ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΣΤΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 1



ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ: ΕΛΕΓΧΟΙ ΕΝΟΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

Τι Είναι Υπόθεση;

- Μια υπόθεση είναι ένας ισχυρισμός για μια **παράμετρο** του πληθυσμού:
  - Μέση τιμή πληθυσμού

Παράδειγμα: Ο μέσος μηνιαίος λογαριασμός κινητής τηλεφωνίας σε αυτή την πόλη είναι μ = $42

  - ποσοστό πληθυσμού

Παράδειγμα: Το ποσοστό των ενηλίκων σε αυτή την πόλη με κινητά τηλέφωνα είναι π = 0,68

Η Μηδενική Υπόθεση, Η0

- Δηλώνει τον ισχυρισμό που πρόκειται να ελεγχθεί

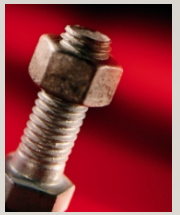
Παράδειγμα: Η μέση διάμετρος ενός παραγόμενου μπουλονιού είναι 30mm

$$H_o : \mu = 30$$

- Αναφέρεται **πάντα** σε μια **παράμετρο** του πληθυσμού και όχι σε ένα στατιστικό του δείγματος

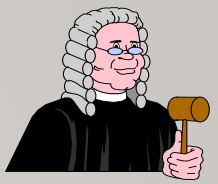
$H_0 : \mu = 30$

$H_0 : \overline{X} = 30$



Η Μηδενική Υπόθεση, Η0

(συνέχεια)

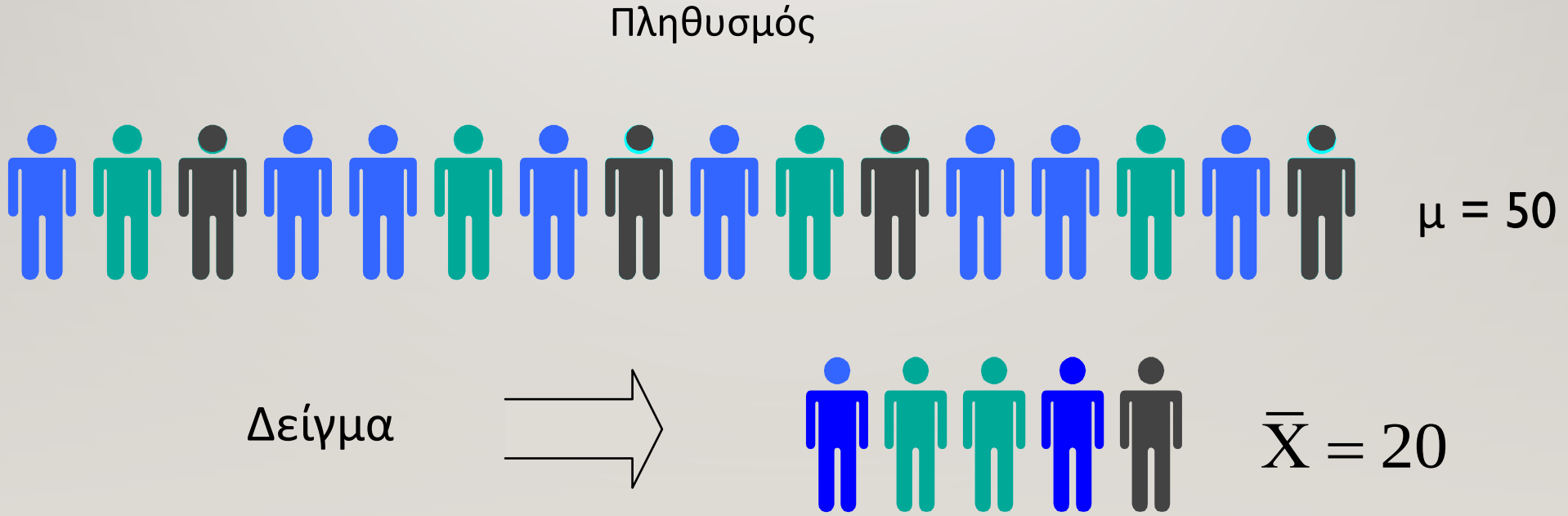


- Ξεκινάμε με τον ισχυρισμό ότι η μηδενική υπόθεση **αληθεύει**
  - Παρόμοια με την έννοια του “αθώος μέχρι να αποδειχθεί ένοχος”

- Αναφέρεται στην τωρινή κατάσταση ή στην ιστορική αξία
- Πάντα περιέχει τα σύμβολα “=“, ή “≤”, ή “≥”
- Μπορεί να **απορριφθεί** ή μπορεί και **να μην απορριφθεί**

Η Διαδικασία Ελέγχου Υποθέσεων

- Ισχυρισμός: Η μέση ηλικία του πληθυσμού δεν είναι 50.
  - H_0: $\mu = 50$, H_1: $\mu \neq 50$
- Πάρτε δείγμα από τον πληθυσμό και βρείτε τον δειγματικό μέσο.



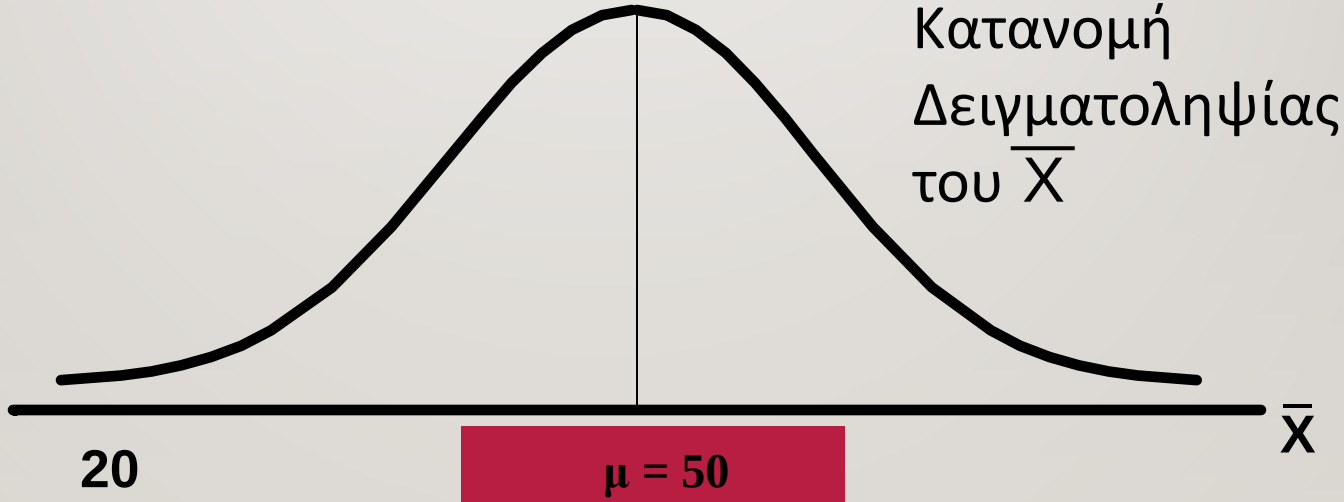
Η Διαδικασία Ελέγχου Υποθέσεων

(συνέχεια)

- Έστω ότι η δειγματική μέση ηλικία για το συγκεκριμένο δείγμα ήταν $\bar{X} = 20$
- Αυτή είναι σημαντικά μικρότερη από την υποτιθέμενη μέση πληθυσμιακή ηλικία των 50.
- **Αν η μηδενική υπόθεση ήταν αληθής**, η πιθανότητα να πάρετε μία τέτοια τιμή για το δειγματικό μέσο **τόσο διαφορετική** από την υποτιθέμενη μέση πληθυσμιακή ηλικία των 50 θα ήταν πολύ μικρή, οπότε **απορρίπτετε** την μηδενική υπόθεση.
- Με άλλα λόγια, η απόκτηση ενός δειγματικού μέσου 20 είναι τόσο απίθανη **αν η μέση τιμή του πληθυσμού ήταν 50**, που συμπεραίνετε ότι η μέση τιμή του πληθυσμού δεν πρέπει να είναι 50.

Η Διαδικασία Ελέγχου Υποθέσεων

(συνέχεια)



Κατανομή Δειγματοληψίας του $\overline{X}$

$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Αν είναι απίθανο να πάρετε έναν δειγματικό μέσο με αυτή την τιμή..

μ = 50
***Αν η* H_0 *είναι* αληθής**

... Όταν στην πραγματικότητα αυτός ήταν ο μέσος πληθυσμού…

... τότε απορρίπτετε την μηδενική υπόθεση ότι μ = 50.

Στατιστική Συνάρτηση Ελέγχου και Κρίσιμες Τιμές

- Αν ο δειγματικός μέσος είναι κοντά στην υποτιθέμενη μέση τιμή του πληθυσμού, η μηδενική υπόθεση δεν απορρίπτεται.

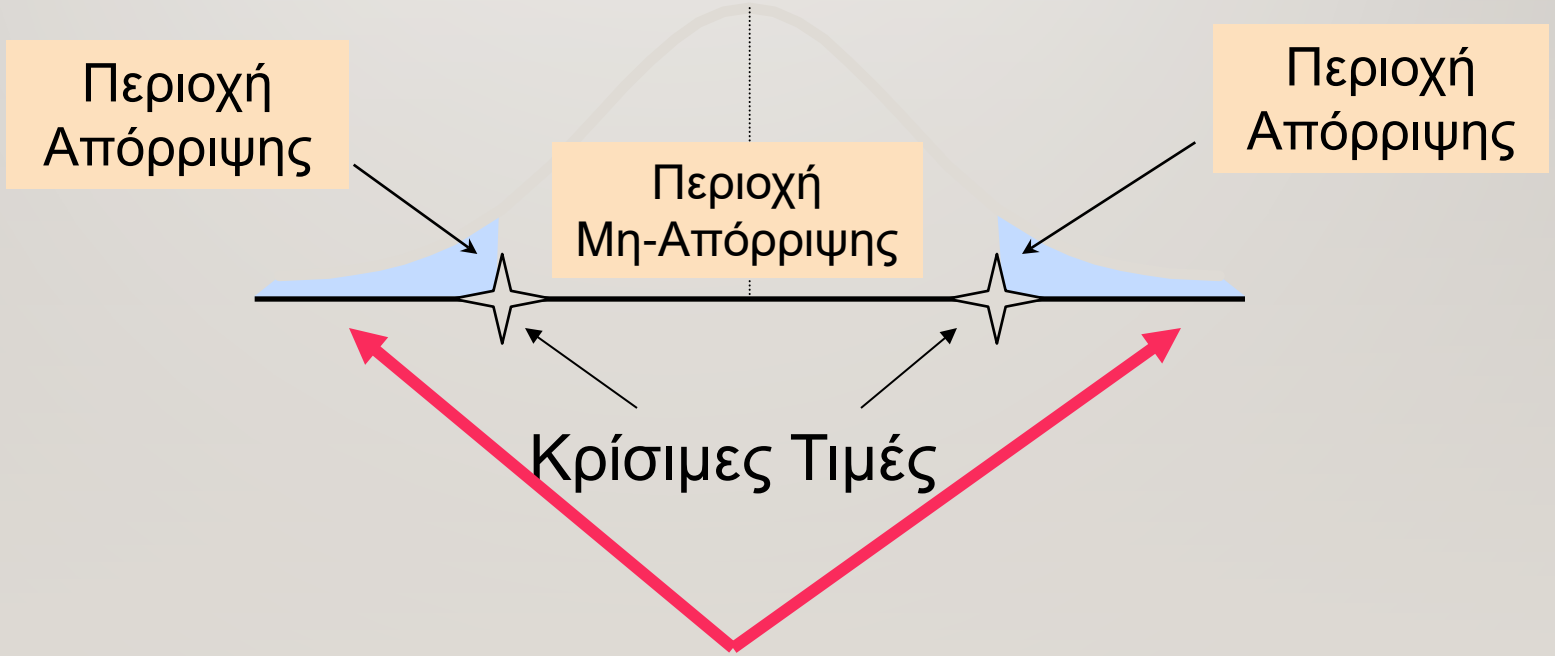
- Αν ο δειγματικός μέσος είναι μακριά από την υποτιθέμενη μέση τιμή του πληθυσμού, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται.

- **Πόσο μακριά είναι το "αρκετά μακριά" για να απορρίψετε την H_0;**

- Η κρίσιμη τιμή μιας στατιστικής συνάρτησης ελέγχου δημιουργεί μια "γραμμή στην άμμο" για την λήψη αποφάσεων – απαντά στο ερώτημα πόσο μακριά είναι το αρκετά μακριά

Στατιστική Συνάρτηση Ελέγχου και Κρίσιμες Τιμές

Κατανομή Δειγματοληψίας της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου



"Πολύ μακριά" Από τον Μέσο της Κατανομής Δειγματοληψίας

Πιθανά Σφάλματα Ελέγχου Υποθέσεων στην Λήψη Αποφάσεων

(συνέχεια)

Πιθανά Αποτελέσματα Ελέγχου Υποθέσεων		
	Πραγματική Κατάσταση	
Απόφαση	H_0 Αληθής	H_0 Ψευδής
Δεν Απορρίπτετε την H_0	Κανένα Σφάλμα Πιθανότητα 1 - α	Σφάλμα Τύπου II Πιθανότητα β
Απορρίπτετε την H_0	Σφάλμα Τύπου I Πιθανότητα **α**	Κανένα Σφάλμα Ισχύς 1 - β

Κίνδυνοι στην Λήψη Αποφάσεων με τη Χρήση Ελέγχων Υποθέσεων

- **Σφάλμα Τύπου Ι**
  - Απορρίπτετε μια αληθή μηδενική υπόθεση
  - Ένα σφάλμα τύπου Ι είναι ένας “ψευδής συναγερμός”
  - Η πιθανότητα ενός Σφάλματος Τύπου Ι είναι **α**
    - Καλείται επίπεδο **στατιστικής σημαντικότητας** του ελέγχου (level of statistical significance)
    - Ορίζεται από τον ερευνητή **εκ των προτέρων**
- **Σφάλμα Τύπου ΙΙ**
  - Αποτυχία να απορρίψετε μια ψευδή μηδενική υπόθεση
  - Το σφάλμα τύπου ΙΙ αντιπροσωπεύει μια “χαμένη ευκαιρία”
  - Η πιθανότητα ενός Σφάλματος Τύπου ΙΙ είναι **β**

Αν η διαφορά μιας παραμέτρου από μία τιμή είναι **υπαρκτή** ή θα μπορούσε να είχε προκύψει από τύχη

Πιθανά Σφάλματα Ελέγχου Υποθέσεων Στην Λήψη Αποφάσεων

(συνέχεια)

- Το επίπεδο εμπιστοσύνης (1-α) είναι η πιθανότητα μη απόρριψης της H_0 όταν είναι αληθής.
- Το επίπεδο εμπιστοσύνης ενός ελέγχου υποθέσεων είναι (1-α)*100%.
- Η ισχύς ενός στατιστικού ελέγχου (1-β) είναι η πιθανότητα απόρριψης της H_0 όταν είναι ψευδής.

Σχέση Σφάλματος Τύπου I & II

- Τα Σφάλματα Τύπου I και Τύπου II δεν μπορούν να συμβούν ταυτόχρονα
  - Ένα σφάλμα Τύπου I μπορεί να συμβεί μόνο αν η H_0 είναι αληθής
  - Ένα σφάλμα Τύπου II μπορεί να συμβεί μόνο αν η H_0 είναι ψευδής

Αν η πιθανότητα σφάλματος Τύπου I (α)  , τότε

η πιθανότητα σφάλματος Τύπου II (β) 

Σφάλμα Τύπου I & II -ΗΥ

H0: Μη Κακόβουλο λογισμικό

H_1: Κακόβουλο λογισμικό

Ψευδής συναγερμός

α=Pr(Σφάλμα Τύπου I)=Pr(H0 | H0 σωστή):False Positive

False Positive: Ένα Μη Κακόβουλο λογισμικό μπλοκάρεται

Χαμένη ευκαιρία

β=Pr(Σφάλμα Τύπου II)=Pr(H0 | H0 ψευδής): False Negative

False Negative: Ένα Κακόβουλο λογισμικό δεν μπλοκάρεται

Σφάλμα Τύπου I & II - Ιατρική

H0: Υγιής

H I: Μη υγιής

Ψευδής συναγερμός

α=Pr(Σφάλμα Τύπου I)=Pr(~~H0~~ | H0 σωστή):False Positive

False Positive: Ένας υγιής διαγνώσθηκε με ασθένεια

Χαμένη ευκαιρία

β=Pr(Σφάλμα Τύπου II)=Pr(H0 | H0 ψευδής): False Negative

False Negative: Ένας ασθενής διαγνώσθηκε χωρίς ασθένεια

Σφάλμα Τύπου I & II - Ιατρική

H0: Υγιής (δεν έχει COVID)

H1: Μη υγιής (έχει COVID)

Ψευδής συναγερμός

α=Pr(Σφάλμα Τύπου I)=Pr(~~H0~~ | H0 σωστή):False Positive

False Positive: Ένας υγιής διαγνώσθηκε με COVID

Χαμένη ευκαιρία

β=Pr(Σφάλμα Τύπου II)=Pr(H0 | H0 ψευδής): False Negative

False Negative: Ένας ασθενής διαγνώσθηκε ότι δεν έχει COVID

Σφάλμα Τύπου I & II - Ιατρική

H0: Υγιής (δεν έχει COVID)

H1: Μη υγιής (έχει COVID)

Ψευδής συναγερμός

α=Pr(Σφάλμα Τύπου I)=Pr(~~H0~~ | H0 σωστή):False Positive

False Positive: Ένας υγιής διαγνώσθηκε με COVID

Συνέπειες:

- Το άτομο μπορεί να χρειαστεί να απομονωθεί αδικαιολόγητα.
- Ψυχολογικό άγχος και πιθανές οικονομικές/κοινωνικές συνέπειες.
- Άσκοπη χρήση ιατρικών πόρων.

Σφάλμα Τύπου I & II - Ιατρική

H0: Υγιής (δεν έχει COVID)

H1: Μη υγιής (έχει COVID)

Χαμένη ευκαιρία

β=Pr(Σφάλμα Τύπου II)=Pr(H0 | H0 ψευδής): False Negative

False Negative: Ένας ασθενής διαγνώσθηκε ότι δεν έχει COVID

Συνέπειες:

- Το άτομο συνεχίζει να κυκλοφορεί, μεταδίδοντας τον ιό σε άλλους.
- Καθυστέρηση στη λήψη θεραπείας, που μπορεί να επιδεινώσει την υγεία του.
- Αυξημένος κίνδυνος επιδείνωσης της πανδημίας.

Σφάλμα Τύπου I & II - Ιατρική

H0: Υγιής (δεν έχει COVID)

H1: Μη υγιής (έχει COVID)

α=Pr(Σφάλμα Τύπου I)=Pr(~~H0~~ | H0 σωστή):False Positive

False Positive: Ένας υγιής διαγνώσθηκε με COVID

β=Pr(Σφάλμα Τύπου II)=Pr(H0 | H0 ψευδής): False Negative

False Negative: Ένας ασθενής διαγνώσθηκε ότι δεν έχει COVID

Στο παράδειγμα του COVID, το λάθος Τύπου **II** (False Negative) είναι πιο σημαντικό, γιατί μπορεί να οδηγήσει σε **μη διάγνωση θετικών κρουσμάτων** και σοβαρές επιπτώσεις τόσο για το άτομο όσο και για την κοινωνία. Παρόλα αυτά, το λάθος Τύπου **I** (False Positive) έχει και αυτό τις δικές του συνέπειες, κυρίως σε επίπεδο ψυχολογικό και διαχείρισης πόρων.
Η προτεραιότητα, φυσικά, εξαρτάται από το πλαίσιο: σε μια πανδημία, το λάθος Τύπου II συνήθως θεωρείται πιο κρίσιμο, γιατί ο στόχος είναι να ελαχιστοποιηθεί η διασπορά της νόσου.

Σφάλμα Τύπου I & II - Ιατρική

H0: Υγιής (δεν έχει Ca)

H1: Μη υγιής (έχει Ca)

Ψευδής συναγερμός

α=Pr(Σφάλμα Τύπου I)=Pr(~~H0~~ | H0 σωστή):False Positive

False Positive: Ένας υγιής διαγνώσθηκε με Ca

Χαμένη ευκαιρία

β=Pr(Σφάλμα Τύπου II)=Pr(H0 | H0 ψευδής): False Negative

False Negative: Ένας ασθενής διαγνώσθηκε ότι δεν έχει Ca

Σφάλμα Τύπου I & II - Ιατρική

H0: Υγιής (δεν έχει Ca)

H1: Μη υγιής (έχει Ca)

Ψευδής συναγερμός

α=Pr(Σφάλμα Τύπου I)=Pr(~~H0~~ | H0 σωστή):False Positive

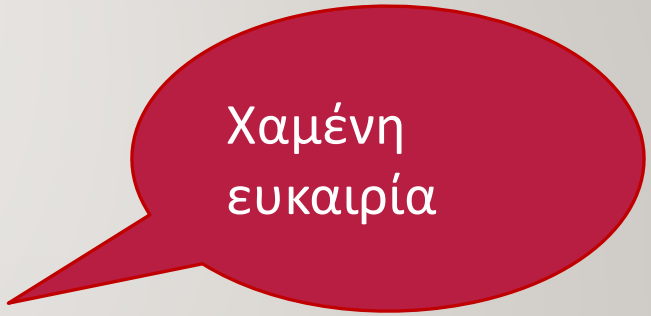
False Positive: Ένας υγιής διαγνώσθηκε με Ca

- **Συνέπειες:**
- Το άτομο μπορεί να υποβληθεί σε περιττές, επεμβατικές και επώδυνες θεραπείες (π.χ., χημειοθεραπεία, ακτινοθεραπεία ή ακόμα και χειρουργική επέμβαση).
- Ψυχολογική επιβάρυνση από τη διάγνωση.
- Οικονομικό κόστος για θεραπείες και παρακολούθηση που δεν είναι απαραίτητες.
- Σπατάλη ιατρικών πόρων, που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για ασθενείς που πραγματικά έχουν καρκίνο.

Σφάλμα Τύπου I & II - Ιατρική

H0: Υγιής (δεν έχει Ca)

H1: Μη υγιής (έχει Ca)



β=Pr(Σφάλμα Τύπου II)=Pr(H0 | H0 ψευδής): False Negative

False Negative: Ένας ασθενής διαγνώσθηκε ότι δεν έχει Ca

Συνέπειες:

- Η διάγνωση καθυστερεί, και αυτό μπορεί να οδηγήσει σε επιδείνωση της κατάστασης ή ακόμα και θάνατο.
- Ωστόσο, σε σπάνιες ασθένειες, το συνολικό ποσοστό False Negatives μπορεί να είναι χαμηλό.

Σφάλμα Τύπου I & II - Ιατρική

H0: Υγιής (δεν έχει Ca)

H1: Μη υγιής (έχει Ca)

α=Pr(Σφάλμα Τύπου I)=Pr(~~H0~~ | H0 σωστή):False Positive

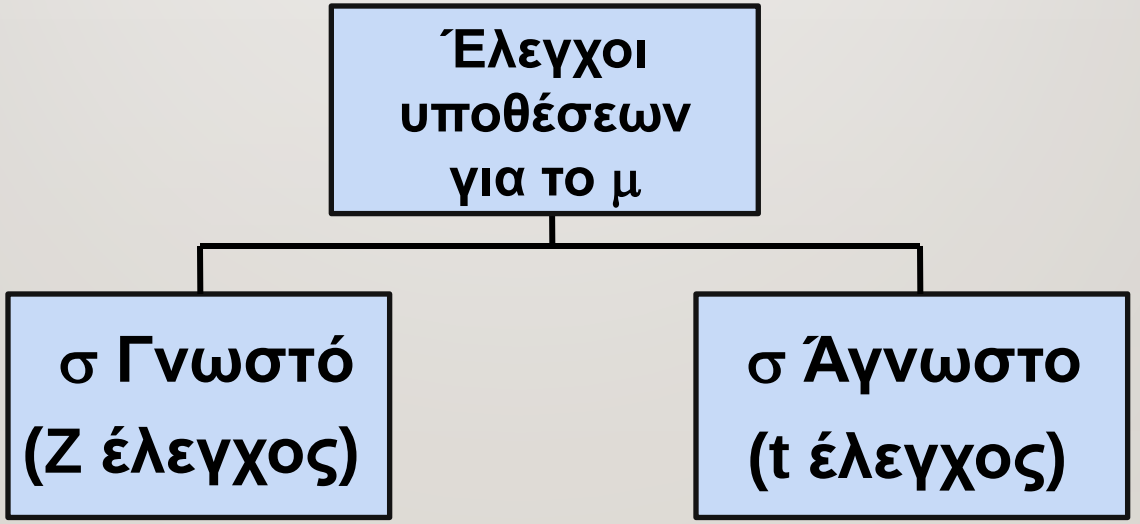
False Positive: Ένας υγιής διαγνώσθηκε με Ca

β=Pr(Σφάλμα Τύπου II)=Pr(H0 | H0 ψευδής): False Negative

False Negative: Ένας ασθενής διαγνώσθηκε ότι δεν έχει Ca

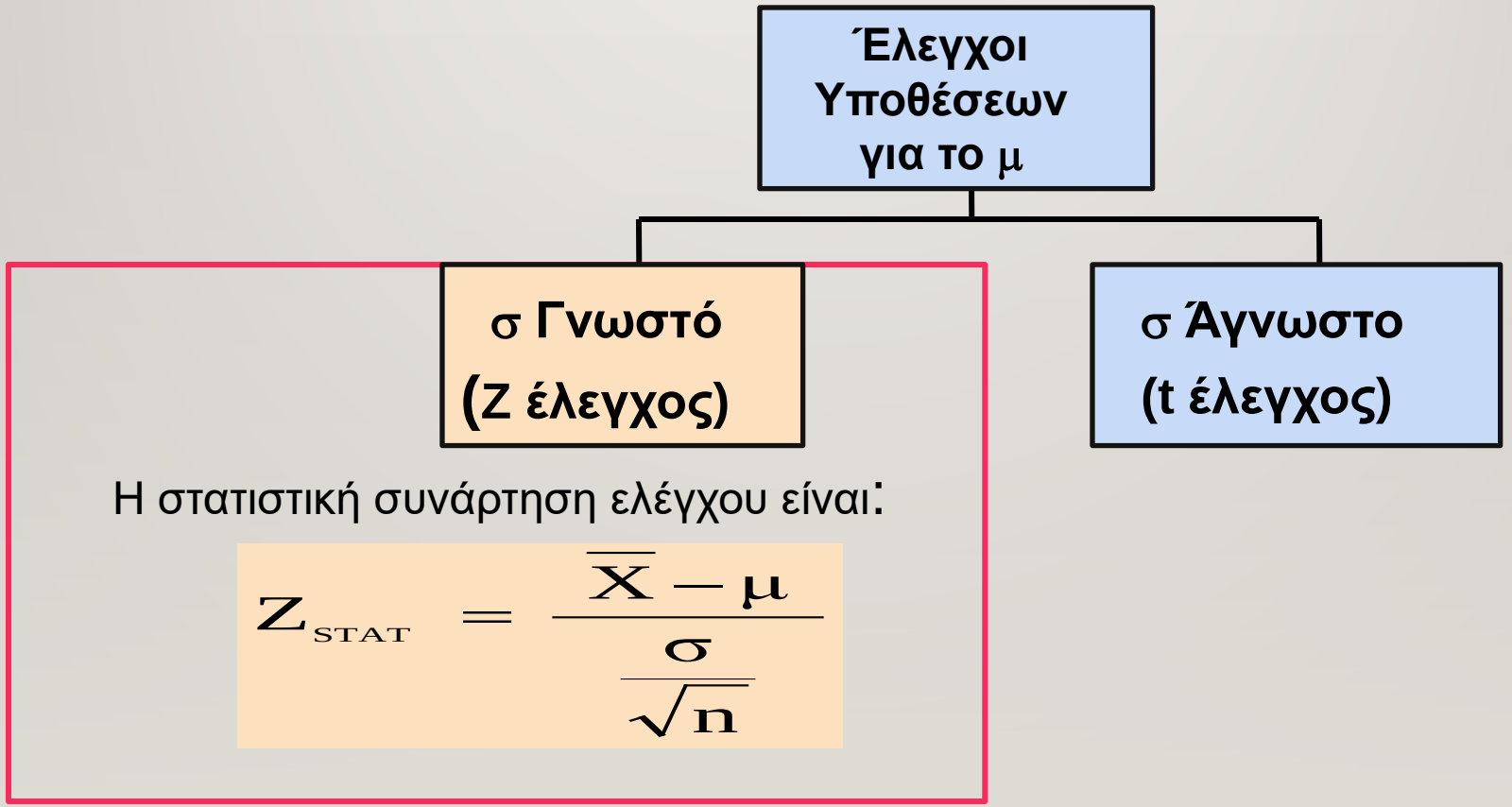
Στις σπάνιες ασθένειες, όπως ο καρκίνος, επιτρέπουμε τα τεστ να οδηγούν σε **υψηλά False Positives** και **χαμηλά False Negatives**, διότι η προτεραιότητα είναι να **μη χάσουμε κανέναν ασθενή** που μπορεί να χρειάζεται θεραπεία.
Το λάθος Τύπου I θεωρείται πιο κρίσιμο, γιατί ο στόχος είναι να προστατευτεί η ζωή και η υγεία των ατόμων που είναι πραγματικά ασθενείς.

Έλεγχοι Υποθέσεων για τη Μέση τιμή μ



Z Έλεγχος Υποθέσεων για τον Μέσο (σ Γνωστό)

- Μετατρέψτε το στατιστικό δείγματος ($\overline{X}$) σε μια Z_{STAT} στατιστική συνάρτηση ελέγχου



Η στατιστική συνάρτηση ελέγχου είναι:

$$Z_{STAT} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

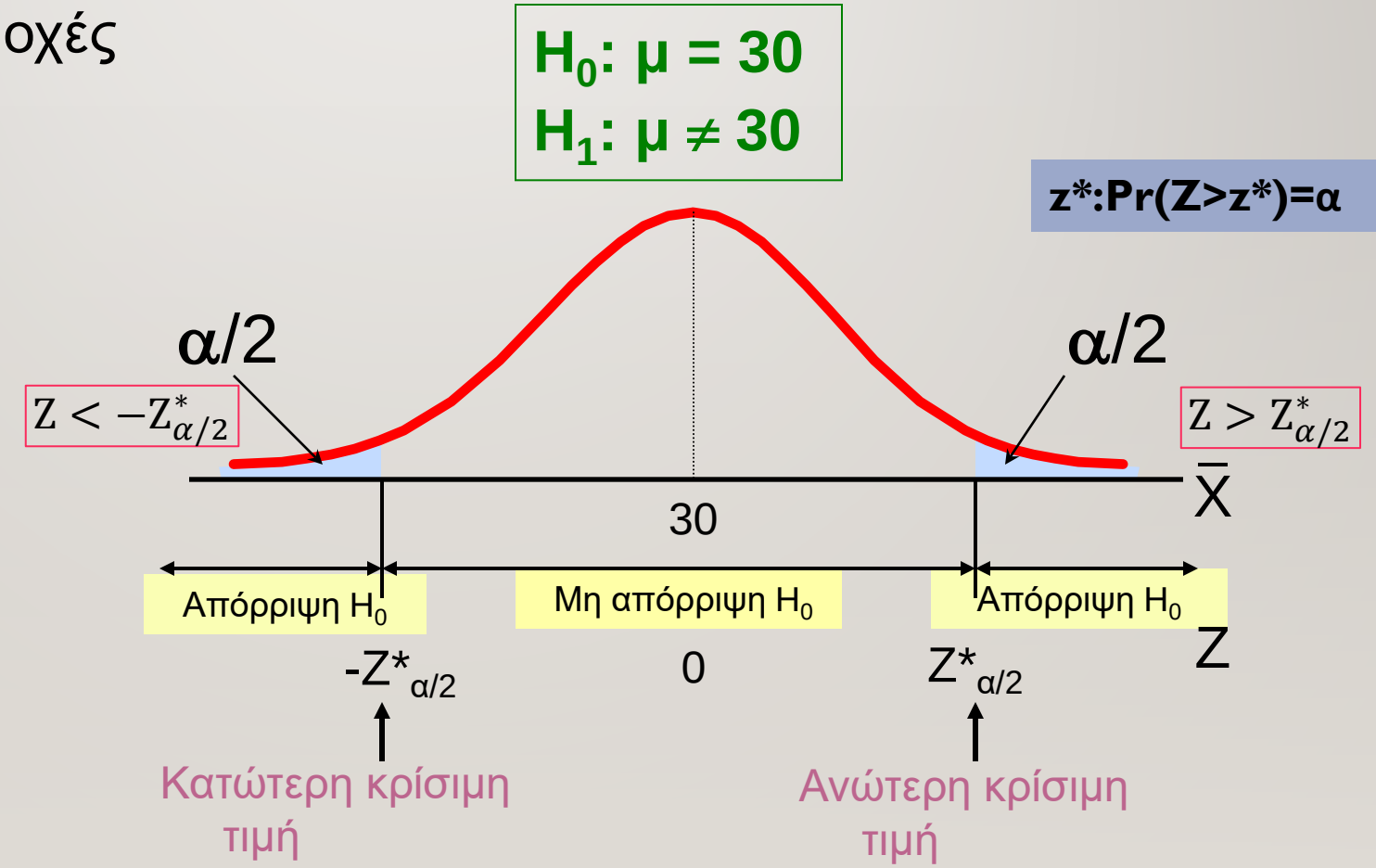
Η Προσέγγιση της Κρίσιμης Τιμής στον Έλεγχο

- Για έναν αμφίπλευρο έλεγχο για τη μέση τιμή μ, **σ γνωστό**
- Μετατρέψτε το στατιστικό δείγματος $\bar{X}$ σε στατιστική συνάρτηση ελέγχου (Z_{STAT})
- Προσδιορίστε τις κρίσιμες Z τιμές για ένα καθορισμένο επίπεδο σημαντικότητας **α** από έναν πίνακα ή χρησιμοποιώντας λογισμικό υπολογιστή
- Κανόνας Απόφασης: Αν η στατιστική συνάρτηση ελέγχου είναι **εντός** της περιοχής απόρριψης, απορρίπτετε την H_0, διαφορετικά δεν απορρίπτετε την H_0

Αμφίπλευροι Έλεγχοι

- Υπάρχουν δύο κρίσιμες τιμές, προσδιορίζοντας τις περιοχές απόρριψης

H_0 αν $|Z| > Z^*_{\alpha/2}$



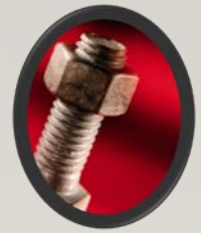
Παράδειγμα Ελέγχου Υποθέσεων

Σύμφωνα με τις προδιαγραφές η μέση διάμετρος ενός παραγόμενου μπουλονιού είναι 30mm. Ο υπεύθυνος ποιοτικού ελέγχου πραγματοποιεί συχνά ελέγχους για το αν το μηχάνημα λειτουργεί σύμφωνα με τις προδιαγραφές και για το λόγο αυτό συλλέγει δείγμα 100 στοιχείων για τα οποία η μέση διάμετρος τους είναι 29.84. Ο πληθυσμός είναι κανονικός και η τυπική απόκλιση της διαμέτρου του μπουλονιού είναι 0.8. Θα πρέπει ο υπεύθυνος να προβεί σε διορθωτική ενέργεια στο μηχάνημα; α=5%

1. Διατυπώστε την κατάλληλη μηδενική υπόθεση H_0 και εναλλακτική υπόθεση H_1

H_0: $\mu = 30$ (Αυτός είναι ένας αμφίπλευρος έλεγχος –εναλλακτική ≠)

H_1: $\mu \neq 30$



Παράδειγμα Ελέγχου Υποθέσεων

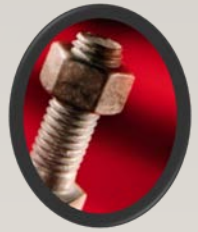
(συνέχεια)

2. Προσδιορίστε το κατάλληλο κριτήριο ελέγχου
   - Πληθυσμός (διάμετρος μπουλονιού) κανονικός
   - σ υποτίθεται γνωστό οπότε αυτός είναι ένας Z έλεγχος.

3. Προσδιορίστε την περιοχή απόρριψης
   - Για α = 0,05 οι κρίσιμες Z τιμές είναι ±1,96
4. Υπολογίστε την τιμή του στατιστικού κριτηρίου ελέγχου

Επομένως η τιμή του στατιστικού ελέγχου, **κάτω από την H0 (θεωρώντας ότι η H0 είναι αληθής)**, είναι

$$Z_{STAT} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{29.84 - 30}{\frac{0.8}{\sqrt{100}}} = \frac{-0.16}{0.08} = -2.0$$



Παράδειγμα Ελέγχου Υποθέσεων

(συνέχεια)

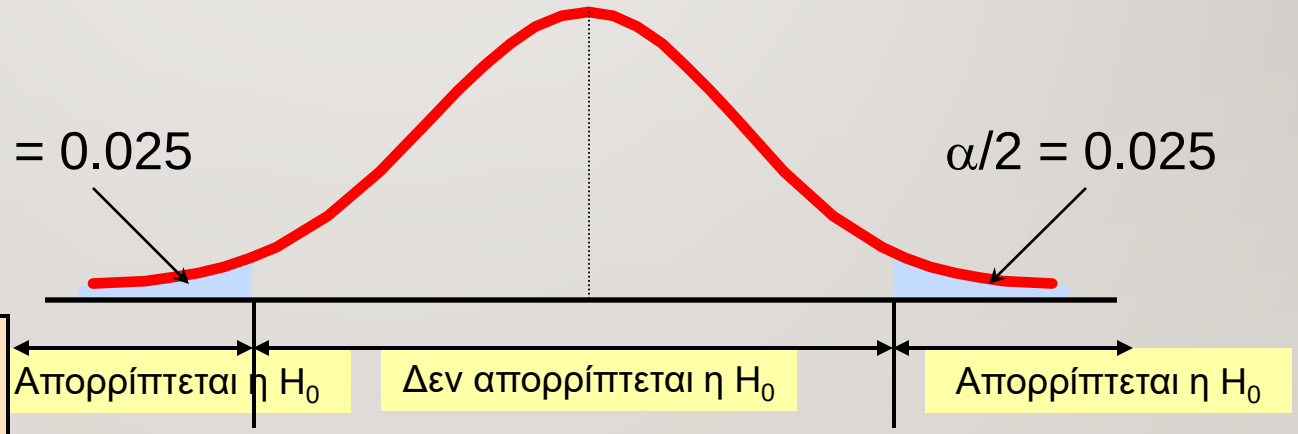
5. Το στατιστικό κριτήριο ελέγχου είναι εντός της περιοχής απόρριψης;

Τμήμα Α-Λ

Απορρίπτετε την H_0 αν,

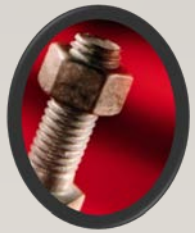
$|Z| > Z^*_{\alpha/2}$

διαφορετικά **δεν απορρίπτετε** την H_0



Εδώ, $|Z_{STAT}| = |-2,0| > +1,96$, απορρίπτεται η Η0

Συμπεραίνετε ότι υπάρχει επαρκής **στατιστική** ένδειξη ότι η μέση διάμετρος του παραγόμενου μπουλονιού **δεν** είναι ίση με 30. Ο υπεύθυνος θα πρέπει να προβεί σε διορθωτική ενέργεια στο μηχάνημα

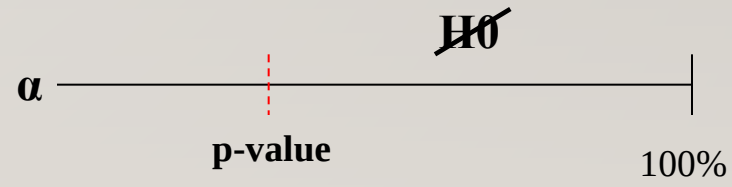


Έλεγχος Υποθέσεων με το *p*-value

Ελέγξτε αν είναι στην ύλη σας.
Το p-value είναι πολύ σημαντική έννοια η οποία χρησιμοποιείται πάρα πολύ στις Εφαρμογές

- *p*-value: Η πιθανότητα να προκύψει η συγκεκριμένη από τα δεδομένα του δείγματος τιμή του κριτηρίου ελέγχου ή ακόμη πιο ακραία, **δεδομένου ότι η H_0 είναι αληθής**
  - Το p-value είναι επίσης γνωστό ως το παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας (*observed significance level)*
  - Είναι η μικρότερη τιμή του **α** για την οποία η H_0 μπορεί να απορριφθεί

~~H0~~ όταν p-value<α



Προσέγγιση της p-value στον Έλεγχο: Ερμηνεύοντας την p-value

- Συγκρίνετε την p-value με το α

- Αν η p-value $< \alpha$, απορρίπτετε την H_0
- Αν η p-value $\geq \alpha$, δεν απορρίπτετε την H_0

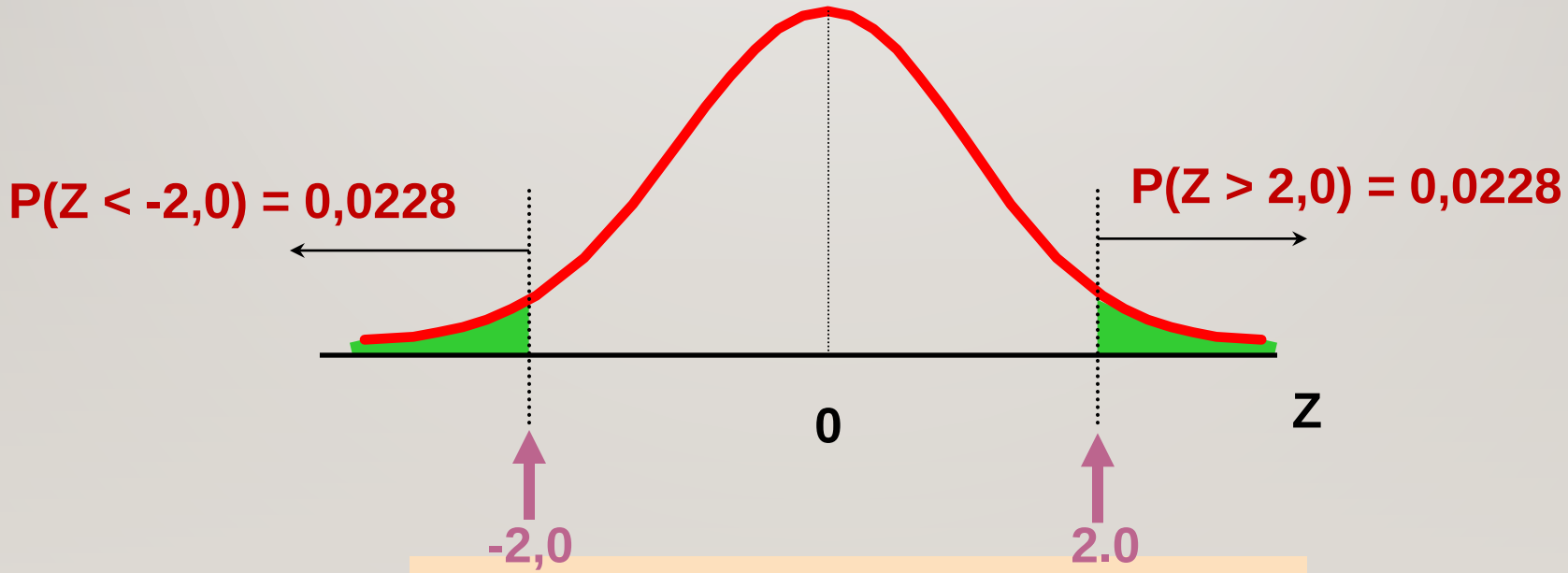
- Να θυμάστε το εξής,

Όταν το p-value είναι χαμηλό τότε η H_0 πρέπει να απορριφθεί

Παράδειγμα του *p*- value Ελέγχου Υποθέσεων: Υπολογίζοντας το *p*-value *(συνέχεια)*

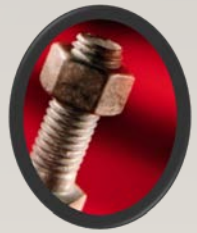
Έγινε υπολογισμός του p-value.

- Πόσο πιθανό είναι να πάρετε μια τιμή για το $|Z_{STAT}|$ ίση με |-2| (ή κάτι ακόμη πιο ακραίο-πιο μακριά από τη μέση τιμή (0), **σε κάθε κατεύθυνση**) αν η H_0 είναι αληθής
- **P(Z > 2.0) ή P(Z < -2.0) = P(|Z| > 2,0)**



p-value = 0,0228 + 0,0228 = 0,0456

p-value = 2*P(Z<-2)=2*0.0228 = 0.0456



Παράδειγμα *p*-value Ελέγχου Υποθέσεων

(συνέχεια)

- Το μόνο που χρειάζεται αν χρησιμοποιήσω τη μέθοδο του p-value για να κάνω έλεγχο υπόθεσης είναι να ρωτήσω: Είναι το p-value < α;
  - Αφού p-value = 0.0456 < α = 0.05 **απορρίπτετε** την H_0
  - Υπάρχει επαρκής στατιστική ένδειξη για να συμπεράνετε ότι η μέση διάμετρος ενός παραγόμενου μπουλονιού δεν είναι ίση με 30mm.



Σύνδεση Μεταξύ Αμφίπλευρου Ελέγχου και Διαστήματος Εμπιστοσύνης

- Για $\overline{X} = 29{,}84$, $\sigma = 0{,}8$ και $n = 100$, το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο μ είναι:

$$29.84 - (1.96)\frac{0.8}{\sqrt{100}} \quad ; \quad 29.84 + (1.96)\frac{0.8}{\sqrt{100}}$$

$$29.6832 \leq \mu \leq 29.9968$$

- Αφού αυτό το διάστημα **δεν Περιέχει** την **υποθετική μέση τιμή** (30), **απορρίπτουμε** την μηδενική υπόθεση στο $\alpha = 0.05$



Μπορείτε Πάντα Πραγματικά Να Γνωρίζετε το σ;

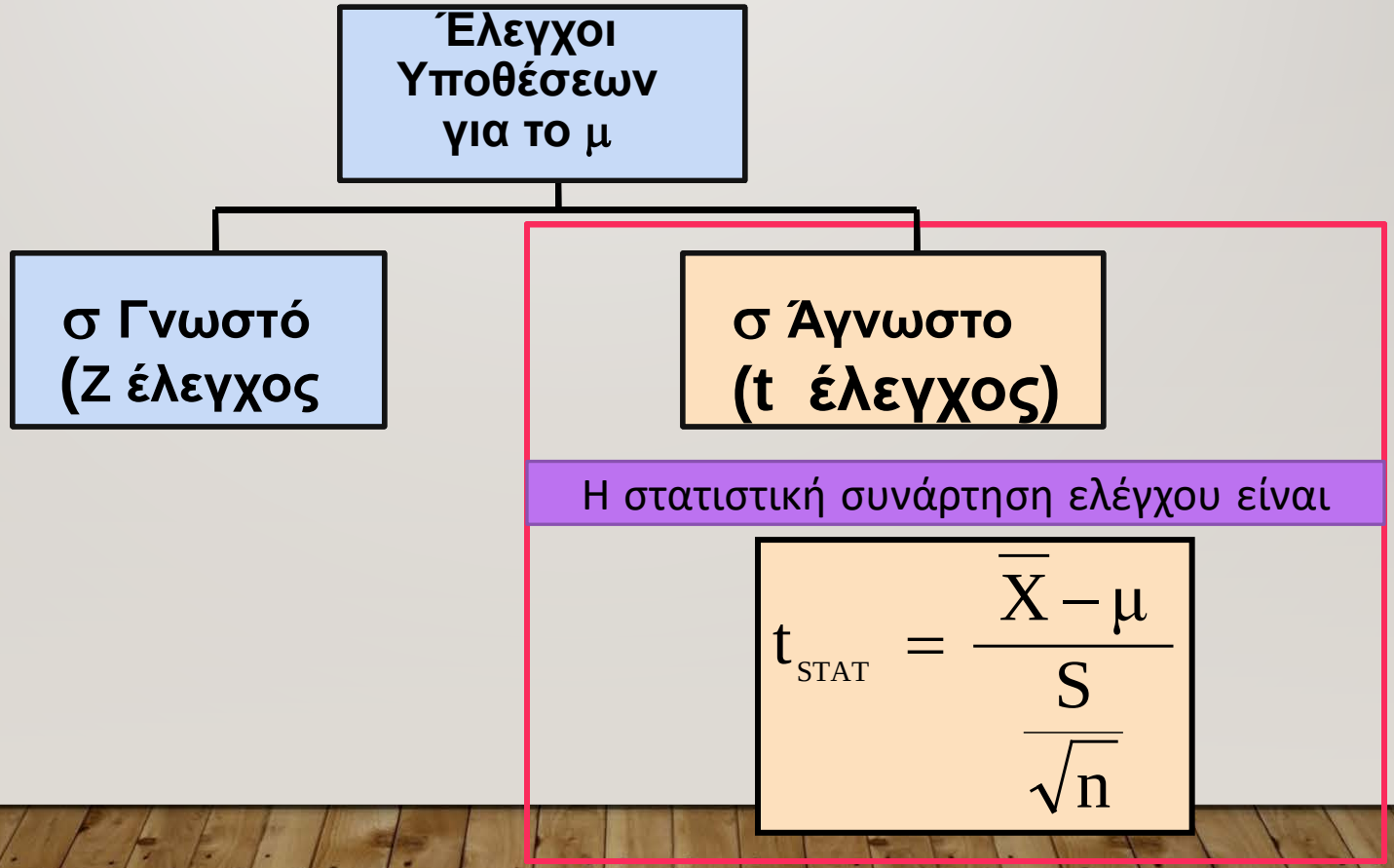
- Πιθανόν όχι!
- Σε όλες σχεδόν τις πραγματικές επιχειρηματικές καταστάσεις, το σ δεν είναι γνωστό.
- Αν υπάρχει μια κατάσταση όπου το σ είναι γνωστό τότε το μ είναι επίσης γνωστό (αφού για να υπολογίσετε το σ πρέπει να γνωρίζετε το μ).
- Αν πραγματικά γνωρίζετε το μ δεν θα υπήρχε ανάγκη να συγκεντρώσετε ένα δείγμα για να το εκτιμήσετε.

Έλεγχος Υποθέσεων: σ Άγνωστο

- Αν η τυπική απόκλιση του πληθυσμού είναι άγνωστη, χρησιμοποιείτε αντί αυτού την τυπική απόκλιση του δείγματος, S.
- Λόγω αυτής της αλλαγής, χρησιμοποιείτε τον *t* -έλεγχο της μέσης τιμής αντί της κατανομής Z για να ελέγξετε την μηδενική υπόθεση σχετικά με τη μέση τιμή.
- Όταν χρησιμοποιείτε τον *t* έλεγχο της μέσης τιμής πρέπει να υποθέσετε ότι ο πληθυσμός που λαμβάνετε δειγματοληψία ακολουθεί κανονική κατανομή.
- Όλα τα άλλα βήματα, έννοιες, και συμπεράσματα είναι τα ίδια.

t–Έλεγχος για τη μέση τιμή (σ Άγνωστο)

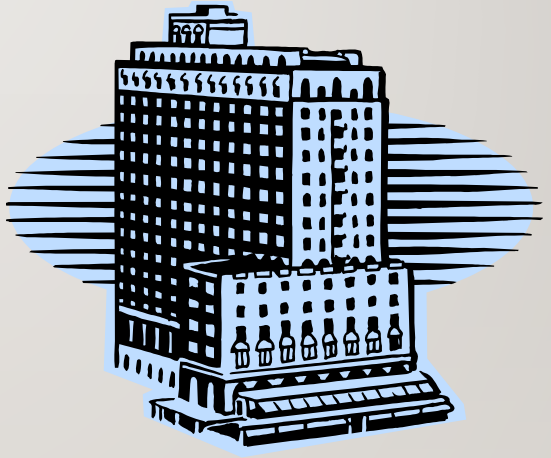
- Μετατρέψτε το στατιστικό δείγματος ($\overline{X}$) σε μια t_{STAT} στατιστική συνάρτηση ελέγχου



Παράδειγμα: Αμφίπλευρος Έλεγχος (σ Άγνωστο)

Το μέσο κόστος ενός δωματίου ξενοδοχείου στην Νέα Υόρκη λέγεται ότι ανέρχεται σε $168 ανά διανυκτέρευση. Ένας μεσίτης για να ελέγξει τον ισχυρισμό αυτό, λαμβάνει ένα τυχαίο δείγμα 25 ξενοδοχείων και έχει ως αποτέλεσμα ένα $\bar{X}$ ίσο με $172,50 και ένα S ίσο με $15,40. Ελέγξτε τις κατάλληλες υποθέσεις για $\alpha = 0,05$.

(Υποθέστε ότι η κατανομή πληθυσμού είναι κανονική)



$H_0: \mu = 168$

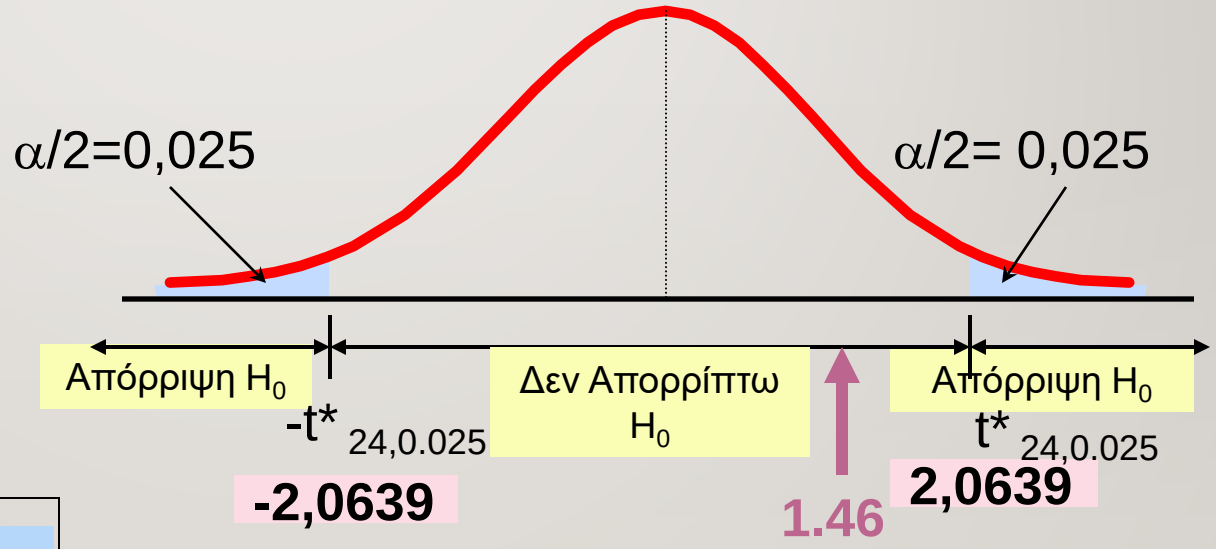
$H_1: \mu \neq 168$

Λύση Παραδείγματος: Αμφίπλευρος Έλεγχος t

Τμήμα Α-Λ

H_0 αν $|t| > t^*_{n-1,\alpha/2}$

H_0: μ = 168
H_1: μ ≠ 168



$$t_{STAT} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{172.50 - 168}{\frac{15.40}{\sqrt{25}}} = 1.46$$

Λύση Παραδείγματος: Αμφίπλευρος Έλεγχος t

Τμήμα Α-Λ

H_0 $\alpha\nu$ $|t| > t *_{n-1,\alpha/2}$

H_0: μ = 168
H_1: μ ≠ 168

Πίνακα της *t* με Δικατάληκτο αλλά για **α (Δίπλευρος έλεγχος)**

- α = **0,05~ α/2=0,025**
- **n = 25, df = 25-1=24**
  - **σ είναι άγνωστο, έτσι**
  - **χρησιμοποιείτε μια t στατιστική συνάρτηση**
- **Κρίσιμη Τιμή :**

$\pm t *_{24,0.025} = \pm 2,064$

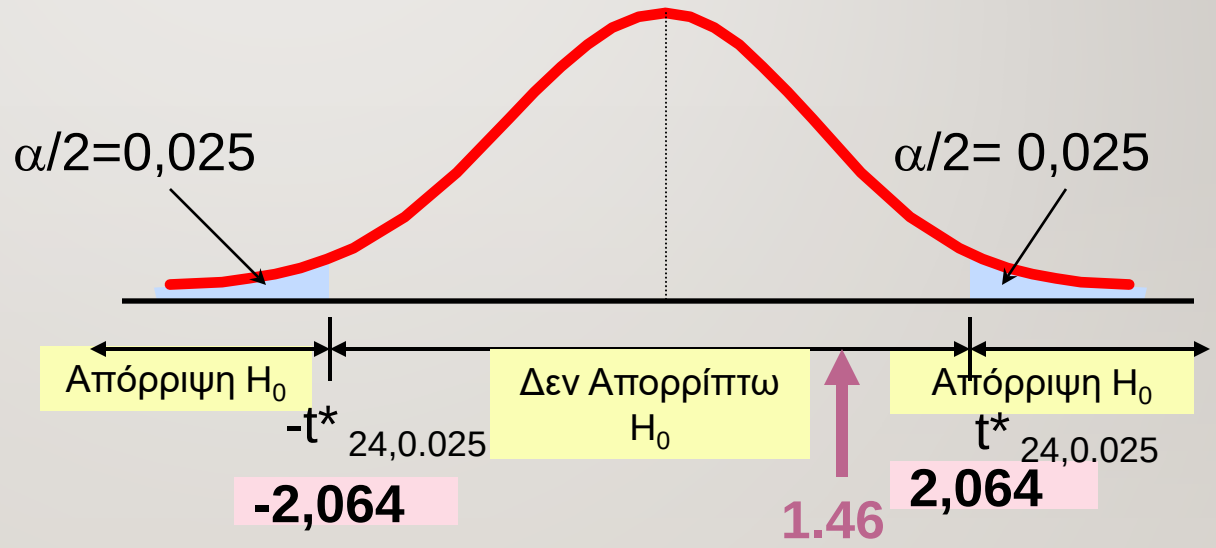
Οι τιμές αναφέρονται σε δικατάληκτο κριτήριο. Για παράδειγμα, για ν =16 και α = 0,05 η τιμή του κριτηρίου είναι $|t_{\text{πρόσημο}}| = 2,12$, που σημαίνει ότι $P(t_{16} < -2,12) + P(t_{16} > 2,12) = 0,025 + 0,025 = 0,05$.

Βαθμοί Ελευθ. (ν)	Επίπ. Σημαντικ. α 0,05	0,01	Βαθμοί Ελευθ. (ν)	Επίπ. Σημαντικ. α 0,05	0,01	Βαθμοί Ελευθ. (ν)	Επίπ. Σημαντικ. α 0,05	0,01
1	12,706	63,657	26	2,056	2,779	51	2,008	2,676
2	4,303	9,925	27	2,052	2,771	52	2,007	2,674
3	3,182	5,841	28	2,048	2,763	53	2,006	2,672
4	2,776	4,604	29	2,045	2,756	54	2,005	2,670
5	2,571	4,032	30	2,042	2,750	55	2,004	2,668
6	2,447	3,707	31	2,040	2,744	56	2,003	2,667
7	2,365	3,499	32	2,037	2,738	57	2,002	2,665
8	2,306	3,355	33	2,035	2,733	58	2,002	2,663
9	2,262	3,250	34	2,032	2,728	59	2,001	2,662
10	2,228	3,169	35	2,030	2,724	60	2,000	2,660
11	2,201	3,106	36	2,028	2,719	61	2,000	2,659
12	2,179	3,055	37	2,026	2,715	62	1,999	2,657
13	2,160	3,012	38	2,024	2,712	63	1,998	2,656
14	2,145	2,977	39	2,023	2,708	64	1,998	2,655
15	2,131	2,947	40	2,021	2,704	65	1,997	2,654
16	2,120	2,921	41	2,020	2,701	66	1,997	2,652
17	2,110	2,898	42	2,018	2,698	67	1,996	2,651
18	2,101	2,878	43	2,017	2,695	68	1,995	2,650
19	2,093	2,861	44	2,015	2,692	69	1,995	2,649
20	2,086	2,845	45	2,014	2,690	70	1,994	2,648
21	2,080	2,831	46	2,013	2,687	100	1,984	2,626
22	2,074	2,819	47	2,012	2,685	120	1,980	2,617
23	2,069	2,807	48	2,011	2,682	150	1,976	2,609
24	2,064	2,797	49	2,010	2,680	200	1,972	2,601
25	2,060	2,787	50	2,009	2,678	1000	1,962	2,581

Λύση Παραδείγματος: Αμφίπλευρος Έλεγχος t

Τμήμα Α-Λ

H_0: μ = 168
H_1: μ ≠ 168



H_0 αν $|t| > t*_{n-1,a/2}$

$|t| = |1.46| > t*_{n-1,a/2}$=2,064

Δεν απορρίπτετε την H_0: ανεπαρκής στατιστική ένδειξη ότι το πραγματικό μέσο κόστος είναι διαφορετικό από $168

Σχέση Μεταξύ Αμφίπλευρων Ελέγχων και Διαστημάτων Εμπιστοσύνης

- Για $\overline{X} = 172,5$, $S = 15,40$ και $n = 25$, το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το μ είναι:

$$166.14 \leq \mu \leq 178.86$$

- Αφού αυτό το διάστημα **περιέχει** την υποθετική μέση τιμή (168), δεν απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση στο $\alpha = 0.05$

Χρήση *p*-value Ελέγχου Υποθέσεων

(συνέχεια)

- Το μόνο που χρειάζεται αν χρησιμοποιήσω τη μέθοδο του *p*-value για να κάνω έλεγχο υπόθεσης είναι να ρωτήσω: Είναι το *p*-value < α;
  - Έστω ότι δίνεται *p*-value = 0.157
  - **Επειδή** *p*-value = 0.157 ⩽α=0.05 **Δεν απορρίπτετε** την H_0
  - Υπάρχει επαρκής στατιστική ένδειξη για να συμπεράνετε ότι η μέση διάμετρος ενός παραγόμενου μπουλονιού δεν είναι ίση με 30mm.



Η Χρήση του t-ελέγχου Προϋποθέτει ότι ο Πληθυσμός είναι Κανονικός

- Όσο το μέγεθος του δείγματος δεν είναι πολύ μικρό και ο πληθυσμός δεν είναι πολύ ασύμμετρος, ο t-έλεγχος μπορεί να χρησιμοποιηθεί.

- Για να αξιολογήσετε την υπόθεση κανονικότητας:
  - Κατασκευάστε ένα διάγραμμα qq plot.

Μονόπλευροι Έλεγχοι Υποθέσεων

Ελέγξτε αν είναι στην ύλη σας.

- Σε πολλές περιπτώσεις, η εναλλακτική υπόθεση εστιάζει *προς μια συγκεκριμένη κατεύθυνση*

$H_0: \mu \geq 3$
$H_1: \mu < 3$

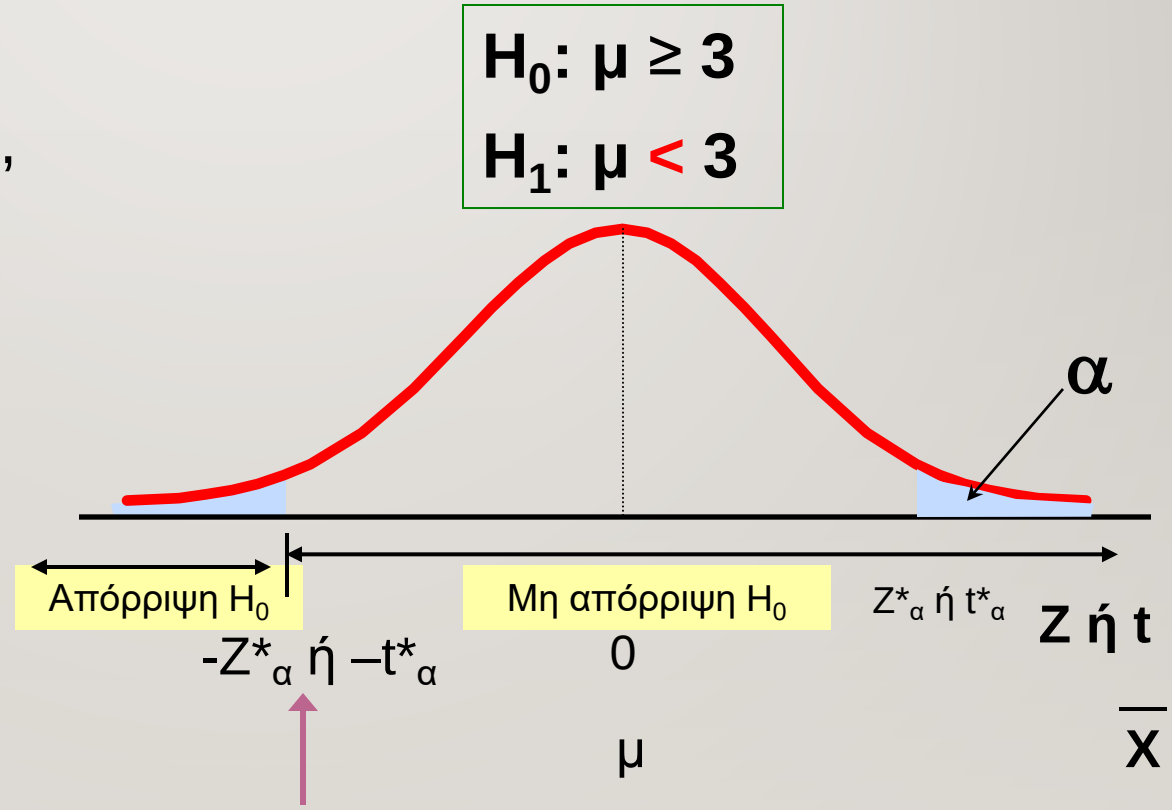
→ Αυτός είναι ένας έλεγχος κάτω-άκρου αφού η εναλλακτική υπόθεση επικεντρώνεται στο κατώτερο άκρο κάτω από τον μέσο 3

$H_0: \mu \leq 3$
$H_1: \mu > 3$

→ Αυτός είναι ένας έλεγχος άνω-άκρου αφού η εναλλακτική υπόθεση επικεντρώνεται στο ανώτερο άκρο πάνω από τον μέσο 3

Έλεγχοι Κάτω Άκρων

- Υπάρχει μόνο μία κρίσιμη τιμή, αφού η περιοχή απόρριψης είναι μόνο σε ένα άκρο



H_0 $\alpha\nu$ $Z < -Z^*_\alpha$

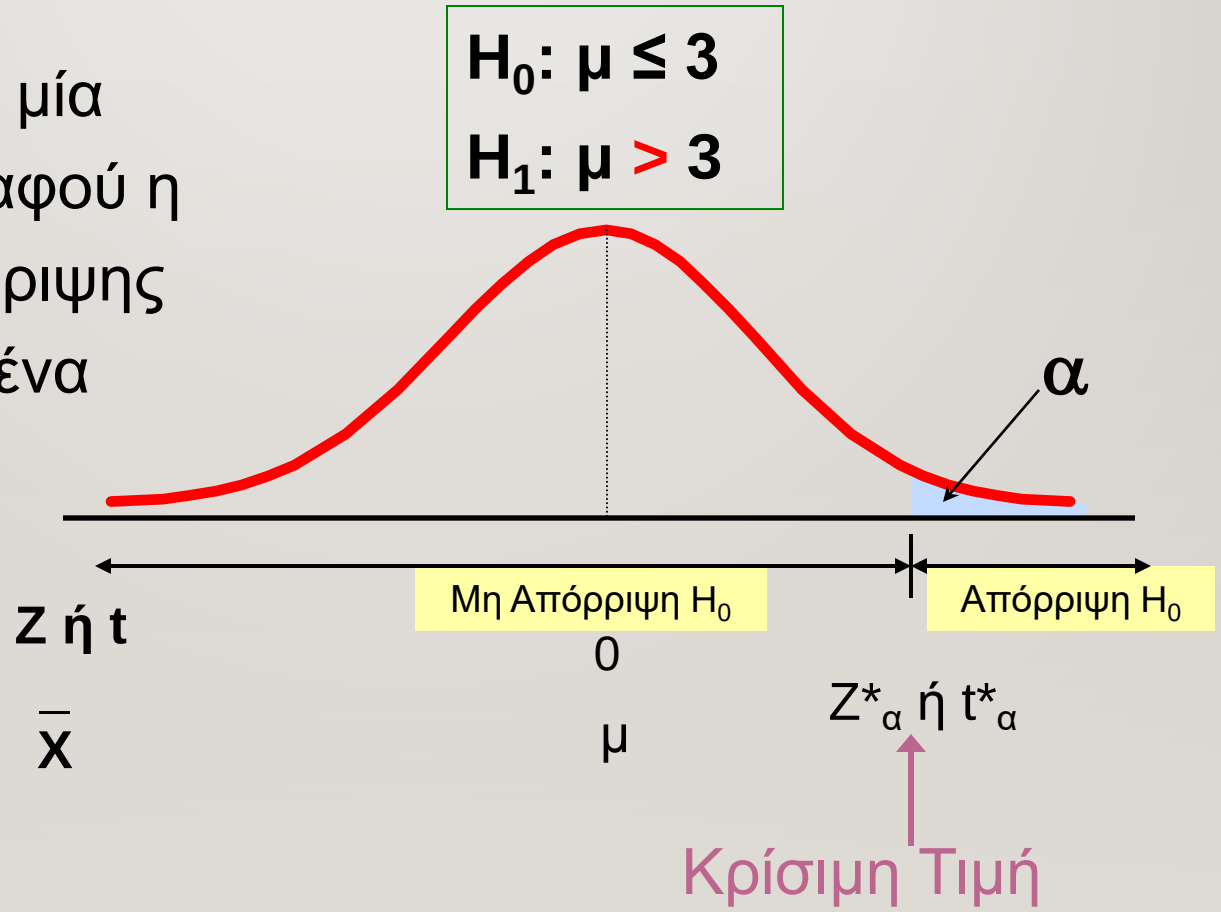
H_0 $\alpha\nu$ $t < -t^*_{n-1,\alpha}$

Έλεγχοι Άνω Άκρων

- Υπάρχει μόνο μία κρίσιμη τιμή, αφού η περιοχή απόρριψης είναι μόνο σε ένα άκρο

H_0 αν $Z > Z^*_\alpha$

H_0 αν $t > t^*_{n-1,\alpha}$



Παράδειγμα: Μονοκατάληκτος προς τα Άνω - t - Έλεγχος Μέσου (σ Άγνωστο)



Ένας οργανισμός προστασίας καταναλωτών πιστεύει ότι οι μηνιαίες χρεώσεις των κινητών τηλεφώνων των πελατών μιας εταιρείας έχουν αυξηθεί και τώρα έχουν μέσο όρο πάνω από $52 το μήνα. Για το λόγο αυτό συλλέγει δεδομένα από 25 λογαριασμούς πελατών για τους οποίους υπολογίζει ότι ο μέσος όρος χρέωσης είναι 53,1 και η τυπική απόκλιση 10. Ο οργανισμός επιθυμεί να ελέγξει αυτόν τον ισχυρισμό. (Υποθέστε έναν κανονικό πληθυσμό) α=0,01

Δημιουργείστε τον στατιστικό έλεγχο υποθέσεων

H_0: μ ≤ 52 ο μέσος όρος δεν υπερβαίνει τα $52 ανά μήνα

H_1: μ > 52 ο μέσος όρος **είναι** μεγαλύτερος από $52 ανά μήνα
(δηλ. υπάρχει επαρκής ένδειξη για την στήριξη του ισχυρισμού του διευθυντή)

Παράδειγμα: Στατιστική Συνάρτηση Ελέγχου

(συνέχεια)



Η στατιστική συνάρτηση ελέγχου είναι:

$$t_{STAT} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{53.1 - 52}{\frac{10}{\sqrt{25}}} = 0.55$$

Παράδειγμα: Εύρεση της Περιοχής Απόρριψης

Τμήμα Α-Λ

(συνέχεια)

$\alpha = 0{,}01$

H_0 *αν* $t > t^*_{n-1,\alpha}$

Κοιτάζω στον Πίνακα της t-student Κατανομής α=0,01 (μονοκατάληκτο) με βαθμούς ελευθερίας 25-1=24

Οι τιμές αναφέρονται σε δικατάληκτο κριτήριο. Για παράδειγμα, για ν =16 και α = 0,05 η τιμή του κριτηρίου είναι $|t_{16,0,025}| = 2{,}12$, που σημαίνει ότι $P(t_{16} < -2{,}12) + P(t_{16} > 2{,}12) = 0{,}025 + 0{,}025 = 0{,}05$.

Βαθμοί	Επίπ. Σημαντικ. α		Βαθμοί	Επίπ. Σημαντικ. α		Βαθμοί	Επίπ. Σημαντικ. α	
Ελευθ. (ν)	0,05	0,01	Ελευθ. (ν)	0,05	0,01	Ελευθ. (ν)	0,05	0,01
1	12,706	63,657	26	2,056	2,779	51	2,008	2,676
2	4,303	9,925	27	2,052	2,771	52	2,007	2,674
3	3,182	5,841	28	2,048	2,763	53	2,006	2,672
4	2,776	4,604	29	2,045	2,756	54	2,005	2,670
5	2,571	4,032	30	2,042	2,750	55	2,004	2,668
6	2,447	3,707	31	2,040	2,744	56	2,003	2,667
7	2,365	3,499	32	2,037	2,738	57	2,002	2,665
8	2,306	3,355	33	2,035	2,733	58	2,002	2,663
9	2,262	3,250	34	2,032	2,728	59	2,001	2,662
10	2,228	3,169	35	2,030	2,724	60	2,000	2,660
11	2,201	3,106	36	2,028	2,719	61	2,000	2,659
12	2,179	3,055	37	2,026	2,715	62	1,999	2,657
13	2,160	3,012	38	2,024	2,712	63	1,998	2,656
14	2,145	2,977	39	2,023	2,708	64	1,998	2,655
15	2,131	2,947	40	2,021	2,704	65	1,997	2,654
16	2,120	2,921	41	2,020	2,701	66	1,997	2,652
17	2,110	2,898	42	2,018	2,698	67	1,996	2,651
18	2,101	2,878	43	2,017	2,695	68	1,995	2,650
19	2,093	2,861	44	2,015	2,692	69	1,995	2,649
20	2,086	2,845	45	2,014	2,690	70	1,994	2,648
21	2,080	2,831	46	2,013	2,687	100	1,984	2,626
22	2,074	2,819	47	2,012	2,685	120	1,980	2,617
23	2,069	2,807	48	2,011	2,682	150	1,976	2,609
24	2,064	2,797	49	2,010	2,680	200	1,972	2,601
25	2,060	2,787	50	2,009	2,678	1000	1,962	2,581

$t^*_{n-1,\alpha} = t_{24,\alpha=0{,}01} = 2{,}492$

0.01

Οι τιμές αναφέρ… ήριο. Για παράδειγμα, για ν =16 και α = 0,05 η τιμή το… 746, που σημαίνει ότι $P(t_{16} < -1{,}746) = P(t_{16} > 1{,}746) = 0{,}0$…

Βαθμοί	Επίπ. Σημαντικ. α		Βαθμοί	Επίπ. Σημαντικ. α		Βαθμοί	Επίπ. Σημαντικ. α	
Ελευθ. (ν)	0,05	0,01	Ελευθ. (ν)	0,05	0,01	Ελευθ. (ν)	0,05	0,01
1	6,314	31,821	26	1,706	2,479	51	1,675	2,402
2	2,920	6,965	27	1,703	2,473	52	1,675	2,400
3	2,353	4,541	28	1,701	2,467	53	1,674	2,399
4	2,132	3,747	29	1,699	2,462	54	1,674	2,397
5	2,015	3,365	30	1,697	2,457	55	1,673	2,396
6	1,943	3,143	31	1,696	2,453	56	1,673	2,395
7	1,895	2,998	32	1,694	2,449	57	1,672	2,394
8	1,860	2,896	33	1,692	2,445	58	1,672	2,392
9	1,833	2,821	34	1,691	2,441	59	1,671	2,391
10	1,812	2,764	35	1,690	2,438	60	1,671	2,390
11	1,796	2,718	36	1,688	2,434	61	1,670	2,389
12	1,782	2,681	37	1,687	2,431	62	1,670	2,388
13	1,771	2,650	38	1,686	2,429	63	1,669	2,387
14	1,761	2,624	39	1,685	2,426	64	1,669	2,386
15	1,753	2,602	40	1,684	2,423	65	1,669	2,385
16	1,746	2,583	41	1,683	2,421	66	1,668	2,384
17	1,740	2,567	42	1,682	2,418	67	1,668	2,383
18	1,734	2,552	43	1,681	2,416	68	1,668	2,382
19	1,729	2,539	44	1,680	2,414	69	1,667	2,382
20	1,725	2,528	45	1,679	2,412	70	1,667	2,381
21	1,721	2,518	46	1,679	2,410	100	1,660	2,364
22	1,717	2,508	47	1,678	2,408	120	1,658	2,358
23	1,714	2,500	48	1,677	2,407	150	1,655	2,351
24	1,711	2,492	49	1,677	2,405	200	1,653	2,345
25	1,708	2,485	50	1,676	2,403	1000	1,646	2,330

Χρησιμοποιήστε το https://www.stapplet.com/tdist.html για να δείτε οπτικά τη διαφορά δικατάληκτου με μονοκατάληκτο df=24, Calculate the area between the two values (-2,492) kai (2,492) και ζητήστε το Calculate area



Παράδειγμα: Εύρεση της Περιοχής Απόρριψης

(συνέχεια)

H_0 *αν* $t > t^*_{n-1,\alpha}$

$t = 0{,}55 > t^*_{n-1,\alpha} = 2{,}492$

Δεν Απορρίπτετε την H_0

Δεν υπάρχει επαρκής ένδειξη ότι η μέση χρέωση είναι πάνω από $52)



Παράδειγμα: Χρήση του *p*-value για τον Έλεγχο

- Μας δίνεται η *p*-τιμή=0,29 και συγκρίνετε με το α=0,01

***p*-value= 0,29** $\not<$ α=0,01

Δεν απορρίπτετε την H_0

1^{Ο} Πρόβλημα

Ένα μηχάνημα κατασκευάζει μπαταρίες για ειδικές χρήσεις των οποίων ο χρόνος ζωής ακολουθεί, σύμφωνα με τις τεχνικές προδιαγραφές του μηχανήματος, κανονική κατανομή με μέσο 22 ώρες και τυπική απόκλιση 3 ώρες. Επειδή στις χρήσεις για τις οποίες προορίζονται οι μπαταρίες ο χρόνος ζωής τους είναι μία κρίσιμη παράμετρος, η λειτουργία του μηχανήματος παρακολουθείται συνεχώς με δειγματοληπτικό έλεγχο για το χρόνο ζωής των παραγόμενων μπαταριών. Από τυχαίο δείγμα 9 μπαταριών διαπιστώνεται ότι οι χρόνοι ζωής τους (σε ώρες) είναι:

16	18	22	20	21	20	16	22	25

Με τη βοήθεια της πληροφορίας αυτής να ελεγχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05, αν το μηχάνημα λειτουργεί σύμφωνα με τις τεχνικές προδιαγραφές του. Τα συμπεράσματά σας συμφωνούν αν κάνετε χρήση της τιμής p-value=0,0456 ή ενός 95% διαστήματος εμπιστοσύνης για το μέσο χρόνο ζωής των μπαταριών;

Λύση

Ο στατιστικός έλεγχος που πρέπει να διεξαχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 , είναι:

$H_0 : \mu = 22$

$H_1 : \mu \neq 22$

Εύκολα βρίσκουμε ότι η τιμή του δειγματικού μέσου είναι:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{9} X_i}{9} = \frac{16+18+...+25}{9} = \frac{180}{9} = 20 \omega\rho\varepsilon\varsigma$$

Το τυπικό σφάλμα εκτίμησης του μέσου είναι: $\sigma_{\overline{X}} = \sigma / \sqrt{n} = 3/\sqrt{9} = 1$

Η τιμή της **στατιστικής συνάρτησης** ελέγχου κάτω από τη μηδενική υπόθεση, είναι:

$$Z_{STAT} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{20-22}{1} = -2$$

Η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης προσδιορίζεται ως H_0 αν $|Z| > Z^*_{\alpha/2}$

Τμήμα Α-Λ

Από τον Πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής, βρίσκουμε ότι για α=5% είναι $Z^*_{\alpha/2} = Z_{1-a/2} = Z_{0,975} = 1,96$

$\not{H}_0$ αν $|Z| > Z^*_{\alpha/2}$

$$|Z| = |-2| > Z_{1-a/2} = 1,96$$

Κατά συνέπεια, απορρίπτουμε την Η0. Οι ενδείξεις οδηγούν στο συμπέρασμα ότι το μηχάνημα δεν λειτουργεί σύμφωνα με τις τεχνικές προδιαγραφές του.

- Επίσης μπορούμε να αποφασίσουμε για το αν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση μέσω του *p*-value.

Καθώς το p-value= 0,0456 είναι μικρότερο από το α, συμπεραίνουμε ότι η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται!

- Μία ακόμη μέθοδος για να αποφασίσουμε για το αν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση είναι μέσω των διαστημάτων εμπιστοσύνης, μόνο για το δίπλευρο έλεγχο στα πλαίσια αυτού του μαθήματος.

Το 95% ΔΕ (18,04;21,96)

Παρατηρούμε ότι το 95% διαστήματος εμπιστοσύνης, **ΔΕΝ ΠΕΡΙΕΧΕΙ** το 22 επιβεβαιώνοντας τα αποτελέσματά μας με τη μέθοδο της κρίσιμης τιμής και τη μέθοδο της *p*-value.

2^{Ο} Πρόβλημα

Ένα μηχάνημα κατασκευάζει μπαταρίες για ειδικές χρήσεις των οποίων ο χρόνος ζωής ακολουθεί, σύμφωνα με τις τεχνικές προδιαγραφές του μηχανήματος, κανονική κατανομή με μέσο 22. Επειδή στις χρήσεις για τις οποίες προορίζονται οι μπαταρίες ο χρόνος ζωής τους είναι μία κρίσιμη παράμετρος, η λειτουργία του μηχανήματος παρακολουθείται συνεχώς με δειγματοληπτικό έλεγχο για το χρόνο ζωής των παραγόμενων μπαταριών. Από τυχαίο δείγμα 9 μπαταριών διαπιστώνεται ότι οι χρόνοι ζωής τους (σε ώρες) είναι:

16	18	22	20	21	20	16	22	25

a. Με τη βοήθεια της πληροφορίας αυτής να ελεγχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05, αν το μηχάνημα λειτουργεί σύμφωνα με τις τεχνικές προδιαγραφές του.

b. Με τη βοήθεια της πληροφορίας αυτής να ελεγχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05 η υπόθεση ότι ο μέσος χρόνος ζωής των μπαταριών είναι **μικρότερος** από 22 ώρες.

Λύση

a. Ο στατιστικός έλεγχος που πρέπει να διεξαχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 , είναι:

$H_0 : \mu = 22$

$H_1 : \mu \neq 22$ Δίπλευρος έλεγχος

Εύκολα βρίσκουμε ότι η τιμή του δειγματικού μέσου είναι:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{9} X_i}{9} = \frac{16+18+...+25}{9} = \frac{180}{9} = 20 \omega\rho\varepsilon\varsigma$$

Επίσης βρίσκουμε ότι:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{9}(X_i - \overline{X})^2}{9-1}} = \sqrt{\frac{(16-20)^2 + (18-20)^2 + ... + (25-20)^2}{8}} = 2,958$$

και, κατά συνέπεια, το τυπικό σφάλμα εκτίμησης του μέσου είναι $s_{\overline{X}} = s / \sqrt{n} = 2,958 / \sqrt{9} = 0,986$

Η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου κάτω από τη μηδενική υπόθεση, είναι:

$$t_{STAT} = \frac{\overline{X} - \mu}{s / \sqrt{n}} = \frac{20-22}{0,986} = -2,03$$

Λύση

a. Ο στατιστικός έλεγχος που πρέπει να διεξαχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 , είναι:

$H_0 : \mu = 22$

$H_1 : \mu \neq 22$ Δίπλευρος έλεγχος

Η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης προσδιορίζεται ως $\not{H}_0$ αν $|T| > t^*_{n-1,\alpha/2}$

Από τον Πίνακα που περιέχει τα ποσοστιαία σημεία της *t* κατανομής, βρίσκουμε ότι για α=5% και για βαθμούς ελευθερίας ν=8 είναι

$t^{*}_{n-1,\alpha/2} = t^{\delta\iota\kappa*}_{8,0,05}$=2,306

Άρα, στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν ισχύει ότι η τιμή της στατιστικής συνάρτησης είναι κατά απόλυτη τιμή |-2,03| μεγαλύτερη από την κρίσιμη τιμή και επομένως η Η0 **δεν απορρίπτεται**

Επομένως, οι ενδείξεις οδηγούν στο συμπέρασμα ότι το μηχάνημα λειτουργεί σύμφωνα με τις τεχνικές προδιαγραφές του.

- Μία ακόμη μέθοδος για να αποφασίσουμε για το αν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση είναι μέσω των διαστημάτων εμπιστοσύνης, μόνο για το δίπλευρο έλεγχο στα πλαίσια αυτού του μαθήματος.

Το 95% ΔΕ (13,18;26,82) **ΠΕΡΙΕΧΕΙ** το 22 επιβεβαιώνοντας τα αποτελέσματά μας με τη μέθοδο της κρίσιμης τιμής.

b. Ο στατιστικός έλεγχος που πρέπει να διεξαχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 , είναι:

$H_0 : \mu \geq 22$

$H_1 : \mu < 22$ Μονόπλευρος έλεγχος

Η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου κάτω από τη μηδενική υπόθεση, είναι η ΙΔΙΑ που υπολογίσαμε για το δίπλευρο έλεγχο καθώς δεν άλλαξε η τιμή ελέγχου μ_0=22:

Τώρα έχουμε **μονόπλευρο έλεγχο** (έλεγχος κάτω άκρου), άρα η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης προσδιορίζεται ως

$$\not{H}_0 \text{ αν } T < -t^*_{n-1,\alpha}$$

Από τον Πίνακα που περιέχει τα ποσοστιαία σημεία της t κατανομής, βρίσκουμε ότι για α=5% και για βαθμούς ελευθερίας ν=8 είναι

$$t^*_{n-1,\alpha} = t^*_{8,0,05} = 1,86$$

Άρα, στη συγκεκριμένη περίπτωση ισχύει ότι η τιμή της στατιστικής συνάρτησης -2,03 είναι μικρότερη από την κρίσιμη τιμή και επομένως η **Η0 απορρίπτεται**

Επομένως, οι ενδείξεις οδηγούν στο συμπέρασμα ότι ο μέσος χρόνος ζωής των μπαταριών είναι μικρότερος από 22 ώρες.

3ο Πρόβλημα

Όπως προκύπτει από ιστορικά στοιχεία, το ποσοστό των ελαττωματικών συσκευασιών μιας εταιρείας παραγωγής και συσκευασίας ενός προϊόντος είναι 10%. Ο υπεύθυνος του ποιοτικού ελέγχου της εταιρείας θεωρεί ότι το ποσοστό αυτό είναι υψηλό και εισάγει μια νέα μέθοδο συσκευασίας προκειμένου να το μειώσει. Για να διαπιστώσει τα αποτελέσματα της νέας μεθόδου, επιλέγει ένα τυχαίο δείγμα 200 συσκευασιών για τις οποίες χρησιμοποιήθηκε η νέα μέθοδος, και παρατηρεί ότι 11 από αυτές είναι ελαττωματικές. Ποιο θα είναι το συμπέρασμα του υπευθύνου σχετικά με την αποτελεσματικότητα της νέας μεθόδου σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05;

Μέση Τιμή μ σ^2 Γνωστό

Στατιστική συνάρτηση

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Κανονικός Πληθυσμός

ή

n>30

$H_1: \mu > \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$

$\not{H}_0$ αν $Z > Z^*_{\alpha}$ $\not{H}_0$ αν $Z < -Z^*_{\alpha}$ $\not{H}_0$ αν $|Z| > Z^*_{\alpha/2}$

$$1-\alpha\%\Delta.\Epsilon. \ \overline{X} \pm Z^*_{a/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Μέση Τιμή μ σ² Άγνωστο

Στατιστική συνάρτηση

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}}$$

$H_1 : \mu > \mu_0$ $\quad$ $H_1 : \mu < \mu_0$ $\quad$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$

$\not{H}_0$ αν $T > t^*_{n-1,\alpha}$ $\quad$ $\not{H}_0$ αν $T < -t^*_{n-1,\alpha}$ $\quad$ $\not{H}_0$ αν $|T| > t^*_{n-1,\alpha/2}$

$$1-\alpha\%\,\Delta.\Epsilon.\ \overline{X} \pm t^*_{n-1,\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Πληθυσμιακή Αναλογία π

Στατιστική συνάρτηση

$$\min(n \cdot p, n \cdot q) \geq 5$$

$$Z = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{pq/n}} \sim N(0,1)$$

όπου: p = δειγματική αναλογία

π = πληθυσμιακή αναλογία

q = 1-p

$$H_1 : \pi > \pi_0 \qquad H_1 : \pi < \pi_0 \qquad H_1 : \pi \neq \pi_0$$

$\not{H}_0$ αν $Z > Z^*_\alpha$ $\not{H}_0$ αν $Z < -Z^*_\alpha$ $\not{H}_0$ αν $|Z| > Z^*_{\alpha/2}$

$$(1-a)\%\Delta E \; p \pm Z^*_{a/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}$$