ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ ΚΑΙ ΚΑΝΟΝΕΣ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΝ - ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΚΑΝΟΝΕΣ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΑΥΤΑ.

Πειράματα των οποίων δε μπορούμε, εκ των προτέρων, να προβλέψουμε το αποτέλεσμά τους αν και μπορούν να επαναλαμβάνονται κάτω από τις ίδιες γνωστές συνθήκες ονομάζονται πειράματα τύχης ή στοχαστικά πειράματα. Π.χ. ρίχνουμε ένα κέρμα και καταγράφουμε την πάνω όψη του ή ρίχνουμε ένα ζάρι και καταγράφουμε την πάνω έδρα του. Τα πειράματα τύχης αποτελούν αντικείμενο μελέτης της Θεωρίας Πιθανοτήτων.

Ορισμός 1 (i) Όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανισθούν σ' ένα πείραμα τύχης ονομάζονται δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές περιπτώσεις του πειράματος.

(ii) Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ονομάζεται δειγματικός χώρος ή δειγματοχώρος συμβ. δ.χ. του πειράματος και συμβολίζεται συνήθως με Ω.

(iii) Κάθε υποσύνολο του Ω ονομάζεται ενδεχόμενο. Ένα ενδεχόμενο (στον Ω) λέγεται απλό ή στοιχειώδες αν είναι μονοσύνολο και σύνθετο αν περιέχει περισσότερα του ενός στοιχεία.

(iv) Τα στοιχεία ενός ενδεχομένου ονομάζονται ευνοϊκές περιπτώσεις για την πραγματοποίησή του και όταν το αποτέλεσμα, σε μια δεδομένη εκτέλεση του πειράματος, είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου λέμε ότι το ενδεχόμενο πραγματοποιείται ή συμβαίνει.

(v). Ο ίδιος ο δ.χ. Ω είναι υποσύνολο του εαυτού του και άρα είναι ενδεχόμενο που πραγματοποιείται πάντα αφού κάθε αποτέλεσμα σε οποιαδήποτε εκτέλεση του πειράματος είναι στοιχείο του Ω δηλ. ανήκει στον δ.χ. Ω. Για τον λόγο αυτό ο Ω ονομάζεται βέβαιο ενδεχόμενο. Το $\emptyset \subseteq \Omega$ είναι και αυτό ένα ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται ποτέ αφού δεν έχει κανένα στοιχείο και για τον λόγο αυτό ονομάζεται αδύνατο ενδεχόμενο.

(vi) Δύο ενδεχόμενα ονομάζονται ασυμβίβαστα ή αμοιβαία αποκλειόμενα αν δε μπορούν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα.

(vii) Δύο ενδεχόμενα ονομάζονται <u>ανεξάρτητα</u> αν η πραγματοποίηση ενός απ' αυτά δεν επηρεάζει την πραγματοποίηση του άλλου.

<u>Παράδειγμα 1</u> (i). Ρίχνουμε ένα ζάρι μια φορά και καταγράφουμε την ένδειξη της πάνω έδρας του. Ο δ.χ. είναι ο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Αν A το ενδεχόμενο να εμφανισθεί άρτιος αριθμός, τότε $A = \{2, 4, 6\}$.

(ii). Ρίχνουμε ένα κέρμα και μετράμε τον αριθμό των ρίψεων μέχρι να εμφανισθεί κεφαλή K. Τότε $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Παρατηρούμε ότι ο Ω δεν είναι <u>πεπερασμένο</u> αλλά <u>αριθμήσιμα άπειρο</u> σύνολο (δηλ. έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών)

(iii) Θεωρούμε τα σημεία του διαστήματος $[0,1]$ και επιλέγουμε τυχαία ένα από αυτά. Τότε $\Omega = [0,1]$ που είναι ένα <u>υπεραριθμήσιμα άπειρο</u> σύνολο (δηλ. έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών).

(iv) Ρίχνουμε ένα κέρμα μια φορά και με Κ συμβολίζουμε το ενδεχόμενο να εμφανισθεί κεφαλή ενώ με Γ το ενδεχόμενο να εμφανισθούν γράμματα. Τα Κ, Γ είναι <u>ασυμβίβαστα</u> ενδεχόμενα.

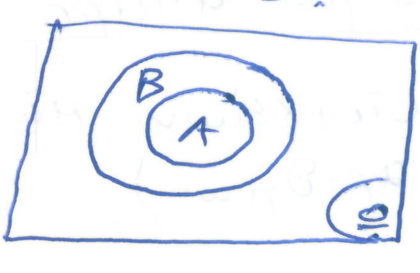
(v). Καταγράφουμε όλες τις οικογένειες με 2 παιδιά σε μια πόλη και θεωρούμε Α το ενδεχόμενο το μεγαλύτερο σε ηλικία παιδί να είναι αγόρι και Β το ενδεχόμενο το μικρότερο σε ηλικία παιδί να είναι αγόρι. Τότε τα Α, Β είναι <u>ανεξάρτητα</u> ενδεχόμενα.

<u>Σημείωση 1</u> Προφανώς δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα δε μπορεί να είναι ανεξάρτητα.

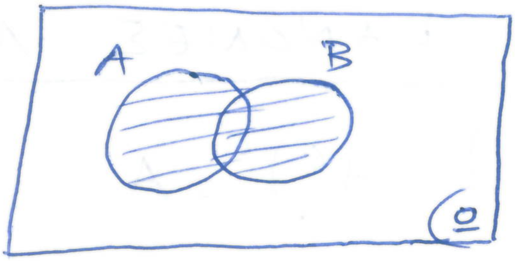
<u>ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ</u>

Αφού τα ενδεχόμενα είναι σύνολα μπορούμε να ορίσουμε σε αυτά τις πράξεις μεταξύ συνόλων και να προκύψουν έτσι νέα ενδεχόμενα που τα απεικονίζουμε με διαγράμματα Venn. Έτσι αν Α, Β ενδεχόμενα τότε:

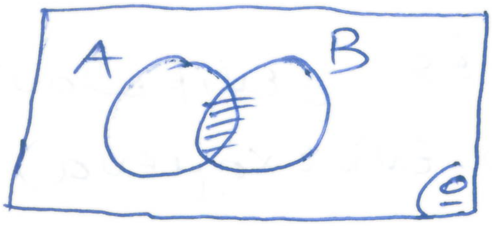
(i) <u>$A \subseteq B$</u> σημαίνει ότι αν πραγματοποιείται το Α τότε πραγματοποιείται και το Β

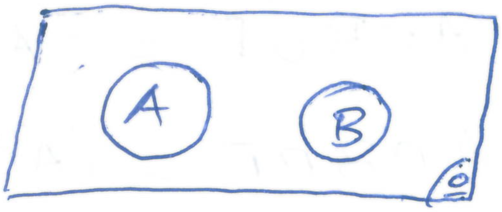


(ii) $\underline{A \cup B}$ σημαίνει ότι πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα A, B.

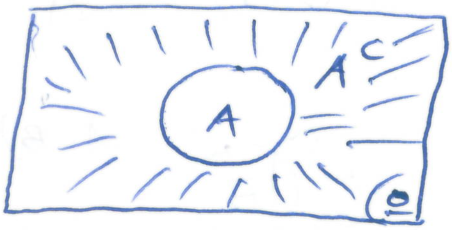


(iii) $\underline{A \cap B}$ σημαίνει ότι πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα A, B. Αν $A \cap B = \emptyset$, τότε τα A, B είναι ασυμβίβαστα →

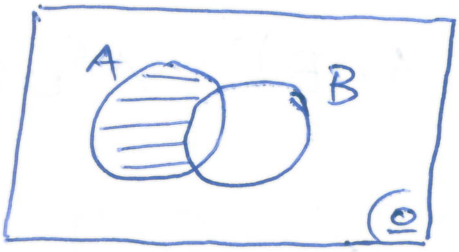




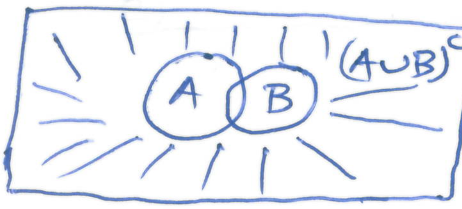
(iv) $\underline{\bar{A}}$ ή $\underline{A'}$ ή $\underline{A^c}$ σημαίνει ότι δεν πραγματοποιείται το A αλλά το συμπληρωματικό του. Ισχύει ότι $A \cap A^c = \emptyset$ και $A \cup A^c = \Omega$



(v) $\underline{A - B}$ ή $\underline{A \cap B^c}$ σημαίνει ότι πραγματοποιείται το A και όχι το B. Αν $A = \Omega$ τότε $A - B = \Omega - B = B^c$



(vi) $(A \cup B)^c$ σημαίνει ότι δεν πραγματοποιείται ούτε το A ούτε το B.



ΚΑΝΟΝΕΣ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΝ

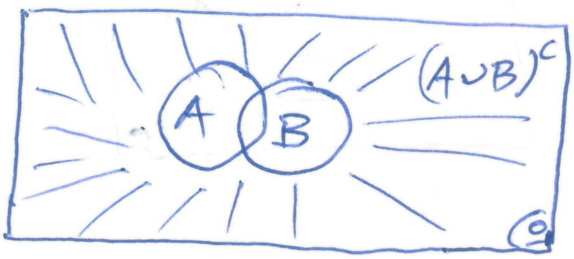
(i) $(A^c)^c = A$

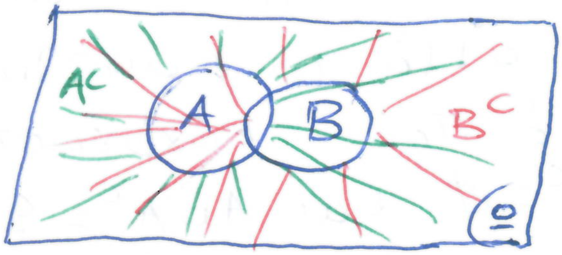
(ii) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$. Οι ισότητες αυτές γενικεύονται για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα ως εξής:

(iii) $A \cup B \cup \Gamma = (A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$

$A \cap B \cap \Gamma = (A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$

(iv) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

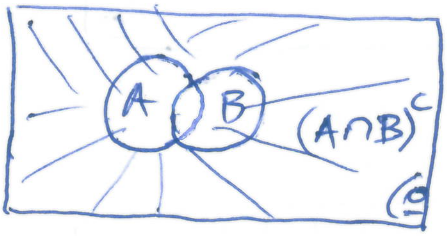


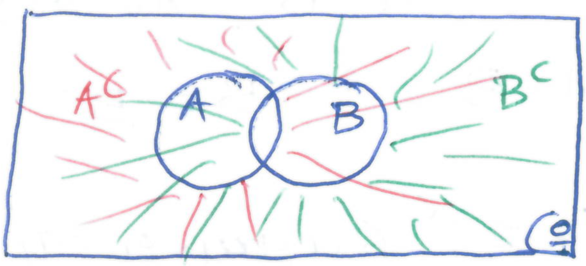


A^c: πράσινη σκίαση

B^c: κόκκινη σκίαση

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$





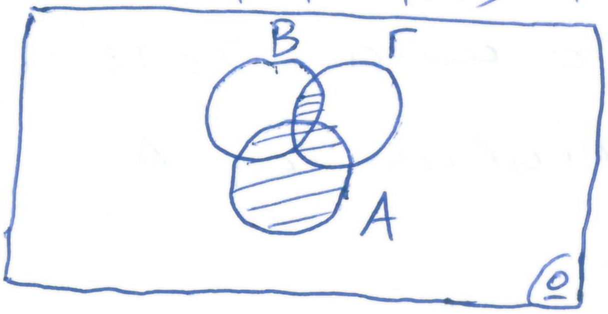
A^c: κόκκινη σκίαση

B^c: πράσινη σκίαση

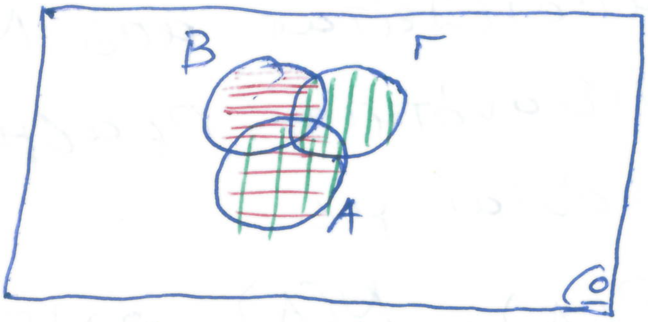
Οι δύο αυτές σχέσεις αναφέρονται ως <u>κανόνες De Morgan</u>

(v). $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$

(επιμερισμός της τομής ως προς την ένωση)



$A \cup (B \cap \Gamma)$

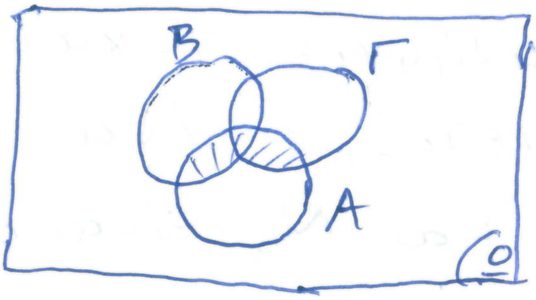


$A \cup B$: κόκκινη σκίαση

$A \cup \Gamma$: πράσινη σκίαση

$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

(επιμερισμός της ένωσης ως προς την τομή)



$A \cap (B \cup \Gamma)$

$A \cap B$: κόκκινη σκίαση

$A \cap \Gamma$: πράσινη σκίαση

ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

(i) Κλασσικός: Προέκυψε από τη μελέτη των προβλημάτων που εμφανίζονται στα τυχερά παιχνίδια όπου οι δειγματικοί χώροι είναι πεπερασμένοι και τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα δηλ. γνωρίζουμε εκ των προτέρων την πιθανότητα εμφάνισής τους. Έτσι αν Ω είναι ο δ.χ. του πειράματος που αποτελείται από N ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και το ενδεχόμενο A αποτελείται από N_A από αυτά, τότε η πιθανότητα πραγματοποίησης του A ισούται με

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων για το } A}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}}$$

Ο ορισμός αυτός οφείλεται στον Laplace.

(ii) Εμπειρικός: Στηρίζεται στην εμπειρία από προηγούμενες επαναλήψεις τυχαίων πειραμάτων. Έστω ότι εκτελούμε ένα τυχαίο πείραμα N φορές και N_A είναι ο αριθμός των πραγματοποιήσεων του ενδεχομένου A. Τότε $P(A) = \lim_{N \to +\infty} \frac{N_A}{N}$. Ο λόγος $\frac{N_A}{N}$ ονομάζεται σχετική συχνότητα του A. Η ύπαρξη του ορίου αυτού ονομάζεται στατιστική ομαλότητα ή νόμος των μεγάλων αριθμών. Ο ορισμός αυτός οφείλεται στον Von Mises. Η υπολογιζόμενη πιθανότητα όμως εξαρτάται ουσιαστικά από τον αριθμό επαναλήψεων του πειράματος.

(iii) Αξιωματικός: Έστω Ω ο δ.χ. ενός πειράματος τύχης και $\mathcal{P}(\Omega)$ το δυναμοσύνολο του Ω = το σύνολο όλων των υποσυνόλων του Ω = το σύνολο όλων των ενδεχομένων του πειράματος. Συνάρτηση πιθανότητας ή απλά πιθανότητα P στο $\mathcal{P}(\Omega)$ ονομάζεται κάθε συνάρτηση $P: \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) $0 \leq P(A), \ \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$

(β) $P(\Omega) = 1$

(γ) $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$

όπου τα $A_i, i \in I \subseteq \mathbb{N}$, είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους.

Ο μη αρνητικός αριθμός $P(A)$ ονομάζεται πιθανότητα ή μέτρο πιθανότητας του ενδεχομένου A. Ο αριθμός αυτός, σε μια πιο σύνθετη μορφή, διατυπώθηκε από τον Kolmogorov.

Παρατήρηση 1 (i) Αν A είναι ένα υπεραριθμήσιμα άπειρο ενδεχόμενο τότε δε μπορούμε να ορίσουμε αναλυτικά την πιθανότητά του απευθεία μέσω του (γ) του προηγούμενου ορισμού αφού δεν έχουμε ορίσει την έννοια ενός υπεραριθμήσιμα απείρου αθροίσματος. Έτσι αν π.χ. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n=1,2,3$, και $A \subseteq \Omega$ υπεραριθμήσιμα άπειρο σύνολο, ορίζουμε

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

όπου m δηλώνει μήκος ($n=1$), εμβαδό ($n=2$) ή όγκο ($n=3$). Αυτός ο ορισμός ονομάζεται και <u>γεωμετρικός ορισμός</u> της πιθανότητας και μπορεί να επεκταθεί και σε άλλους χώρους πεπερασμένης ή και άπειρης διάστασης στους οποίους ορίζονται <u>μέτρα</u>.

(ii) Αν $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, είναι ένας πεπερασμένος δ.χ. και $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$ $\forall\, i = 1, 2, \dots, n$, δηλ. όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, τότε από το (γ) του ορισμού προκύπτει ότι:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων για το } A}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}}$$

$\forall\, A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_j}\} \subseteq \Omega$ δηλ. αναγόμαστε στον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας.

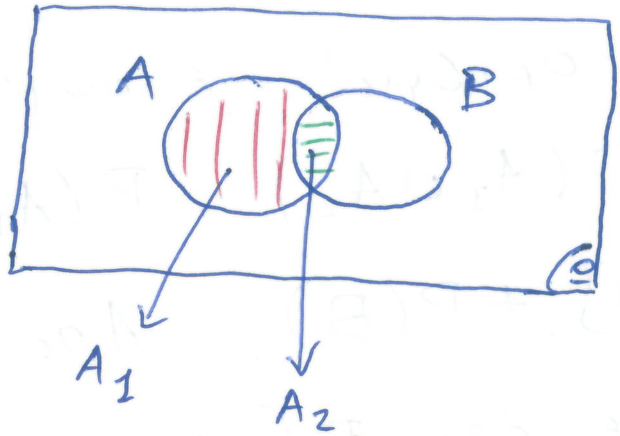
ΚΑΝΟΝΕΣ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

(i) $P(\emptyset)=0$

Αποδ. Άμεση αφού εξ' ορισμού το αδύνατο ενδεχόμενο δεν πραγματοποιείται ποτέ.

(ii) $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

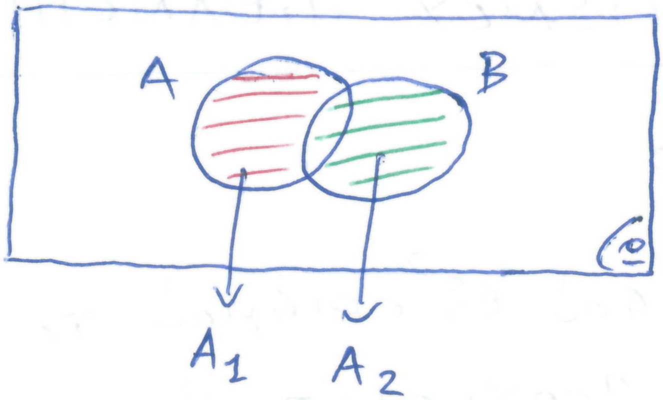
Αποδ.



Από το διάγραμμα Venn παρατηρούμε ότι, $A=A_1\cup A_2$ όπου $A_1=A-B=A\cap B^c$, $A_2=A\cap B$ και $A_1\cap A_2=\emptyset$. Από το (γ) του αξιωματικού ορισμού έχουμε ότι $P(A)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)=P(A-B)+P(A\cap B)\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$.

(iii) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

Αποδ. Από το διάγραμμα Venn παρατηρούμε ότι,



$A \cup B = A_1 \cup A_2$ όπου $A_1 = A - B = A - (A \cap B)$, $A_2 = B$ και $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Από το (γ) του αξιωματικού ορισμού έχουμε ότι $P(A \cup B) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = P[A - (A \cap B)] + P(B)$. Απο το (ii) παραπάνω έχουμε ότι $P[A - (A \cap B)] = P(A) - P(A \cap B)$, οπότε $P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

<u>Σημείωση 2</u> Όταν τα A, B είναι ασυμβίβαστα οπότε $A \cap B = \emptyset$, ο παραπάνω τύπος γράφεται $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ και ονομάζεται <u>προσθετικός νόμος</u>.

(iv). $P(A^c) = 1 - P(A)$

<u>Αποδ.</u> Θέτουμε στο (ii) $A = \Omega$, $B = A$, και χρησιμοποιούμε το (β) του αξιωματικού ορισμού

(v). Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) \leq P(B)$

Αποδ.| Εναλλάσουμε τα A, B στο (ii) και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα (α) του αξιωματικού ορισμού.

(vi) $0 \leq P(A) \leq 1$, $\forall A \subseteq \Omega$

Αποδ.| Θέτουμε στο (v) όπου $B = \Omega$ και χρησιμοποιούμε το (β) του αξιωματικού ορισμού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

1 Αν A, B είναι ενδεχόμενα ενός δ.χ. Ω, να δείξετε ότι η εξίσωση $|2xP(A) + P(B)| = 3x^9$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[0,1]$.

Λύση| Έστω $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ όπου $f(x) = |2xP(A) + P(B)| - 3x^9$, $x \in [0,1]$. Τότε

$f(0) = |2 \cdot 0 \cdot P(A) + P(B)| - 3 \cdot 0^9 = |P(B)| = P(B)$ δεδομένου ότι $P(B) \geq 0$. Άρα $f(0) \geq 0$. $f(1) = |2P(A) + P(B)| - 3$.

Όμως $\left.\begin{array}{l} 0 \leq P(A) \leq 1 \\ 0 \leq P(B) \leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 \leq 2P(A) \leq 2 \\ 0 \leq P(B) \leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$0 \leq 2P(A)+P(B) \leq 3 \Rightarrow 0-3 \leq 2P(A)+P(B)-3 \leq 3-3=0 \Rightarrow 2P(A)+P(B)-3 \leq 0 \Rightarrow |2P(A)+P(B)|-3 \leq 0$ δεδομένου ότι $|2P(A)+P(B)| = 2P(A)+P(B) \geq 0$. Άρα $f(1) \leq 0$. Επειδή $f(0) \cdot f(1) \leq 0$ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(α) $f(0)=0$ ή $f(1)=0$. Τότε η ρίζα της $f(x)=0$ είναι το 0 ή το 1.

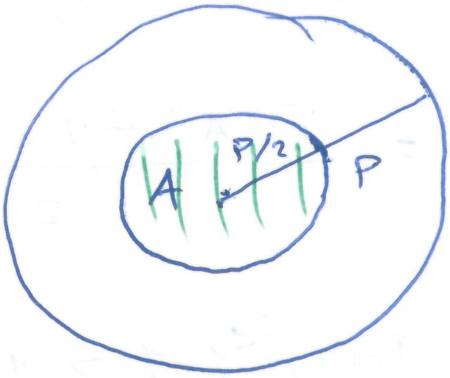
(β) $f(0), f(1) \neq 0$. Τότε $f(0) \cdot f(1) < 0$ και αφού η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ από Θ. Bolzano υπάρχει $\rho \in (0,1)$ ώστε $f(\rho)=0$.

Σε κάθε περίπτωση η $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[0,1]$

---

2. Έστω κύκλος Σ ακτίνας ρ και A το ενδεχόμενο επιλογής τυχαίου σημείου του Σ το οποίο να βρίσκεται πλησιέστερα στο κέντρο του κύκλου απ' ότι στην περιφέρειά του. Να υπολογισθεί η πιθανότητα του A.

Λύση



Προφανώς το A είναι το εσωτερικό ενός κύκλου ομόκεντρου με τον Σ και με ακτίνα ρ/2. Άρα $P(A)=\frac{m(A)}{m(\Sigma)}=\frac{\pi\cdot\left(\frac{\rho}{2}\right)^2}{\pi\cdot\rho^2}=\frac{\frac{\rho^2}{4}}{\rho^2}=\frac{1}{4}=0{,}25$ ή 25%.

---

(3). Έστω A ενδεχόμενο ενός δ.χ. Ω. Να υπολογισθεί ο αριθμητικός μέσος και η διάμεσος των τιμών $P(\emptyset)$, $P(A)$, $P(A^c)$, $P(\Omega)$.

Λύση Ισχύει ότι $P(\emptyset)=0$, $P(\Omega)=1$, $P(A^c)=1-P(A)$, οπότε $\bar{x}=\frac{0+P(A)+1-P(A)+1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Προκειμένου να υπολογίσουμε τη διάμεσο διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(a) $\underline{0<P(A)<\frac{1}{2}}$, τότε $1>1-P(A)=P(A^c)>\frac{1}{2}$ και άρα οι τιμές διατάσσονται κατ' αύξουσα σειρά ως εξής: $0, P(A), 1-P(A), 1$.

Άρα $\delta = \dfrac{x_2+x_3}{2} = \dfrac{P(A)+1-P(A)}{2} = \dfrac{1}{2}$.

(β) $1 > P(A) > \dfrac{1}{2}$, τότε $0 < 1-P(A) < \dfrac{1}{2}$ και άρα οι τιμές διατάσσονται κατ' αύξουσα σειρά ως εξής: $0, 1-P(A), P(A), 1$ οπότε

$$\delta = \frac{x_2+x_3}{2} = \frac{1-P(A)+P(A)}{2} = \frac{1}{2}.$$

(γ) $P(A) = \dfrac{1}{2}$, τότε $P(A^c) = 1-P(A) = \dfrac{1}{2}$, οπότε οι τιμές διατάσσονται ως εξής: $0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1$ και $\delta = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Τελικά $\bar{x} = \delta = \dfrac{1}{2}$.

---

4) Από τον έλεγχο που έγινε σε 1000 λεωφορεία βρέθηκε ότι τα 210 εξέπεμπαν καυσαέρια πάνω από το νόμιμο όριο, τα 170 είχαν φθαρμένα ελαστικά, ενώ σε 50 διαπιστώθηκαν και οι δύο παραβάσεις. Επιλέγουμε ένα λεωφορείο στην τύχη. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες:

(i) Να διαπιστωθεί τουλάχιστον μία από τις δύο παραβάσεις.

(ii) Να μην διαπιστωθεί καμία παράβαση

(iii) Να διαπιστωθεί μία ακριβώς παράβαση.

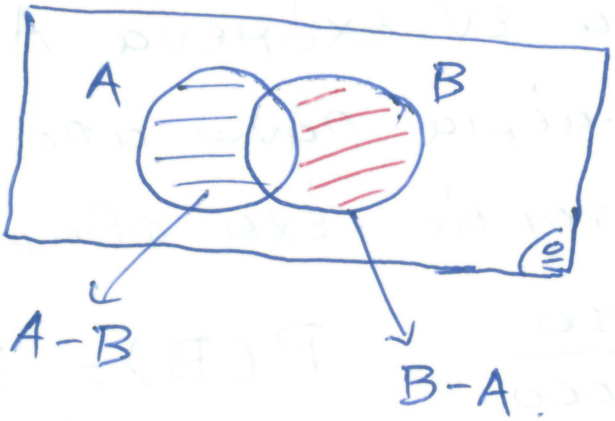
Λύση | Έστω τα ενδεχόμενα A: Το λεωφορείο εκπέμπει καυσαέρια πάνω από το νόμιμο όριο και B: Το λεωφορείο έχει φθαρμένα ελαστικά.

Τότε $P(A) = \frac{210}{1000}$, $P(B) = \frac{170}{1000}$, $P(A \cap B) = \frac{50}{1000}$.

(i) Αν Γ: Το λεωφορείο κάνει τουλάχιστον μία από τις δύο παραβάσεις, τότε $\Gamma = A \cup B$, οπότε $P(\Gamma) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{210}{1000} + \frac{170}{1000} - \frac{50}{1000} = \frac{330}{1000} = \frac{33}{100}$ $= 0,33$ ή 33%.

(ii) Αν Δ: Το λεωφορείο δεν κάνει καμία παράβαση, τότε $\Delta = A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$, οπότε $P(\Delta) = P[(A \cup B)^c] = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,33$ $= 0,67$ ή 67%.

(iii) Αν E: Το λεωφορείο κάνει ακριβώς μια παράβαση, τότε $E=(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$ $=(A-B)\cup(B-A)$. Παρατηρούμε ότι, $(A-B)\cap(B-A)=\emptyset$, οπότε από τον



Προσθετικό νόμο $P(E)=P(A-B)+P(B-A)$ $=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$ $\frac{210}{1000}-\frac{50}{1000}+\frac{170}{1000}-\frac{50}{1000}=\frac{280}{1000}=\frac{28}{100}=$ $0,28$ ή 28%.

---

(5) Έστω M, N δύο ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης τέτοια ώστε $P(M)=0,1$, $P(N)=0,2$, $P(M\cap N)=0,05$. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες:

(i) $P(M\cup N)$ (ii) $P(M^c\cap N^c)$ (iii) $P(M\cap N^c)$ (iv) $P(M^c\cup N^c)$.

Λύση (i) $P(M\cup N) = P(M) + P(N) - P(M\cap N) = 0{,}1 + 0{,}2 - 0{,}05 = 0{,}25$ ή 25%.

(ii) $P(M^c \cap N^c) = P[(M\cup N)^c] = 1 - P(M\cup N) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$ ή 75%.

(iii) $P(M\cap N^c) = P(M-N) = P(M) - P(M\cap N) = 0{,}1 - 0{,}05 = 0{,}05$ ή 5%.

(iv) $P(M^c\cup N^c) = P[(M\cap N)^c] = 1 - P(M\cap N) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$ ή 95%.
