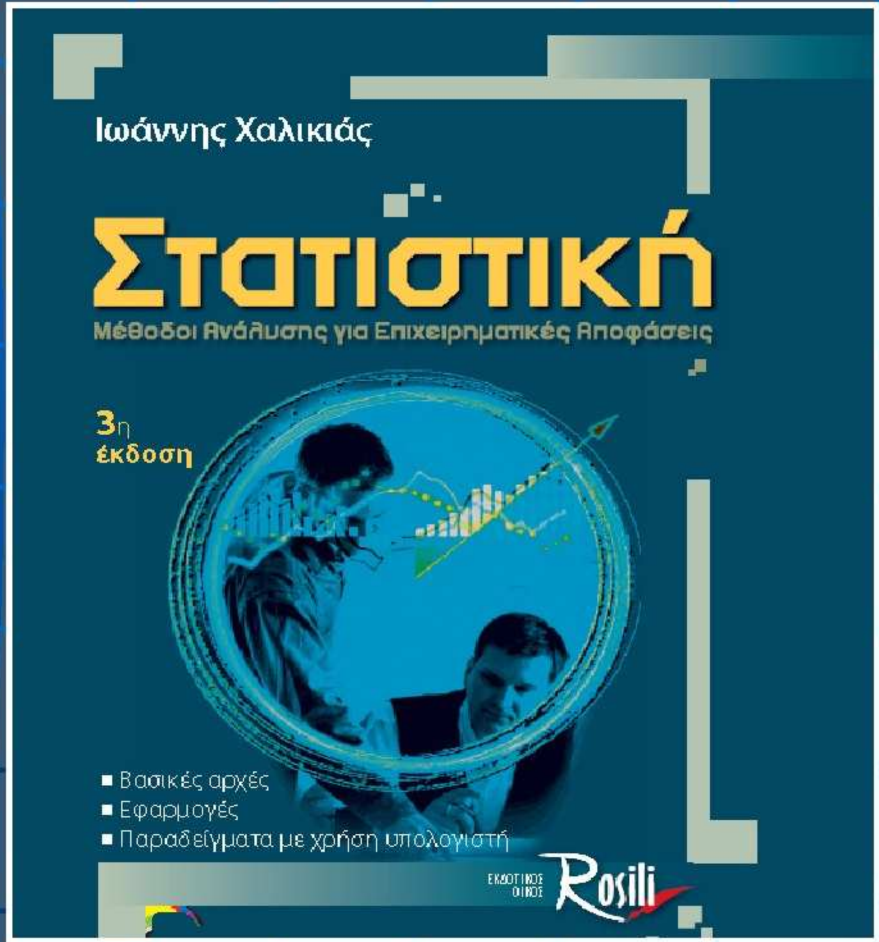
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Μέθοδοι Ανάλυσης για Επιχειρηματικές Αποφάσεις

Ιωάννης Γ. Χαλικιάς



Κεφάλαιο 4

Εισαγωγή στις Πιθανότητες και Κατανομές Πιθανοτήτων

Πιθανότητες: Εισαγωγικές Εννοιες

Εκ των προτέρων (a priori) κλασική προσέγγιση

Πιθανότητα εμφάνισης = X / T
όπου
X = Αριθμός αποτελεσμάτων που εμφανίζεται το ενδεχόμενο που εξετάζουμε
T = Συνολικός αριθμός δυνατών αποτελεσμάτων

δηλαδή,
Πιθανότητα να τραβήξουμε "σπαθί" = 13 σπαθιά / 52 χαρτιά = 0,25 (ή 25%)

Εμπειρική κλασσική προσέγγιση

Εμπειρική πιθανότητα εμφάνισης = k / n

όπου
k = Αριθμός παρατηρήσεων που εμφανίζεται το ενδεχόμενο που εξετάζουμε
n = Συνολικός αριθμός παρατηρήσεων

Πιθανότητα παραγωγής ελαττωματικού ανορθωτή ισούται με:
Αριθμός ελαττωματικών μονάδων / Σύνολο παραγόμενων μονάδων =
= 250/10.000 = 0,025 (ή 2,5%)

Υποκειμενική προσέγγιση.

Η υποκειμενική πιθανότητα χρησιμοποιείται στις περιπτώσεις που εκτιμούμε επιχειρηματικούς κινδύνους και, γενικότερα, σε μεθόδους λήψης επιχειρηματικών αποφάσεων κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας.

Πίνακας 4.1
Συμπεριφορά Καταναλωτών για Αγορά Μεγάλου Κυβισμού Μοτοσυκλέττας

Προγραμματίζουν την αγορά μοτοσυκλέττας	Τελικά Αγόρασαν		
	Ναι	Οχι	Σύνολο
Ναι	300	200	500
Οχι	100	4.400	4.500
Σύνολο	**400**	**4.600**	**5.000**

Πίνακας 4.1α
Κανόνες Πιθανοτήτων

- **Απλή (οριακή) πιθανότητα**

P(προγραμματισμός αγοράς μοτοσυκλέττας) =
= (Αριθμός καταναλωτών που προγραμματίζουν) / (Σύνολο καταναλωτών δείγματος)
= (500) / (5.000) = 0,10 (ή 10%, ή 1/10)

- **Από κοινού (ταυτόχρονη) πιθανότητα**

P("προγραμματίζω" και "τελικά αγοράζω μοτοσυκλέττα") =
= (Αριθμός καταναλωτών που προγραμματίζουν και αγοράζουν) / (Σύνολο καταναλωτών)
= (300) / (5.000) = 0,06 (ή 6%, ή 6/100)

- **Ο κανόνας της άθροισης**

P(προγραμματίζω ή αγοράζω) =
= P(προγραμματίζω) + P(αγοράζω) - P(προγραμματίζω και αγοράζω)
= (500)/(5.000) + (400)/(5.000) - (300)/(5.000)
= (600) / (5.000) = 0,12 (ή 12%, ή 12/100)

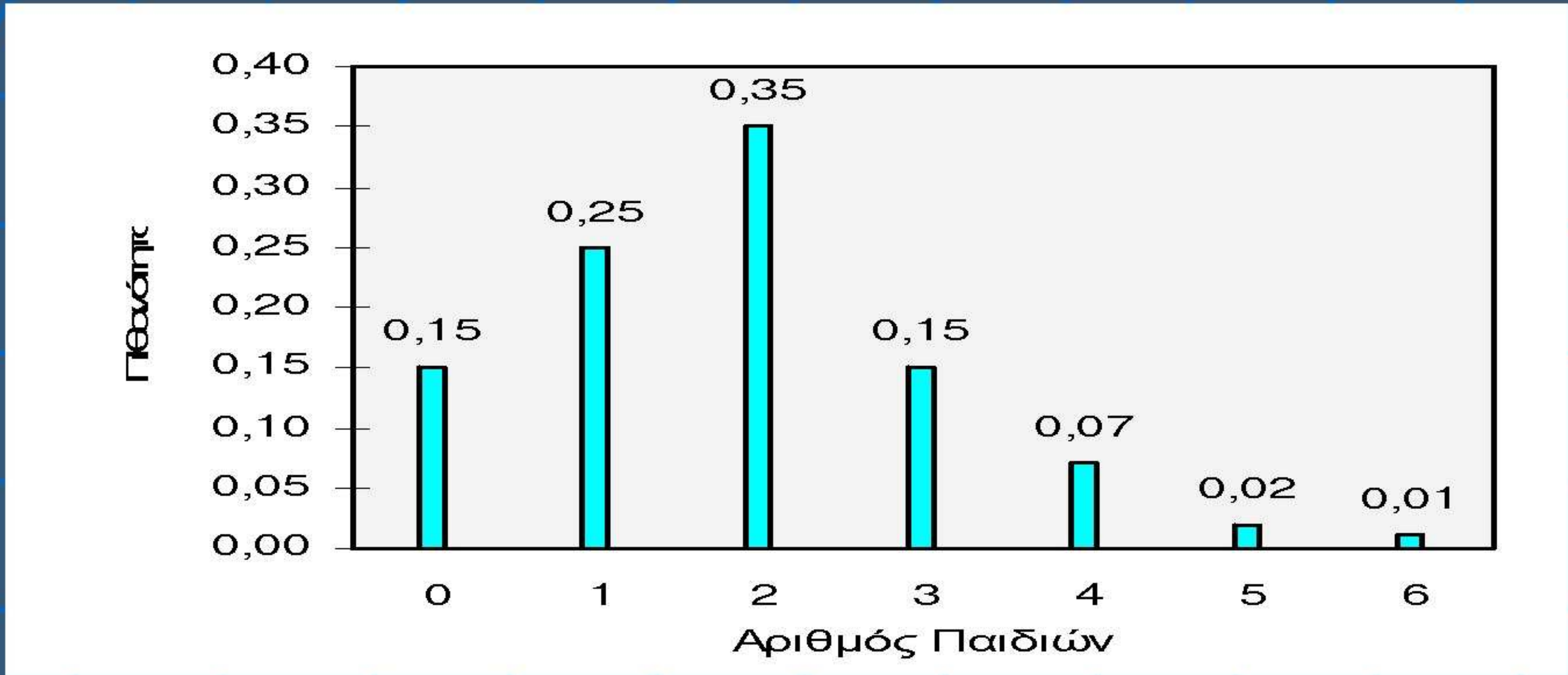
- **Υπό συνθήκη πιθανότητα**

P(δέν αγοράζω | προγραμματίζω) = P(προγραμματίζω και δέν αγοράζω) / P(προγραμματίζω)
= (200 / 5.000) / (500 / 5.000) = (200 / 500) = (2 / 5)

- **Ο κανόνας του πολλαπλασιασμού**

P(A και B) = P(A | B) · P(B)
Εάν τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα, τότε P(A | B) = P(A), δηλαδή
P(A και B) = P(A) · P(B)

Διάγραμμα 4.1
Κατανομή Πιθανοτήτων Αριθμού Παιδιών ανά Οικογένεια

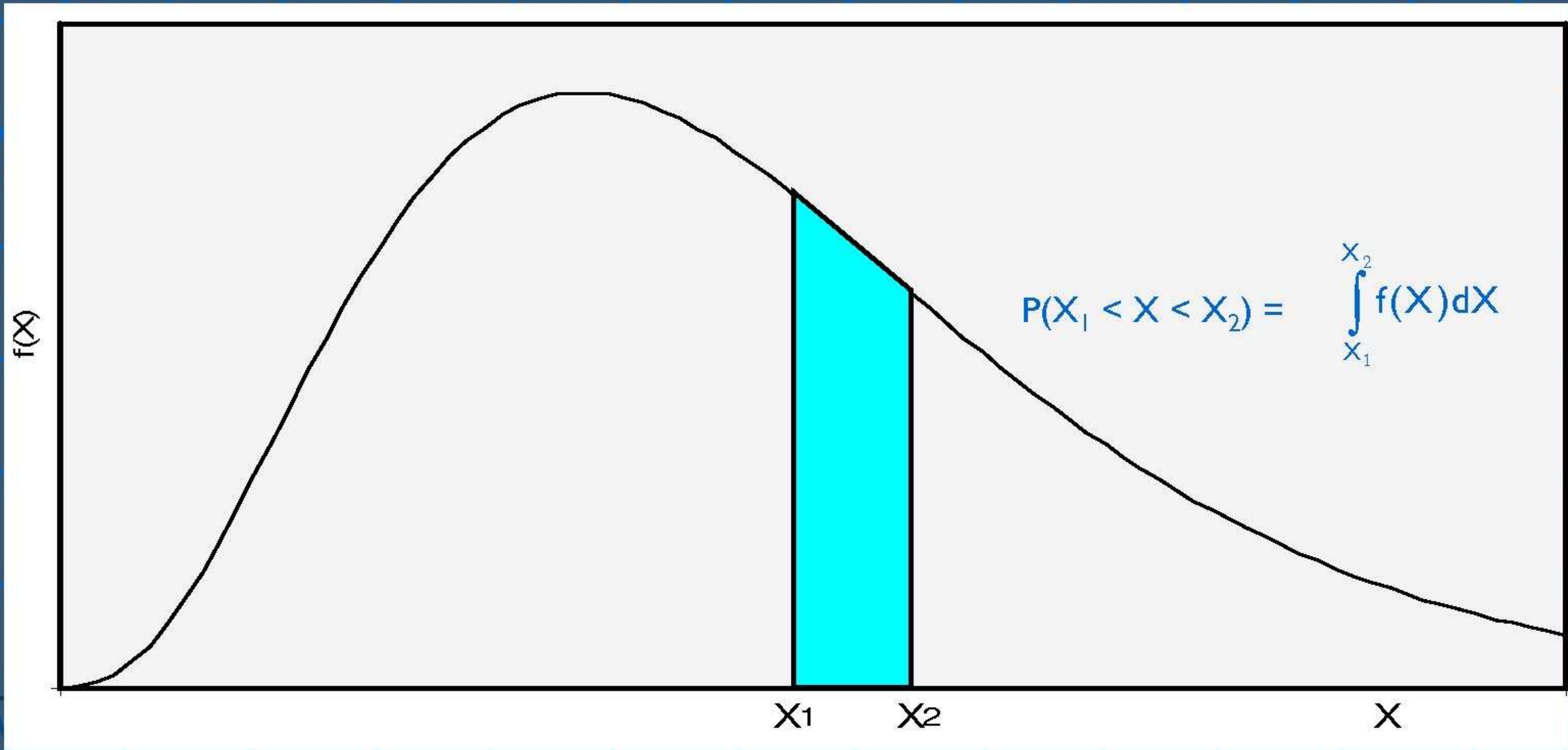


$$\mu = E(X) = \Sigma X_i \cdot P(X_i) = 0\cdot(0{,}15) + 1\cdot(0{,}25) + 2\cdot(0{,}35) + 3\cdot(0{,}15) + 4\cdot(0{,}07) + 5\cdot(0{,}02) + 6\cdot(0{,}01) = 1{,}84 \text{ παιδιά}$$

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X - \mu)^2 = (0-1{,}84)^2\cdot(0{,}15) + (1-1{,}84)^2\cdot(0{,}25) + (2-1{,}84)^2\cdot(0{,}35) + (3-1{,}84)^2\cdot(0{,}15)$$

$$+ (4-1{,}84)^2\cdot(0{,}07) + (5-1{,}84)^2\cdot(0{,}02) + (6-1{,}84)^2\cdot(0{,}01) = 1{,}594 \text{ (παιδιά)}^2$$

Διάγραμμα 4.2
Κατανομή Συνάρτησης Πιθανοτήτας f(X)



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(X)dx = 1 \text{ , } \mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} X \cdot f(X)dX \text{ , } Var(X) = \sigma^2 = E(X - \mu)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (X-\mu)^2 \cdot f(X)dX$$

Διωνυμική Κατανομή

Εάν η επιτυχία εμφανιστεί X φορές σε δείγμα μεγέθους n (δηλαδή n επαναλήψεις του τυχαίου πειράματος), τότε το ερώτημα είναι με ποια σειρά θα εμφανιστούν οι επιτυχίες.

Εάν η επιτυχία εμφανιστεί τις πρώτες X φορές, με βάση τον κανόνα του πολλαπλασιασμού, η πιθανότητα είναι:

$$P(X) = p^X \cdot (1-p)^{n-X}$$

Χρησιμοποιώντας τους κανόνες της συνδυαστικής ανάλυσης, έχουμε τους συνδυασμούς (combinations) της σειράς εμφάνισης των X επιτυχιών σε n επαναλήψεις (παρατηρήσεις). Δηλαδή τους συνδυασμούς των n ανά X που συμβολίζεται με C_X^n και ισούται με:

$$C_X^n = \frac{n!}{(n-X)!\cdot X!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1}{(n-X)\cdot(n-X-1)\cdot\ldots\cdot 1\cdot X\cdot(X-1)\cdot\ldots\cdot 1}$$

Επομένως, το ενδεχόμενο της εμφάνισης της επιτυχίας X φορές αποτελείται από το σύνολο των C_X^n ενδεχομένων, και η πιθανότητα εμφάνισης της επιτυχίας X φορές σε n επαναλήψεις (ανεξάρτητα από τη σειρά εμφάνισης) ισούται με:

$$P(X) = \frac{n!}{(n-X)!\cdot X!} p^X \cdot (1-p)^{n-X}$$

Διωνυμική Κατανομή (παράδειγμα)

Ποια είναι η πιθανότητα σε μια παρέα τριών ατόμων οι δύο να έχουν κινητό τηλέφωνο, όταν είναι γνωστό ότι το 40% των ατόμων έχουν κινητό τηλέφωνο; Οι τιμές των δεδομένων του προβλήματος είναι, n=3, X=2, και p=0,4. Ετσι:

$$P(2) = \frac{3!}{(3-2)!\cdot 2!}0{,}4^2 \cdot (1-0{,}4)^{3-2} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 1}0{,}4^2 \cdot 0{,}6^1 = 0{,}288 \text{ (ή } 28{,}8\%)$$

Στη διωνυμική κατανομή η μεταβλητή X (αριθμός εμφάνισης των επιτυχιών) παίρνει τιμές από 0 έως και n, και το άθροισμα όλων των P(X) ισούται με 1. Για το παραπάνω παράδειγμα έχουμε:

$$P(0)+P(1)+P(2)+P(3) =$$

$$= \frac{3!}{(3-0)!\cdot 0!}0{,}4^0\cdot(1-0{,}4)^{3-0} + \frac{3!}{(3-1)!\cdot 1!}0{,}4^1\cdot(1-0{,}4)^{3-1} + \frac{3!}{(3-2)!\cdot 2!}0{,}4^2 \cdot (1-0{,}4)^{3-2} + \frac{3!}{(3-3)!\cdot 3!}0{,}4^3\cdot(1-0{,}4)^{3-3} =$$

$$= 0{,}216 + 0{,}432 + 0{,}288 + 0{,}064 = 1{,}000$$

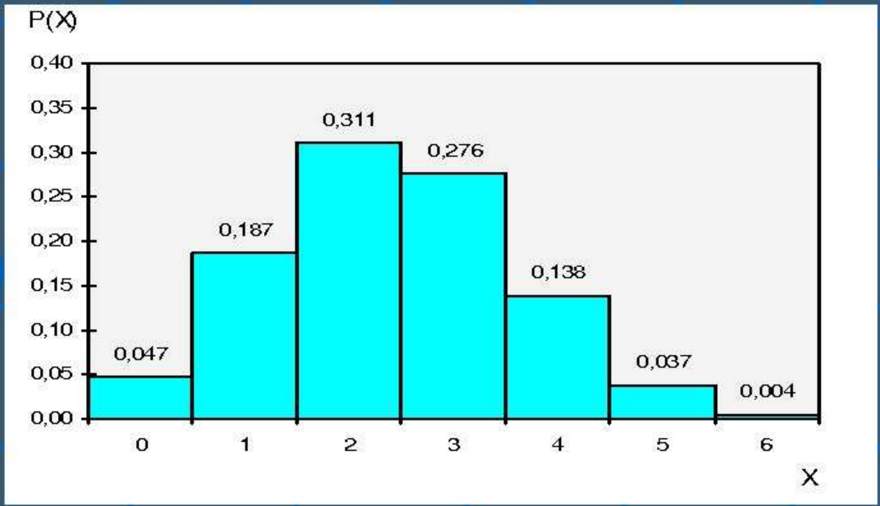
Ο μέσος της διωνυμικής κατανομής ισούται με: $\mu = E(X) = n\cdot p = 3\cdot 0{,}4 = 1{,}2$

που σημαίνει ότι εάν συνεχίσουμε να επιλέγουμε στην τύχη τρία άτομα, κατά μέσο όρο, 1,2 άτομα (από τα τρία) θα έχουν κινητό τηλέφωνο.

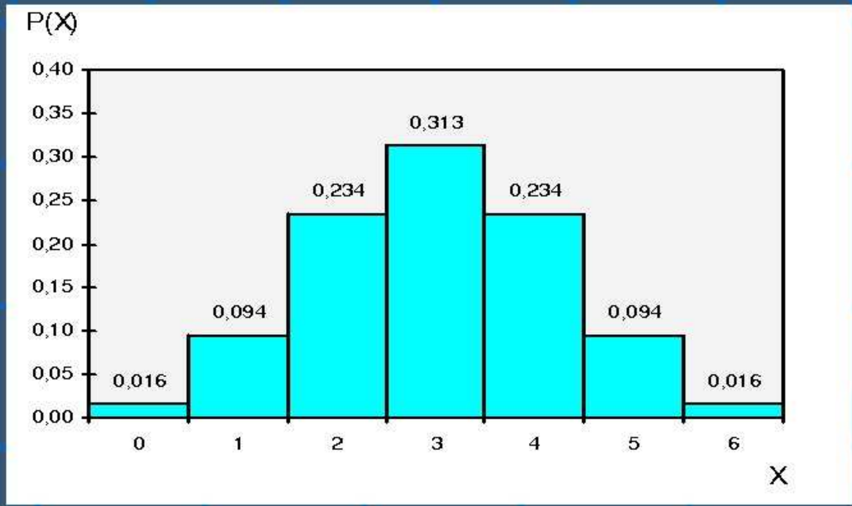
$$Var(X) = \sigma^2 = E(X-\mu)^2 = n\cdot p\cdot(1-p) \quad , \sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$$

Διαγράμματα 4.3 & 4.4:
Διωνυμικές Κατανομές

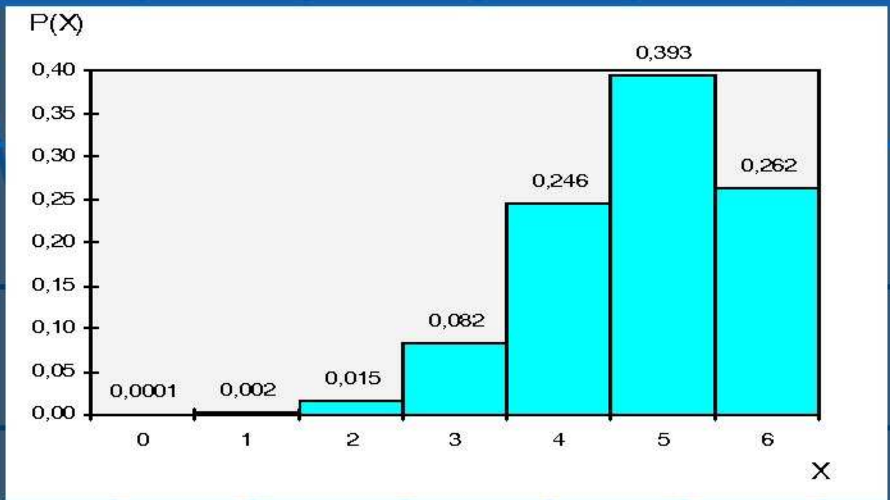
(α) n = 6, p = 0,4



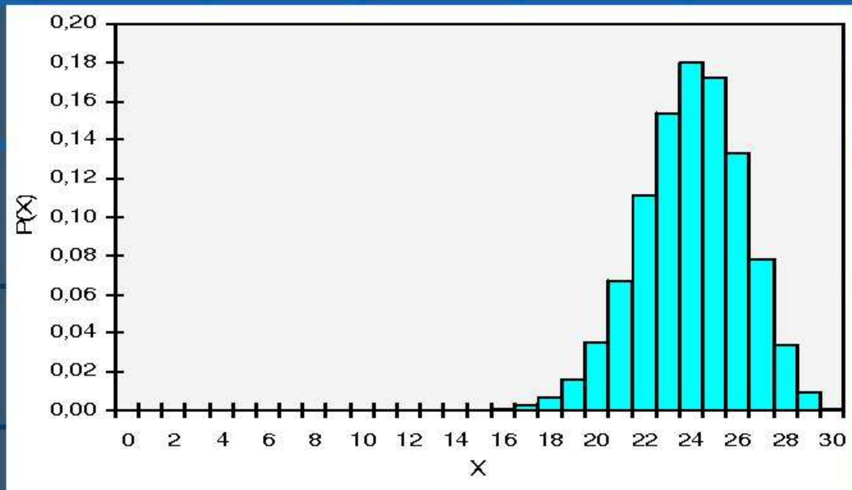
(β) n = 6, p = 0,5



(γ) n = 6, p = 0,8



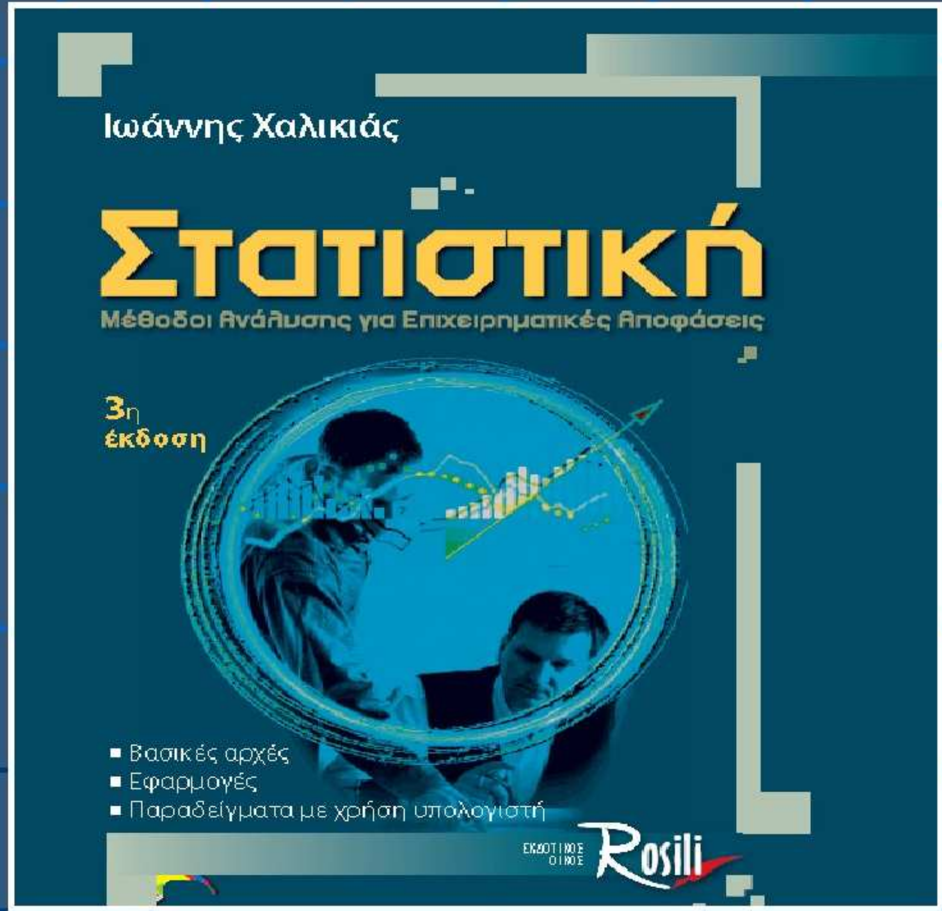
(δ) n = 30, p = 0,8



ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Μέθοδοι Ανάλυσης για Επιχειρηματικές Αποφάσεις

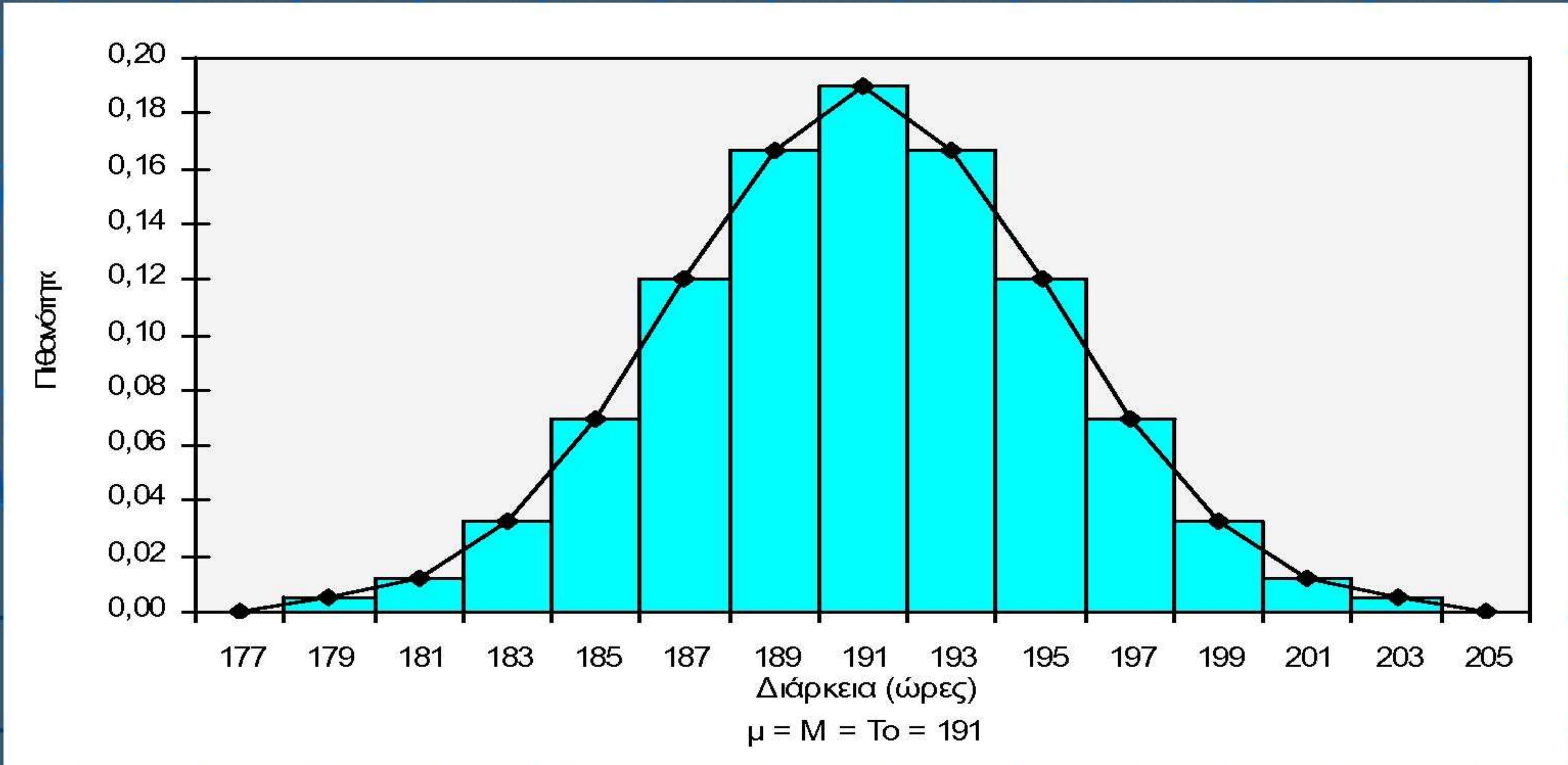
Ιωάννης Γ. Χαλικιάς



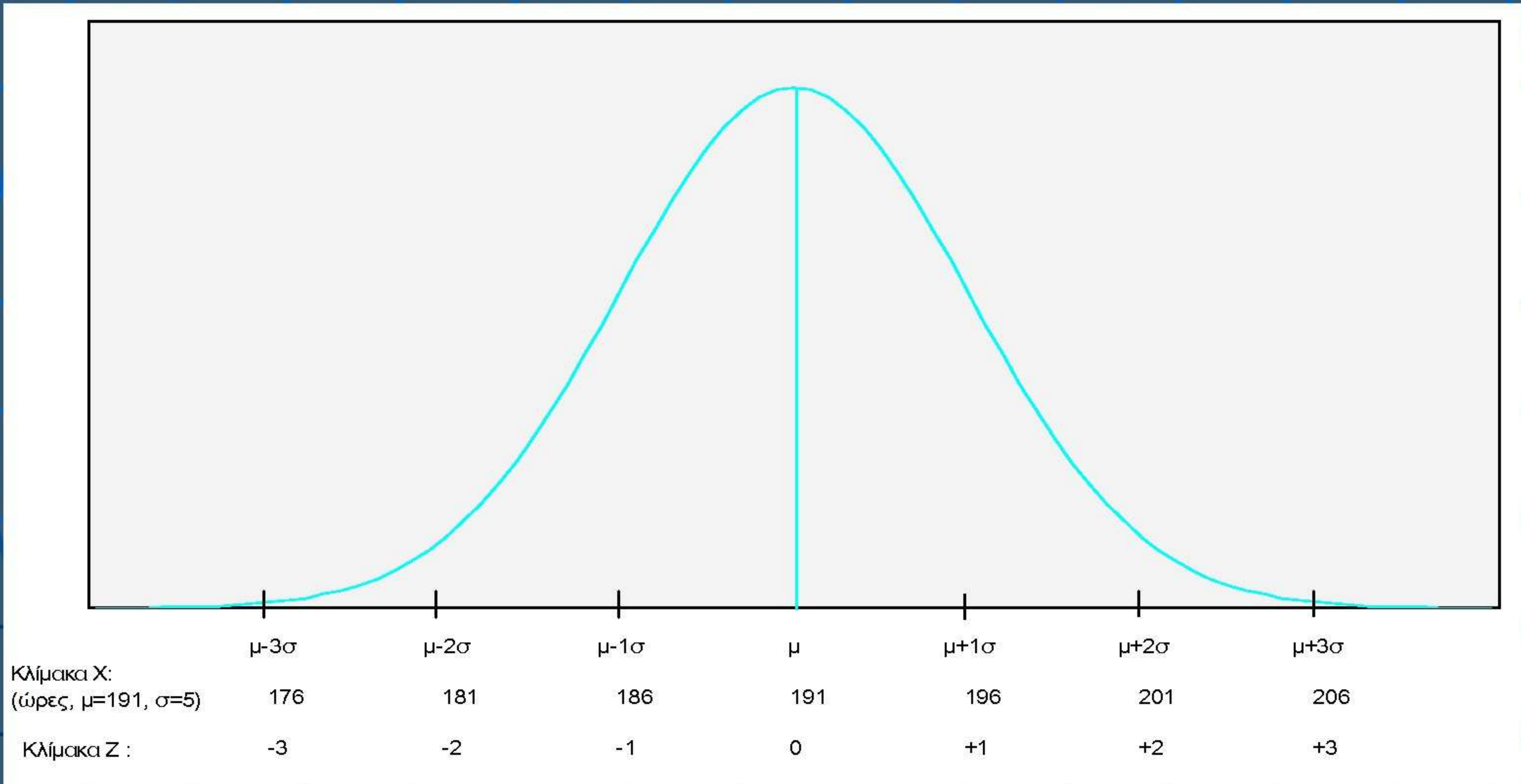
<u>Κεφάλαιο 5</u>

Η Κανονική Κατανομή και Κατανομές Δειγματοληψίας

Διάγραμμα 5.1:
Σχετική Κατανομή Συχνοτήτων και Πολυγωνική Γραμμή της Διάρκειας 5.000 Μπαταριών



Διάγραμμα 5.2:
Αντιστοιχία Κλιμάκων Μέτρησης:
Διάρκεια μπαταρίας (ώρες) και τυποποιημένη Z



Πίνακας 5.2:
Η Αθροιστική Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,0	0,00135	0,00131	0,00126	0,00122	0,00118	0,00114	0,00111	0,00107	0,00104	0,00100
-2,9	0,00187	0,00181	0,00175	0,00169	0,00164	0,00159	0,00154	0,00149	0,00144	0,00139
-2,8	0,00256	0,00248	0,00240	0,00233	0,00226	0,00219	0,00212	0,00205	0,00199	0,00193
-2,7	0,00347	0,00336	0,00326	0,00317	0,00307	0,00298	0,00289	0,00280	0,00272	0,00264
-2,6	0,00466	0,00453	0,00440	0,00427	0,00415	0,00402	0,00391	0,00379	0,00368	0,00357
-2,5	0,00621	0,00604	0,00587	0,00570	0,00554	0,00539	0,00523	0,00508	0,00494	0,00480
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
-1,2	0,11507	0,11314	0,11123	0,10935	0,10749	0,10565	0,10383	0,10204	0,10027	0,09853
-1,1	0,13567	0,13350	0,13136	0,12924	0,12714	0,12507	0,12302	0,12100	0,11900	0,11702
-1,0	0,15866	0,15625	0,15386	0,15151	0,14917	0,14686	0,14457	0,14231	0,14007	0,13786
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214

Χρήση Αθροιστικής Τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής

Για να καταλάβουμε τον τρόπο χρήσης των πινάκων της τυποποιημένης κανονικής κατανομής, ας δούμε μερικά παραδείγματα σχετικά με την κατανομή της διάρκειας των μπαταριών όταν το κινητό τηλέφωνο είναι σε κατάσταση αναμονής.

Ποια η πιθανότητα μία μπαταρία να διαρκέσει λιγότερο από 185 ώρες;

$$P(X<185) = P\left(Z<\frac{185-191}{5}\right) = P(Z<-1,2) = 0,11507 \text{ (ή } 11,507\%)$$

Ποια η πιθανότητα μία μπαταρία να διαρκέσει περισσότερο από 195 ώρες;

$$P(X>195) = 1 - P(X<195) = 1 - P\left(Z<\frac{195-191}{5}\right) = 1 - P(Z<0,8)$$

$$= 1 - 0,78814 = 0,21186 \text{ (ή } 21,186\%)$$

Τέλος, ποια η πιθανότητα μία μπαταρία να διαρκέσει μεταξύ 185 και 195 ώρες;

$$P(185<X<195) = P(X<195) - P(X<185)$$

$$= P\left(Z<\frac{195-191}{5}\right) - P\left(Z<\frac{185-191}{5}\right) = P(Z<0,8) - P(Z<-1,2)$$

$$= 0,78814 - 0,11507 = 0,67307 \text{ (ή } 67,307\%)$$