Ανάλυση Δεδομένων στη Λογιστική και Χρηματοοικονομική

Μοντελοποίηση Μονομεταβλητών Μοντέλων Χρονοσειρών

Μονομεταβλητά μοντέλα χρονοσειρών

- Τα μονομεταβλητά μοντέλα χρονοσειρών σχετίζονται με την προσπάθεια να προβλέπουν τις αποδόσεις χρησιμοποιώντας μόνο τις πληροφορίες που περιέχονται στις προηγούμενες τιμές τους.
- Μια σημαντική κατηγορία μοντέλων χρονικών σειρών είναι η οικογένεια των αυτοπαλίνδρομων κινητών μέσων όρων υποδειγμάτων (autoregressive moving average (ARMA)
- Στην ενότητα αυτή θα αναλύσουμε τα

Α.Υποδείγματα Κινητών Μέσων (MA: Moving Average)

Β. Αυτοπαλίνδρομα Υποδείγματα (AR: Autoregressive)

Γ. Αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα κινητών μέσων (ARMA)

Υποδείγματα Κινητών Μέσων

- Έστω u_t (t=1,2,3,...) αποτελεί μια ακολουθία ανεξάρτητων και ιδίων κατανεμημένων (iid) τυχαίων μεταβλητών με $E(u_t)=0$ και $Var(u_t)= \sigma_\varepsilon^2$, τότε

$$y_t = \mu + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \ldots + \theta_q u_{t-q}$$

είναι q τάξης υπόδειγμα κινητών μέσων MA(q).

- Οι ιδιότητες είναι

$E(y_t)=\mu$; $Var(y_t) = \gamma_0 = (1+\theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_q^2)\sigma^2$

Συνδυακυμάνσεις

$$\gamma_s = \begin{cases} (\theta_s + \theta_{s+1}\theta_1 + \theta_{s+2}\theta_2 + \ldots + \theta_q \theta_{q-s})\sigma^2 & for \quad s = 1,2,\ldots,q \\ 0 \quad for \quad s > q \end{cases}$$

Αυτοπαλίνδρομα Υποδείγματα

- Ένα αυτοπαλίνδρομο μοντέλο τάξης *p*, δηλαδή AR(*p*) εκφράζεται ως:

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + u_t$$

Οι ροπές των αυτοπαλίνδρομων υποδείγμάτων

- Ο μέσος όρος δίνεται από $E(y_t) = \dfrac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \ldots - \phi_p}$
- Οι αυτοδιακυμάνσεις και αυτοσυσχετίσεις μπορούν να υπολογιστούν με την επίλυση των γνωστών ως εξισώσεων Yule-Walker

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \phi_1 + \tau_1\phi_2 + \ldots + \tau_{p-1}\phi_p \\
\tau_2 &= \tau_1\phi_1 + \phi_2 + \ldots + \tau_{p-2}\phi_p \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\tau_p &= \tau_{p-1}\phi_1 + \tau_{p-2}\phi_2 + \ldots + \phi_p
\end{aligned}$$

- Έαν το μοντέλο είναι στάσιμο (stationary), η αυτοσυσχέτιση θα φθίνει εκθετικά στο μηδέν.

Η μερική συνάρτηση αυτοσυσχέτησης (Partial Autocorrelation Function (pacf, τ_{kk})

- Μετράει τη συσχέτιση μεταξύ μιας παρατήρησης k περιόδων πριν και της τρέχουσας παρατήρησης, αφότου λάβουμε υπόψιν για παρατηρήσεις σε ενδιάμεσες χρονικές υστερήσεις (δηλαδή για όλες οι χρονικές υστερήσεις $< k$)

- Άρα τ_{kk} μετράει τη συσχέτιση μεταξύ των y_t και y_{t-k} μετά την αφαίρεση των επιπτώσεων y_{t-k+1} , y_{t-k+2} , …, y_{t-1} .

- Στη χρονική υστέρηση 1, η acf = pacf πάντοτε. *

- Στη χρονική υστέρηση 2, $\tau_{22} = (\tau_2 - \tau_1^2) / (1 - \tau_1^2)$

- Για χρονικές υστερήσεις 3+, οι εξισώσεις είναι πιο περίπλοκες.

* acf :**Autocorrelation Function και pacf:Partial Autocorrelation Function**

- Η pacf είναι χρήσιμη για να μας εξηγήσει τη διαφορά μεταξύ των AR και ARMA υποδειγμάτων.

- Στην περίπτωση της AR(p), υπάρχουν άμεσες συνδέσεις μεταξύ των y_t and y_{t-s} μόνο για $s \leq p$.

- Άρα για ένα μοντέλο AR(p), η θεωρητική pacf θα είναι μηδενική μετά την χρονική υστέρηση p.

- Στην περίπτωση ενός μοντέλου MA(q), αυτό μπορεί να εκφραστεί ως AR(∞), άρα υπάρχουν άμεσες συνδέσεις μεταξύ των y_t and όλων των προηγούμενων τιμών.

- Για ένα μοντέλο MA(q), η θεωρητική pacf θα φθίνει γεωμετρικά.

Αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα κινητών μέσων (ARMA)

- Συνδυάζοντας τα υποδείγματα AR(p) and MA(q) έχουμε το υπόδειγμα ARMA(p,q)

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \ldots + \phi_p y_{t-p} + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \ldots + \theta_q u_{t-q} + u_t$$

με $E(u_t) = 0;\ E(u_t^2) = \sigma^2;\ E(u_t u_s) = 0,\ t \neq s$

Η Συμπεριφορά της acf για τα AR and MA υποδείγματα

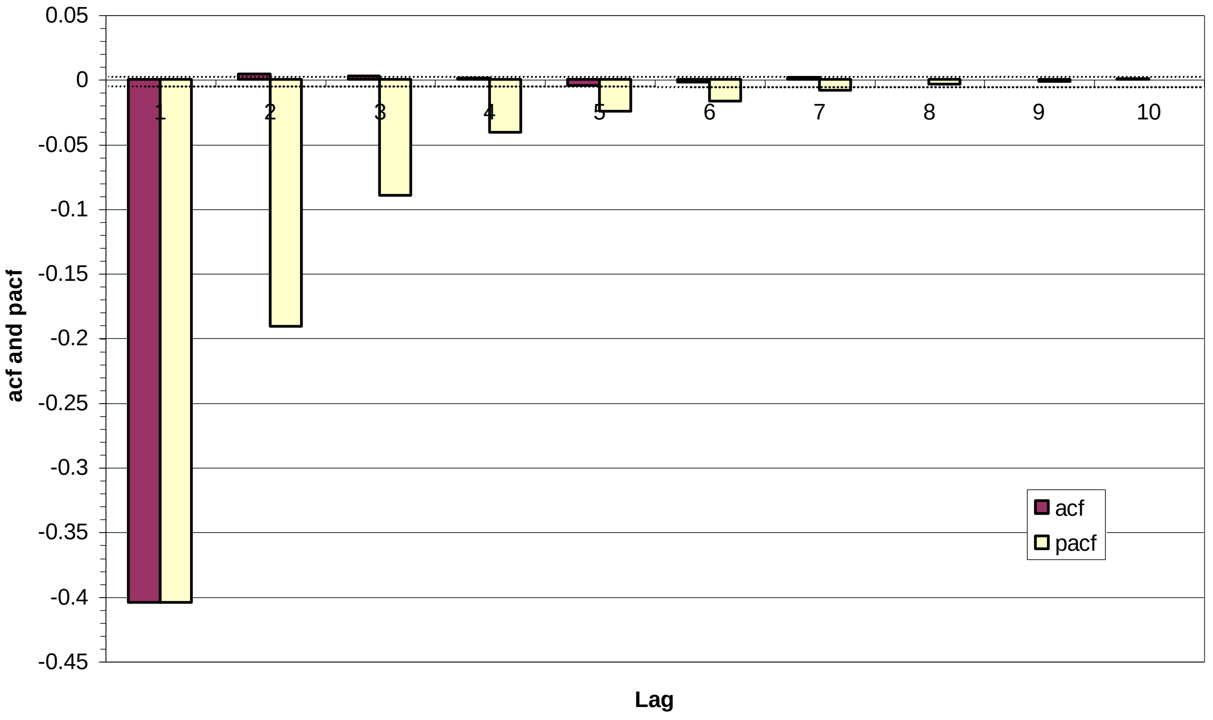
Ένα αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα έχει

- Μια γεωμετρικά φθίνουσα acf
- Αριθμός των spikes της pacf = τάξη της AR

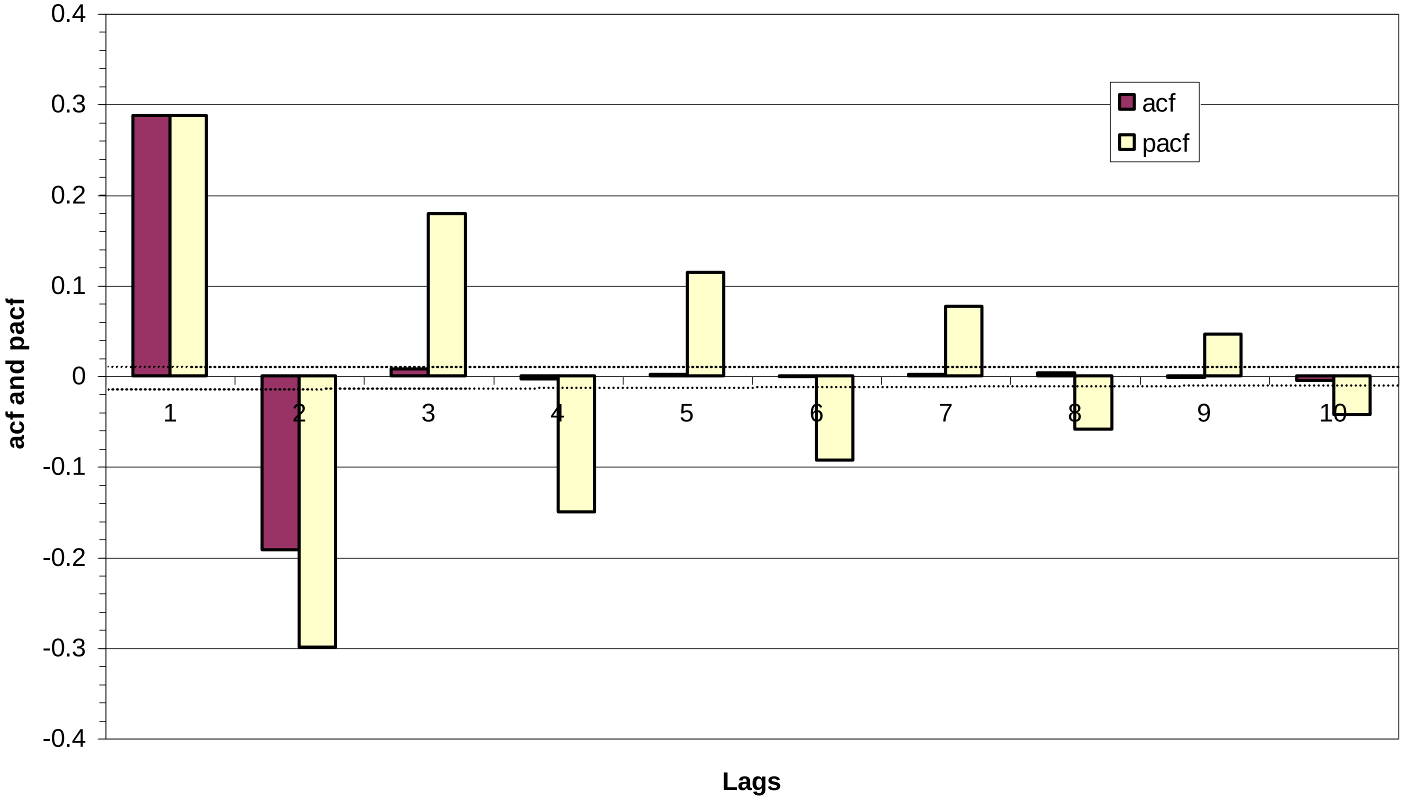
Ένα υπόδειγμα κινητών μέσων όρων έχει

- Αριθμός των spikes της acf = τάξη της MA
- Μια γεωμετρικά φθίνουσα pacf

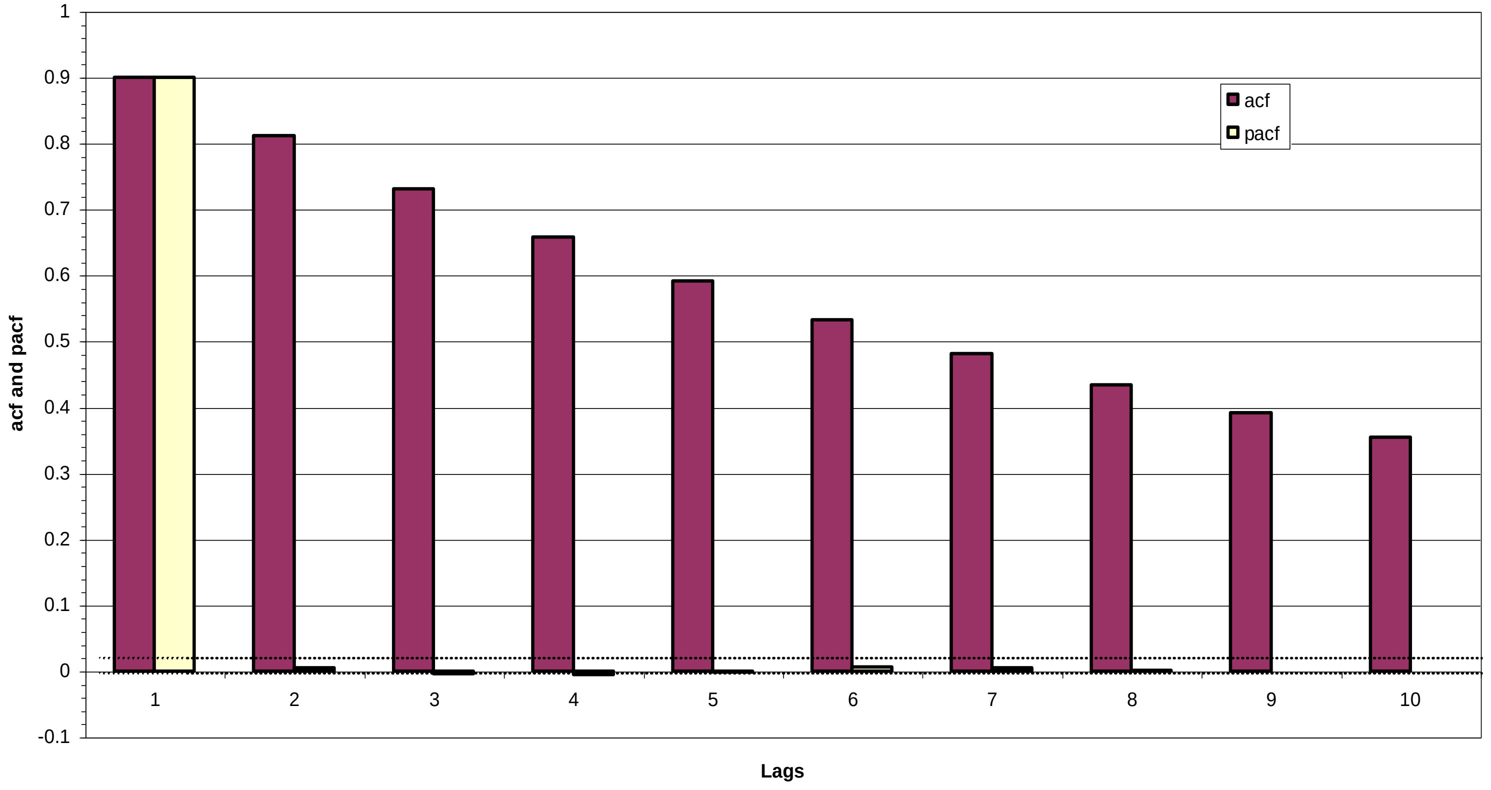
ACF and PACF για ένα μοντέλο MA(1) : $y_t = -0.5u_{t-1} + u_t$



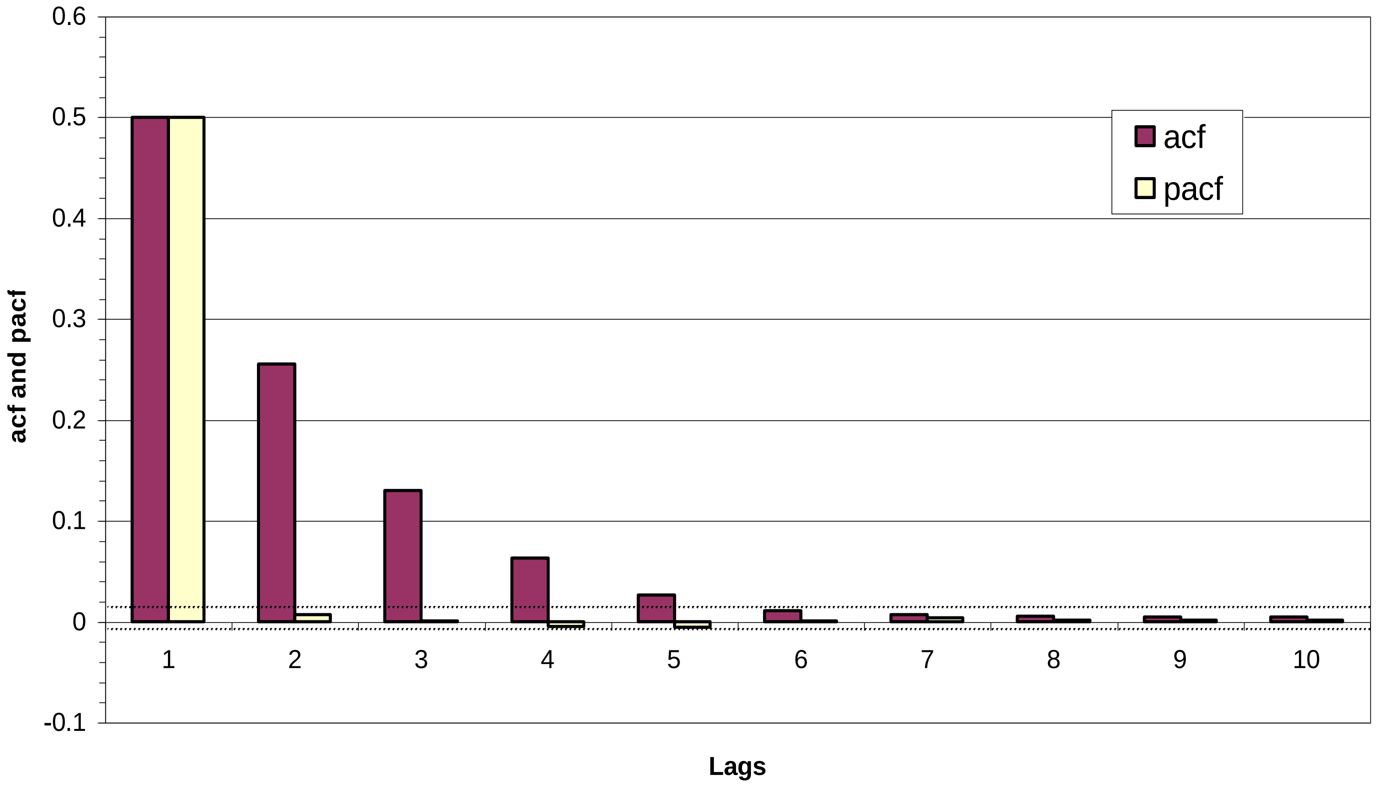
ACF and PACF για ένα μοντέλο MA(2) : $y_t = 0.5u_{t-1} - 0.25u_{t-2} + u_t$



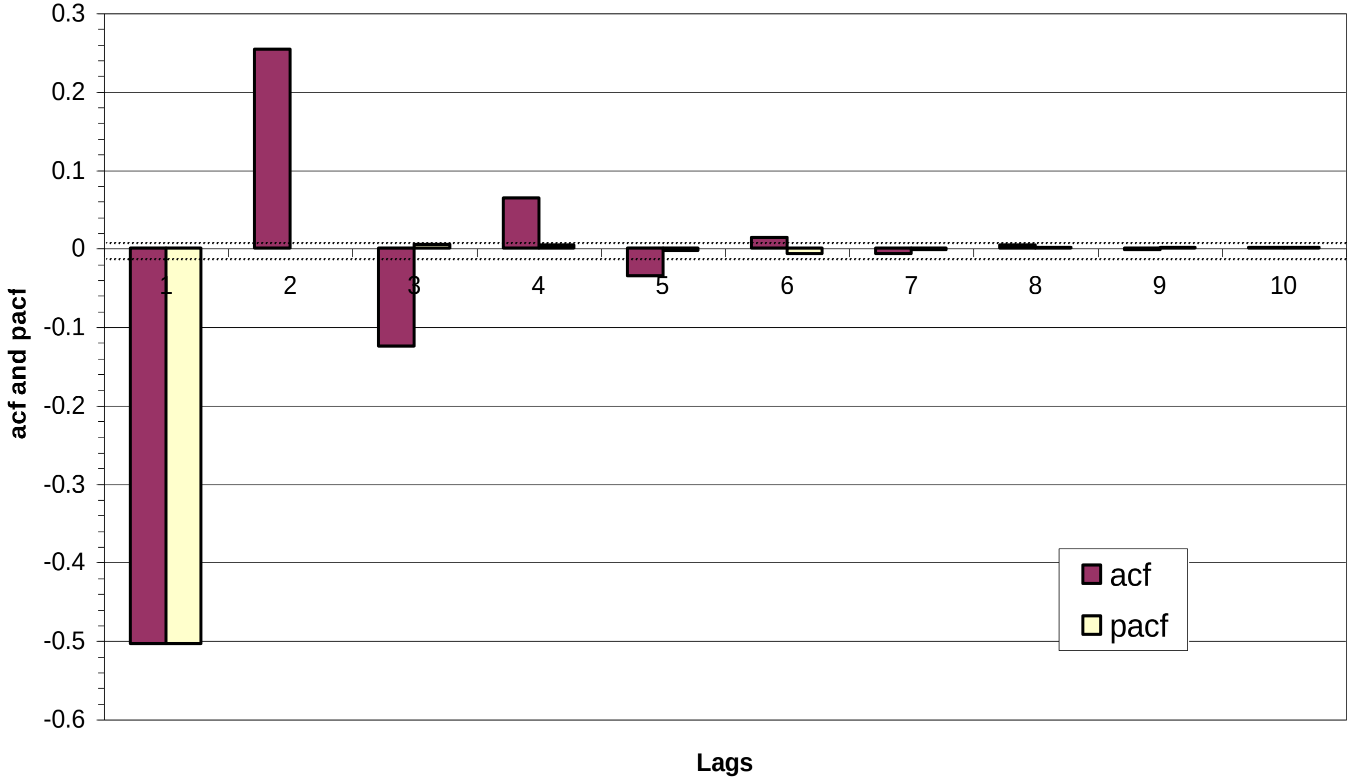
ACF and PACF για ένα αργά φθίνων (slowly decaying) μοντέλο AR(1) : $y_t = 0.9y_{t-1} + u_t$



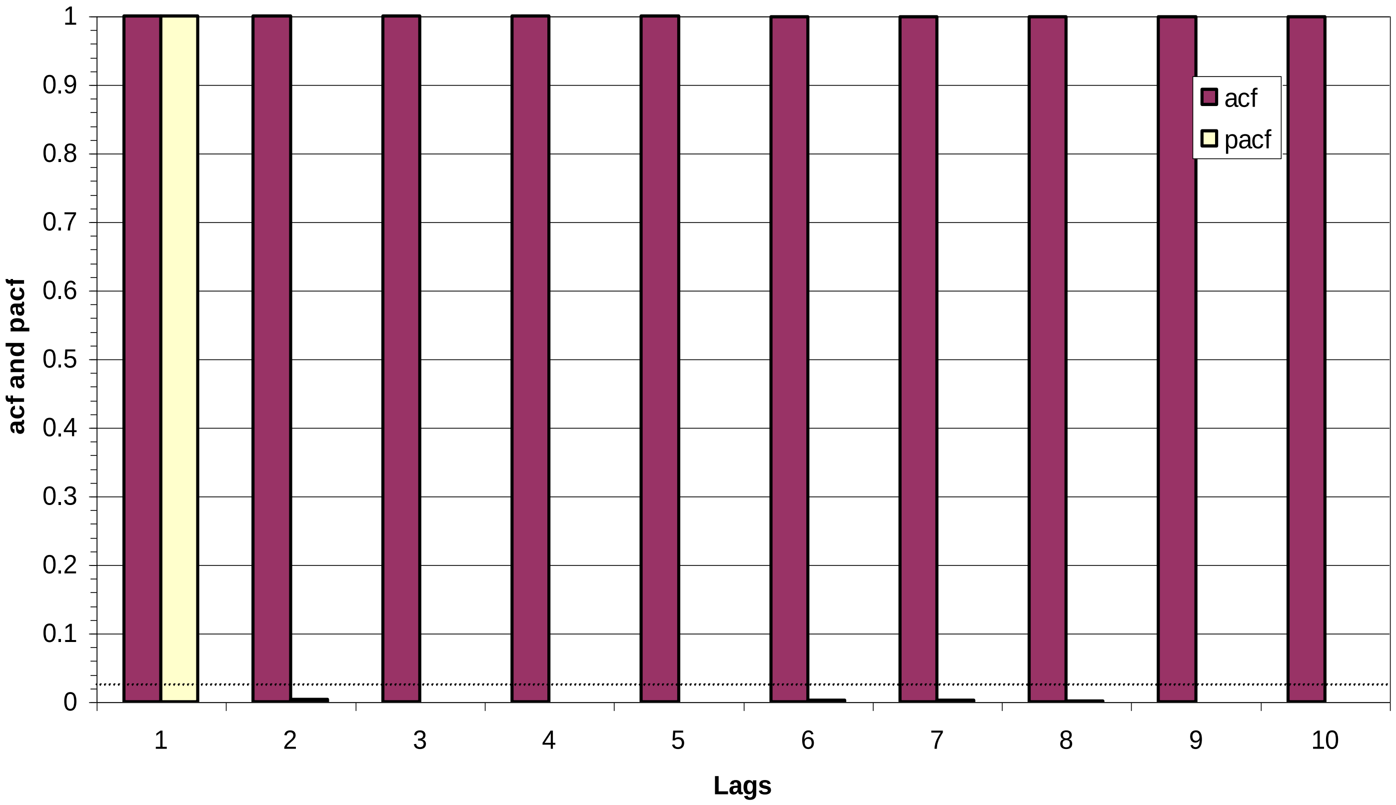
ACF and PACF για ένα γρήγορα φθίνων (more rapidly decaying) μοντέλο AR(1): $y_t = 0.5y_{t-1} + u_t$



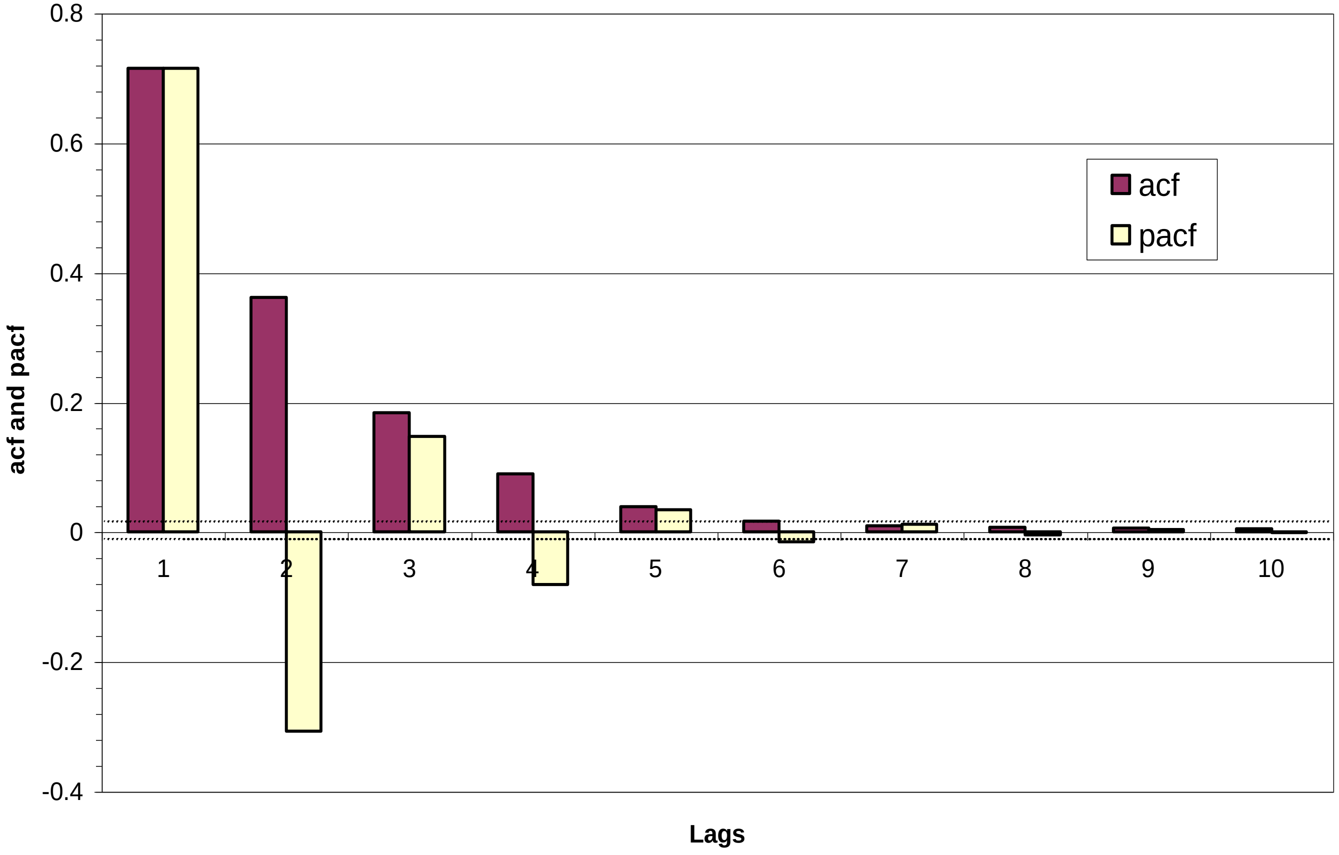
ACF and PACF για ένα γρήγορα φθίνων μοντελο AR(1) με αρνητικό συντελεστή: $y_t = -0.5y_{t-1} + u_t$



ACF and PACF για ένα μη-στάσιμο (Non-stationary) μοντέλο (δηλαδή με μοναδιαίο συντελεστή): $y_t = y_{t-1} + u_t$



ACF and PACF για ένα μοντέλο ARMA(1,1):
$y_t = 0.5y_{t-1} + 0.5u_{t-1} + u_t$



Κριτήρια Πληροφόρησης (Information Criteria) για επιλογή μοντέλου

- Η επιλογή μοντέλου με βάση τα διαγράμματα των acf and pacf είναι δύσκολη στην πράξη.
- Στην πράξη χρησιμοποιούμε **κριτήρια πληροφόρησης (information criteria) για επιλογή μοντέλου**

1. Κριτήριο του Akaike $AIC = -\frac{2LL}{T} + \frac{2k}{T}$
2. Κριτήριο του Schwarz $SBIC = -\frac{2LL}{T} + \frac{klnT}{T}$

Όπου $LL = -\frac{T}{2}\left[1 + \ln(2\pi) + \ln(\frac{\sum u^2}{T})\right]$ και $k = p + q + 1$ και T = μέγεθος του δείγματος.

- Η επιλογή του μοντέλου βασίζεται στην επιλογή του αριθμού των παραμέτρων που ελαχιστοποιεί ένα από τα παραπάνω κριτήρια πληροφοριών

Ποιο από τα δύο κριτήρια πληροφόρησης πρέπει να προτιμάται εάν προτείνουν διαφορετικά μοντέλα;

❖ Το SBIC είναι πολύ συνεπές αλλά αναποτελεσματικό.

❖ Το AIC δεν είναι συνεπές και συνήθως επιλέγει «μεγαλύτερα» μοντέλα.