ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ.

Ορισμός 1 Έστω Ω ο δ.χ. ενός πειράματος τύχης. Μια συνάρτηση $X: \Omega \to \mathbb{R}$ ονομάζεται τυχαία μεταβλητή τ.μ. Η τ.μ. εκφράζει το ποσοτικό χαρακτηριστικό που εξετάζουμε. Τις τ.μ. θα τις συμβολίζουμε με $X, Y, Z, \ldots$ ενώ τις τιμές τους με $x, y, z \ldots$ αντίστοιχα.

Παράδειγμα 1 Ρίχνουμε ένα κέρμα 2 φορές και έστω X ο αριθμός των κεφαλών που εμφανίζονται. Τότε $\Omega = \{(\Gamma,\Gamma), (\Gamma,K), (K,\Gamma), (K,K)\}$. Τότε $X(\{(\Gamma,\Gamma)\}) = 0$, $X(\{\Gamma,K\}) = 1$, $X(\{K,\Gamma\}) = 1$, $X(\{K,K\}) = 2$.

Ορισμός 2 (i) Μια τ.μ. X ονομάζεται διακριτή αν το σύνολο τιμών της είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμα άπειρο. και καθεμιά από τις τιμές της έχει θετική πιθανότητα. Δηλ. αν η X παίρνει τις τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ τότε

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_k\}) = P(X = x_k) = p_k > 0,$$

$k = 1, 2, \ldots$ και $\sum_{k=1}^{\infty} P(X = x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 = P(\Omega)$

Επιπλέον αν $A = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, \ldots\} \subseteq \Omega$, τότε

$$P(A)=\sum_{k=1}^{\infty} p_{i_k}.$$

(ii). Αν το σύνολο τιμών $X(\Omega)$ της X είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο (π.χ. ένα διάστημα (a,b) ή όλο το $\mathbb{R}$) και επιπλέον $P(X=x)=0$, $\forall x\in X(\Omega)$, τότε η X ονομάζεται <u>συνεχής</u> τ.μ.

<u>Παράδειγμα 2</u> (i) Παραδείγματα διακριτών τ.μ. αποτελούν το αποτέλεσμα της ρίψης ενός κέρματος ή ενός ζαριού, ο ημερήσιος αριθμός πελατών σ' ένα κατάστημα, ο ετήσιος αριθμός τροχαίων ατυχημάτων κ.ά.

(ii). Παραδείγματα συνεχών τ.μ. αποτελούν το μήκος, το εμβαδόν, ο όγκος, η ηλικία, το ύψος, το βάρος κ.ά.

<u>Ορισμός 3</u> (i) Έστω X τ.μ. Τότε η συνάρτηση $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ όπου $F(x)=P(X\le x)=P(\{\omega\in\Omega: X(\omega)\le x\})$ ονομάζεται <u>συνάρτηση κατανομής</u> (σ.κ.) ή <u>αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας</u> της τ.μ. X και συμβ. F_X.

(ii). Αν η X είναι διακριτή τ.μ. τότε η συνάρτηση

$f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου $f_X(x) = \begin{cases} p_k, & x = x_k \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

ονομάζεται <u>συνάρτηση πιθανότητας</u> (σ.π.) της X και ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

(α) $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(β) $\sum_{k=1}^{\infty} f_X(x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$

(iii). Αν X συνεχής τ.μ. τότε η συνάρτηση κατανομής της F_X είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $f_X(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ και

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Η f_X ονομάζεται <u>συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας</u> (σ.π.) της X και ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

(α) $f_X(x) = F_X'(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$

(β) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1.$$

<u>Πρόταση 1</u> (i) Η συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) F_X και η συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) f_X μιας διακριτής τ.μ. X ικανοποιούν τις σχέσεις:

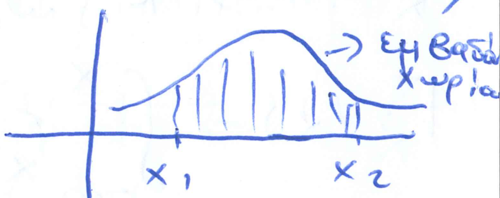
(α) $F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{x_k \le x} P(X = x_k) = \sum_{x_k \le x} f_X(x_k) = 1 - P(X > x)$.

(β) $f_X(x_k) = P(X = x_k) = P(X \le x_k) - P(X \le x_{k-1}) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots$

(γ) $P(x_k \le X \le x_\lambda) = P(X \le x_\lambda) - P(X \le x_{k-1})$

(ii). Αν f_X είναι η σ.π. μιας συνεχούς τ.μ. X και $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \le x_2$, τότε

$$P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 < X \le x_2) = P(x_1 \le X < x_2) = P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx.$$



Παρατήρηση 1. Αν $x_1 = x_2$ τότε από την τελευταία σχέση $P(X = x_1 = x_2 = x) = \int_{x_1}^{x_1} f_X(x)\,dx = 0$ και συνεπώς αν X συνεχής τ.μ και $f_X(x)$ η σ.π. αυτής τότε αν θέσουμε $x = x_1 = x_2$ η τιμή $f_X(x_1)$ που μπορεί να είναι $\neq 0$ δεν δίνει την $P(X = x_1)$ όπως θα ίσχυε αν η X ήταν διακριτή τ.μ. Δίνει την πυκνότητα της πιθανότητας της X στο σημείο x_1.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ Τ.Μ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω ότι η τ.μ. X παίρνει τις τιμές $x=0,1,2,\ldots$ με αντίστοιχη πιθανότητα

$$P(X=x)=f(x)=\frac{c}{3^x}\ ,\quad c\in\mathbb{R}.$$

(i) Να υπολογισθεί η τιμή της σταθεράς c ώστε η $f(x)$ να είναι σ.π. της τ.μ. X.

(ii) Να υπολογισθεί η $P(X\geq 10)$

Λύση (i) Η $f(x)$ θα πρέπει να ικανοποιεί τις ιδιότητες (α) και (β) του ορισμού 3 (ii).
Άρα $f(x)\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \frac{c}{3^x}\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow c\geq 0$.
Επιπλέον $\sum\limits_{x=0}^{\infty} f(x)=1 \Rightarrow \sum\limits_{x=0}^{\infty}\frac{c}{3^x}=1\Rightarrow c\cdot\sum\limits_{x=0}^{\infty}\frac{1}{3^x}$
$=1 \Rightarrow \sum\limits_{x=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{c}$. Το αριστερό μέλος είναι το άθροισμα των απείρων όρων μιας γεωμετρικής σειράς με πρώτο όρο $a_0=\left(\frac{1}{3}\right)^0=1$ και λόγο $\lambda=\frac{1}{3}$, οπότε $\sum\limits_{x=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{a_0}{1-\lambda}=$
$\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$. Άρα $\frac{3}{2}=\frac{1}{c}\Rightarrow c=\frac{2}{3}$

Ορισμός 4 Η μέση ή αναμενόμενη τιμή ή μαθηματική ελπίδα $E(X)$ ή μ_X μιας τ.μ. X με σ.π. $f_X(x)$ δίνεται από τον τύπο:

(α) $\mu_X = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot f_X(x_k)$ (εφόσον υπάρχει), αν X διακριτή τ.μ.

(β) $\mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,dx$ (εφόσον υπάρχει), αν X συνεχής τ.μ.

Ορισμός 5 Έστω X τ.μ. με μέση τιμή $\mu_X = \mu$ και σ.π. $f_X(x)$.

(i) Η διασπορά ή διακύμανση $V(X)$ ή σ_X^2 δίνεται από τον τύπο:

(α) $V(X) = E((X-\mu)^2) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k-\mu)^2 \cdot f_X(x_k)$ (εφόσον υπάρχει), αν X διακριτή τ.μ.

(β) $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f_X(x)\,dx$ (εφόσον υπάρχει), αν X συνεχής τ.μ.

(ii) Η τυπική απόκλιση σ_X της X δίνεται από τον τύπο $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$.

(ii) $P(X \geq 10) = \sum_{x=10}^{\infty} f(x) = \sum_{x=10}^{\infty} \frac{\frac{2}{3}}{3^x} =$

$\frac{2}{3} \cdot \sum_{x=10}^{\infty} \frac{1}{3^x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{1}{3^{10}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{1}{3^{10}}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3^{10}}$

---

2. Αν η σ.π. μιας τ.μ. X ισούται με

$$f_X(x) = \begin{cases} c \cdot x \cdot (1-x^2), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να υπολογισθούν: (i) η τιμή της σταθεράς c
(ii) η μέση τιμή της X.

Λύση (i) Με βάση τον ορισμό 3(iii) θα πρέπει $f_X(x) \geq 0 \Rightarrow c \cdot x \cdot (1-x^2) \geq 0 \Rightarrow c \geq 0$ δεδομένου ότι $x \cdot (1-x^2) \geq 0 \ \forall x \in [0,1]$ και επιπλέον $f_X(x) = 0 \ \forall x \notin [0,1]$. Ακόμα θα πρέπει $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} f_X(x)dx + \int_0^1 f_X(x)dx$ $+ \int_1^{+\infty} f_X(x)dx = 1 \Rightarrow 0 + \int_0^1 f_X(x)dx + 0 = 1 \Rightarrow$

$\int_0^1 c \cdot x \cdot (1-x^2)dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 cx\,dx - \int_0^1 cx^3dx = 1$

$\Rightarrow c \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - c \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = 1 \Rightarrow c \cdot \left(\frac{1}{2} - 0\right) - c \cdot \left(\frac{1}{4} - 0\right)$

$= 1 \Rightarrow \frac{c}{2} - \frac{c}{4} = 1 \Rightarrow \frac{c}{4} = 1 \Rightarrow c = 4$. Άρα

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x(1-x^2), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(ii) Από τον ορισμό 4(Β) προκύπτει ότι

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot f_X(x)\,dx + \int_{0}^{1} x \cdot f_X(x)\,dx$$

$$+ \int_{1}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = 0 + \int_{0}^{1} x \cdot f_X(x)\,dx + 0 =$$

$$\int_0^1 x \cdot 4x(1-x^2)\,dx = \int_0^1 4x^2(1-x^2)\,dx = \int_0^1 4x^2\,dx$$

$$- \int_0^1 4x^4\,dx = 4 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - 4 \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = 4 \cdot \left(\frac{1}{3} - 0\right)$$

$$- 4 \cdot \left(\frac{1}{5} - 0\right) = \frac{4}{3} - \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

---

3) Σε μια λαχειοφόρο αγορά που γίνεται για φιλανθρωπικούς σκοπούς διατίθενται 10.000 λαχνοί και πρόκειται να κληρωθούν 1 αυτοκίνητο αξίας 20.000 €, 3 στερεοφωνικά συγκροτήματα αξίας 2.000 € το καθένα και 5 τηλεοράσεις αξίας 1.000 € η καθεμία. Ποιά είναι η δίκαιη τιμή πώλησης του κάθε λαχνού;

Λύση| Η δίκαιη τιμή πώλησης πρέπει να

ισούται με το αναμενόμενο κέρδος ανά λαχνό. Αν X το κέρδος του κάθε λαχνού, τότε η X είναι μια διακριτή τ.μ. με κατανομή πιθανότητας που φαίνεται παρακάτω:

x	20.000	2.000	1.000	αλλιώς
$f_X(x)$	$\frac{1}{10.000}$	$\frac{3}{10.000}$	$\frac{5}{10.000}$	0

Άρα $\mu_X = E(X) = 20.000 \cdot \frac{1}{10.000} + 2.000 \cdot \frac{3}{10.000} + 1.000 \cdot \frac{5}{10.000} = 2 + 0{,}60 + 0{,}50 = 3{,}10€$.

Η δίκαιη τιμή πώλησης πρέπει να είναι 3,10 €. Στην περίπτωση αυτή το αναμενόμενο τελικό κέρδος κάθε συμμετέχοντα θα είναι 0 και επιπλέον το αναμενόμενο τελικό κέρδος του διοργανωτή θα ισούται με: έσοδα από την πώληση των λαχνών − κόστος αυτοκινήτου − κόστος στερεοφωνικών συγκροτημάτων − κόστος τηλεοράσεων =
$3{,}10 \cdot 10.000 - 20.000 - 3 \cdot 2.000 - 5 \cdot 1.000$
$= 31.000 - 20.000 - 6.000 - 5.000 = 0$.