \square$$

Σχόλια:

1. Εφόσον εξαιτίας της 3 (προηγούμενες σημειώσεις), $u \leq \alpha \Rightarrow q_X(u) \leq q_X(\alpha) \Rightarrow -q_X(u) \geq -q_X(\alpha) \Rightarrow VaR_X(u) \geq VaR_X(\alpha)$ έχουμε ότι
$$ES_X(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_X(u)\,du \geq \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_X(\alpha)\,du$$
$$= \frac{VaR_X(\alpha)}{\alpha}\int_0^\alpha du = VaR_X(\alpha), \text{ οπότε } \forall \alpha \in (0,1)$$

το $ES_x(\alpha)$ είναι 'συντηρητικότερο' του $VaR_x(\alpha)$.

2. Όταν υπάρχουν τα μ_x, σ_x, έχουμε $q_x(\alpha) = q_{\sigma_x Z_x+\mu_x}(\alpha)$

$= \sigma_x q_{Z_x}(\alpha) + \mu_x \Rightarrow VaR^*_x(\alpha) = \mu_x - q_x(\alpha) = \mu_x - \sigma_x q_{Z_x}(\alpha) + \mu_x =$

$\sigma_x VaR_{Z_x}(\alpha)$, $\forall \alpha \in (0,1)$, και επομένως $ES^*_x(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR^*_x(u)du$

$= \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \sigma_x VaR_x(u)du = \sigma_x \frac{-1}{\alpha}\int_0^\alpha q_{Z_x}(u)du$. Επομένως αναλόγως με την

περίπτωση του VaR, όταν οι κατανομές των τίτλων είναι σε λόγω συλλογή αυτών όλες στην ελλειπτική οικογένεια με πεπερασμένη διακύμανση, και επειδή όταν $\alpha < 1/2$, $q_x(u) < 0$ $\forall u \leq \alpha$, και για κάθε x, ενώ εξαιτίας της τυποποίησης το $q_x(u)$ είναι ανεξάρτητο της μεταβλητής βελτιστοποίησης στο [*], και εδώ, βέλτιστη επιλογή μέσω του $ES_x(\alpha)$ είναι ισοδύναμη με βέλτιστη επιλογή βάσει της τυπικής απόκλισης.

3. Εξαιτίας του $VaR_0(u) = 0$, $\forall u \leq \alpha$, έχουμε ότι $ES_0(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_0(u)du$ $= \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha 0\,du = 0$, επομένως ικανοποιείται η τυποποίηση.

4. Εξαιτίας του ότι $\forall \lambda \geq 0$, $VaR_{\lambda x}(u) = \lambda VaR_x(u)$ $\forall u \leq \alpha$, $ES_{\lambda x}(\alpha) =$

$= \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_{\lambda x}(u)du = \lambda \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_x(u)du = \lambda ES_x(\alpha)$, επομένως ικανοποιείται η θετική ομογένεια.

5. Εξαιτίας του ότι όταν $x \leq y \Rightarrow VaR_x(u) \geq VaR_y(u)$ $\forall u \leq \alpha$,

$ES_x(\alpha) \geq ES_y(\alpha)$, από την μονοτονία του ολοκληρώματος, οπότε ικανοποιείται και η ιδιότητα της μονοτονίας.

6. Εξαιτίας του ότι $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $VaR_{x+\lambda}(u) = VaR_x(u) - \lambda$, $\forall u \leq \alpha$

έχουμε ότι $ES_{X+\lambda}(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_{X+\lambda}(u)du = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha (VaR_X(u)-\lambda)du =$

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_X(u)du - \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \lambda du = ES_X(\alpha) - \frac{\alpha\lambda}{\alpha} = ES_X(\alpha) - \lambda,$$

ικανοποιείται και η ιδιότητα της αναλλοίωσης.

7. Είναι δυνατόν να αποδείξουμε ότι ικανοποιείται και η ιδιότητα της υποπροσθετικότητας, κάτι το οποίο εκφεύγει του εύρους των διαλέξεων. Μπορούμε όμως να αποκτήσουμε μια ένδειξη αυτού χρησιμοποιώντας το (αντι-)παράδειγμα που εξετάσαμε για την απόρριψη της ευλόγου ιδιότητας στο VaR. Σε αυτό έχουμε ότι,

$$ES_X(0.1) = ES_Y(0.1) = -\frac{1}{0.1}\int_0^{0.1} q_X(u)du = -\frac{1}{0.1}\left[\int_0^{0.09} -9\,du + \int_{0.09}^{0.1} 1\,du\right]$$
$$= \frac{9}{0.1}0.09 - 0.01 =$$

$8 > -1 = VaR_X(0.1) = VaR_Y(0.1)$ κάτι που συμφωνεί με το σχόλιο 1.

Επίσης $ES_{X+Y}(0.1) = -\frac{1}{0.1}\int_0^{0.1} q_{X+Y}(u)du = -\frac{1}{0.1}\int_0^{0.0081} -18\,du - \frac{1}{0.1}\int_{0.0081}^{0.1} -8\,du$

$= 0.081(18) + 0.919(8) = 1{,}458 + 7{,}352 = 8.81 > 8 = VaR_{X+Y}(0.1)$
κάτι που επίσης συμφωνεί με το σχόλιο 1. Τέλος,

$8.81 = ES_{X+Y}(0.1) < 16 = ES_X(0.1) + ES_Y(0.1)$ κάτι που αποτελεί ένδειξη της υποπροσθετικότητας. Σημειώνουμε ότι, παρόλο που προβλήματα βέλτιστης επιλογής όπως το [*] βάσει του ES συνήθως είναι δύσκολο να επιλυθούν αναλυτικά, η ιδιότητα της υποπροσθετικότητας συνεπάγεται ότι οι αριθμητικές διαδικασίες επίλυσής τους είναι δυνατόν να διευκολύνονται από αυτή (δείτε Ref3). Τα προηγούμενα συνεπάγονται ότι το ES είναι Coherent.

8. Επειδή όταν $a_1 \geq a_2 \Rightarrow VaR_X(a_1) \leq VaR_X(a_2)$, η μονοτονία του ολοκληρώματος συνεπάγεται ότι επίσης αν $a_1 \geq a_2 \Rightarrow ES_X(a_1) \leq ES_X(a_2)$.

9. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι το ES είναι κατά κάποια έννοια το "εγγύτερο" στο VaR από τα συνεκτικά μέτρα κινδύνου.

10. Έχουμε επίσης την εξής αναπαράσταση: $ES_x(\alpha) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} q_x(u)\,du = -\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{q_x(\alpha)} v\,dF_x(v) = -\frac{1}{\alpha}E[x\,1_{\{x\leq q_x(\alpha)\}}]$ (*) μέσω της αντικατάστασης

$\begin{cases} v=q_x(u) \\ F_x(v)=u \end{cases}$, οπότε (*) $= -E(x / x\leq q_x(\alpha))$.

Επομένως βάσει αυτής το $ES_x(\alpha)$ μπορεί να ερμηνευθεί και ως η αναμενόμενη απώλεια σε περίπτωση που συμβούν τα "ακραία καταστροφικά ενδεχόμενα", "αριστερά του $q_x(\alpha)$". Η έκφραση αυτή είναι επίσης χρήσιμη για την εκτίμηση του $ES_x(\alpha)$, όταν η κατανομή του x είναι (εν μέρει) άγνωστη.

Το Ref3 παραπάνω αναφέρεται στην τρίτη βιβλιογραφική αναφορά στην σύνοψη των διαλέξεων.

Ασκήσεις.

1. Έστω ότι $\mu_x=\mu_y=0$, $ES_x(0.05)=0.1$, $VaR_y(0.1)=0.2$. Βάσει του VaR^* ποιό από τα x,y θα είναι η βέλτιστη επιλογή για $\alpha=0.05$.

Από τις σχετικές ιδιότητες έχουμε ότι $0.2=VaR_y(0.1)\leq VaR_y(0.05)$. Επίσης $VaR_x(0.05)\leq ES_x(0.05)=0.1$. Επίσης αφού $\mu_x=\mu_y=0$ έχουμε ότι $VaR^*_x(0.05)=VaR_x(0.05)\leq 0.1$, και $VaR^*_y(0.05)=VaR_y(0.05)\geq 0.2$. Επομένως $VaR^*_x(0.05)\leq 0.1<0.2\leq VaR^*_y(0.05)$ και συνεπώς η βέλτιστη επιλογή είναι το x. □

2. Στο υπόβαθρο της προηγούμενης άσκησης, βάσει του ES^* ποιό από τα x,y θα ήταν η βέλτιστη επιλογή για $\alpha=0.05$;

Επειδή $\mu_x=\mu_y=0$, έχουμε ότι $ES^*_x(0.05)=ES_x(0.05)$ και $ES_y(0.05)=ES_y(0.05)$. Επειδή $0.05<0.1$ έχουμε ότι $VaR_y(0.05)\geq VaR_y(0.1)=0.2$ και επειδή το $ES_y(\alpha)\geq VaR_y(\alpha)$ $\forall \alpha\in(0,1)$, $ES_y(0.05)\geq VaR_y(0.05)\geq 0.2$. Επομένως $0.1=ES^*_x(0.05)=$

$ES_x(0.05) < 0.2 \le ES_y(0.05) = ES^*_y(0.05)$ και επομένως η βέλτιστη επιλογή είναι το x. □

3. Έστω $x \sim N(0,1)$ και $y \sim N(0,2)$. Για $\alpha < 0.5$ ποιό από τα x,y θα ήταν η βέλτιστη επιλογή βάσει του VaR; Βάσει του ES;

Επειδή $\mu_x = \mu_y = 0$, $VaR^*_x(\alpha) = VaR_x(\alpha)$, $ES^*_x(\alpha) = ES_x(\alpha)$, $\forall \alpha \in (0,1)$.
Επειδή οι κατανομές είναι κανονικές και το $\alpha < 0.5$ η βέλτιστη επιλογή τόσο βάσει του VaR^* όσο και βάσει του ES^*, ισοδυναμούν με την βέλτιστη επιλογή βάσει της τυπικής απόκλισης. Επειδή $1 < \sqrt{2}$ η βέλτιστη επιλογή είναι το x. □

4. Έστω $\mu_x = \mu_y = 1$, $VaR_x(0.01) = 1$, $VaR_y(0.05) = 2$. Ποιό από τα x,y είναι η βέλτιστη επιλογή βάσει του VaR^* για $\alpha = 0.05$; (Με διόρθωση)

Επειδή $0.01 < 0.05$, $1 = VaR_x(0.01) \ge VaR_x(0.05)$. Επίσης
$VaR^*_x(0.05) = \mu_x + VaR_x(0.05) = 1 + VaR_x(0.05) \le 1 + VaR_x(0.($ $- VaR^*_x(0.01)$
$= 1+1 = 2$.
Επίσης $VaR^*_y(0.05) = \mu_y + VaR_y(0.05) = 1+2 = 3$. Συνεπώς
$VaR^*_x(0.05) \le 2 < 3 = VaR^*_y(0.05)$ και συνεπώς η βέλτιστη επιλογή είναι το x. □

5. Έστω ότι

$$q_x(\alpha) = \begin{cases} -2 & 0 < \alpha \le 0.12 \\ 1 & 0.12 < \alpha < 1 \end{cases} \quad \text{και}$$

$$q_y(\alpha) = \begin{cases} -1 & 0 < \alpha \le 0.05 \\ 0.9 & 0.05 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Ποιό από τα x,y είναι προτιμότερο βάσει του VaR για $\alpha = 0.05$, ή για $\alpha = 0.15$; Βάσει του ES για τα ίδια α;

1 $\alpha = 0.05$ (Με διορθώσεις)

Έχουμε ότι $VaR_x(0.05) = -q_x(0.05) = 2 > 1 = -q_y(0.05) = VaR_y(0.05)$. Επομένως προτιμότερο είναι το y, ως προς το VaR για $\alpha = 0.05$.

Επίσης $ES_x(0.05) = \frac{-1}{0.05}\int_0^{0.05} q_x(u)du = -\frac{1}{0.05}\int_0^{0.05} -2\,du$

$= \frac{2}{0.05}(0.05-0) = 2 > -\frac{1}{0.05}\int_0^{0.05} q_y(u)du = \frac{-1}{0.05}\int_0^{0.05} -1\,du$

$= \frac{1}{0.05}(0.05-0) = 1 = ES_y(0.05)$. Επομένως το y θα είναι προτιμότερο βάσει του ES για $a=0.05$.

2. $a=0.15$

Έχουμε ότι $VaR_x(0.15) = -q_x(0.15) = -1 < -0.9 = -q_y(0.15) = VaR_y(0.15)$ Επομένως το x είναι προτιμότερο ως προς το VaR για $a=0.15$.

Επίσης $ES_x(0.15) = \frac{-1}{0.15}\int_0^{0.15} q_x(u)du = -\frac{1}{0.15}\left(\int_0^{0.12} -2\,du + \int_{0.12}^{0.15} 1\,du\right)$

$= \frac{1}{0.15} 2\cdot(0.12-0) - \frac{1}{0.15}(0.15-0.12) = 1.6 - 0.2 = 1.4 >$

$-\frac{1}{0.15}\int_0^{0.15} q_y(u)du = \frac{-1}{0.15}\left(\int_0^{0.05} -1\,du + \int_{0.05}^{0.15} 0.9\,du\right) = \frac{1}{0.15}(0.05-0)$

$-\frac{0.9}{0.15}(0.15-0.05) \simeq 0.333 - 0.6 = -0.267$, επομένως το y είναι προτιμότερο βάσει του ES για $a=0.15$. □

Οι σημειώσεις βρίσκονται σε πρώιμη μορφή και σε στάδιο διόρθωσης. Μην τις χρησιμοποιείτε εκτός των διαλέξεων. Παρακαλώ αναφέρτε όποιο λάθος ή παραδρομή στο stelios@aueb.gr ή στο e-class του μαθήματος.