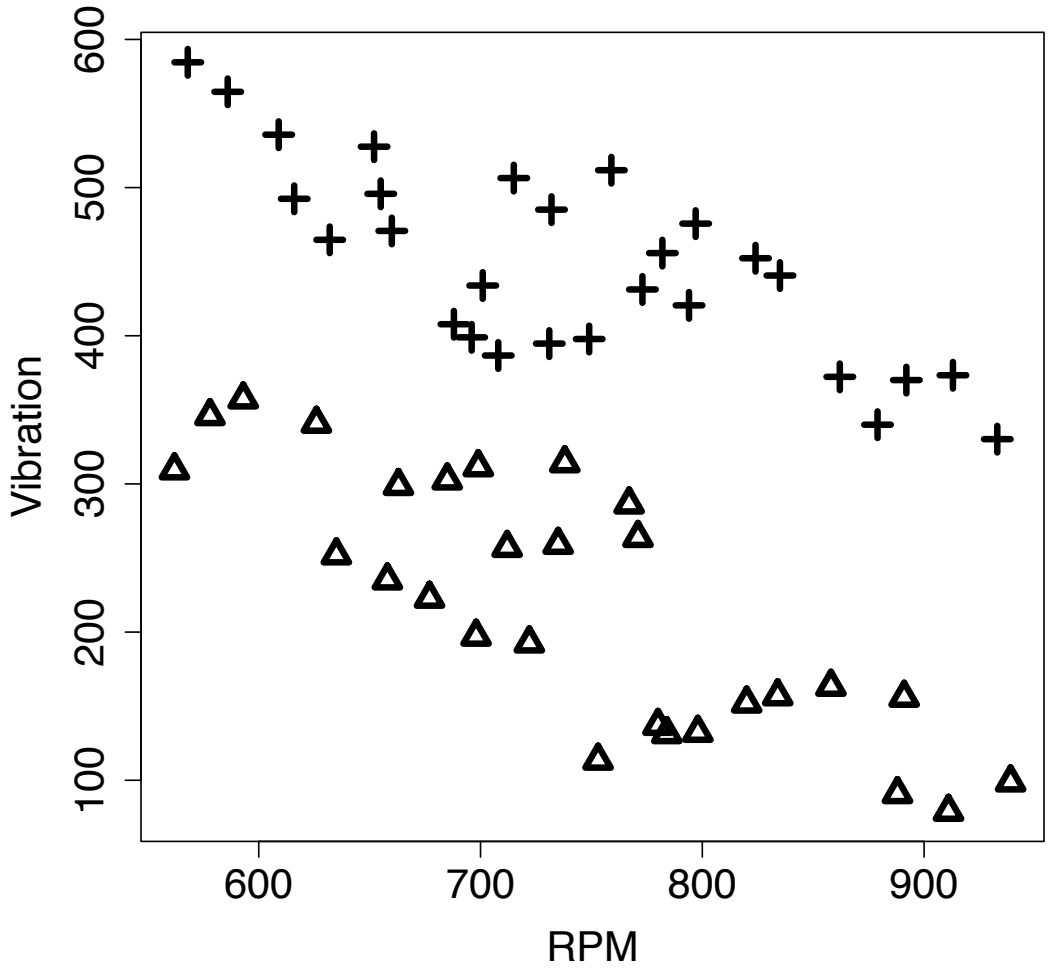
Logistic Regression

Χειρισμός Κατηγορικών Χαρακτηριστικών-Στόχων: Λογιστική Παλινδρόμηση

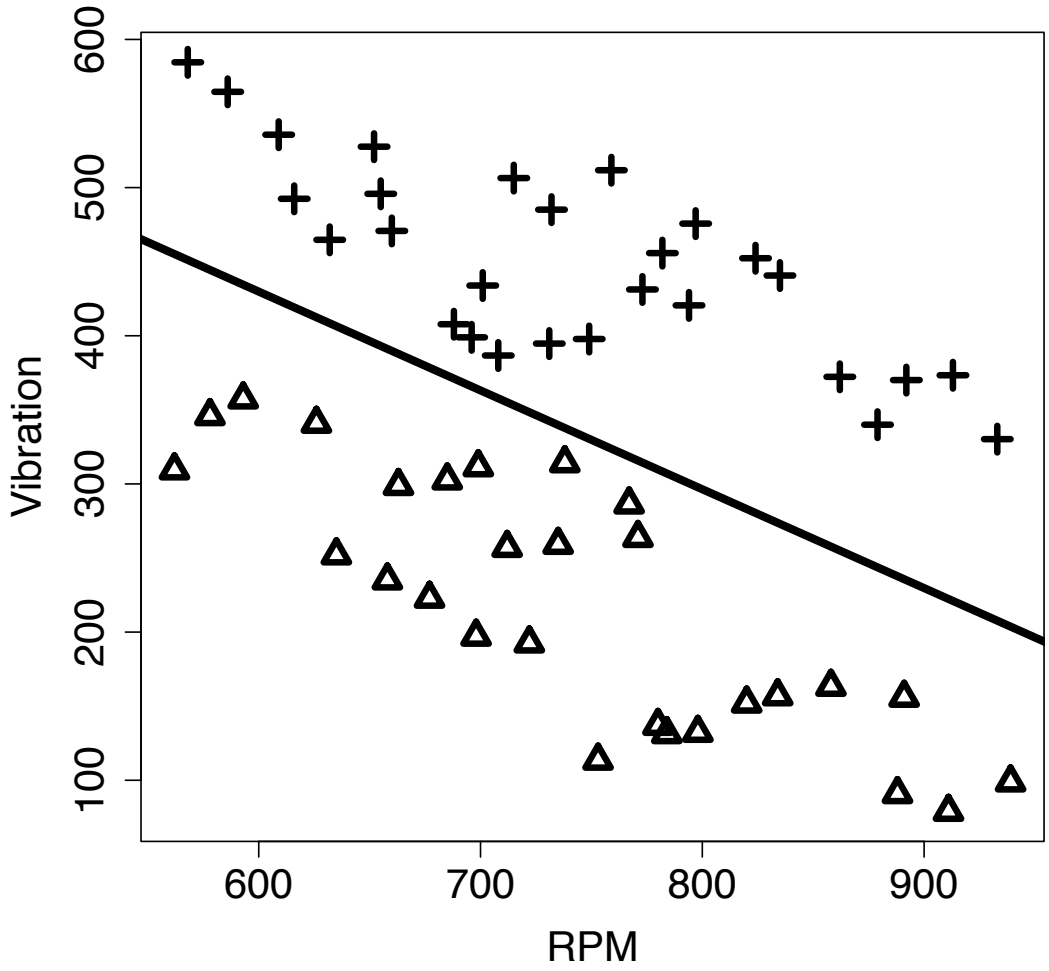
Πίνακας: Ένα σύνολο δεδομένων που παραθέτει χαρακτηριστικά για έναν αριθμό γεννητριών.

ID	RPM	Vibration	Status
1	568	585	good
2	586	565	good
3	609	536	good
4	616	492	good
5	632	465	good
6	652	528	good
7	655	496	good
8	660	471	good
9	688	408	good
10	696	399	good
11	708	387	good
12	701	434	good
13	715	506	good
14	732	485	good
15	731	395	good
16	749	398	good
17	759	512	good
18	773	431	good
19	782	456	good
20	797	476	good
21	794	421	good
22	824	452	good
23	835	441	good
24	862	372	good
25	879	340	good
26	892	370	good
27	913	373	good
28	933	330	good

ID	RPM	Vibration	Status
29	562	309	faulty
30	578	346	faulty
31	593	357	faulty
32	626	341	faulty
33	635	252	faulty
34	658	235	faulty
35	663	299	faulty
36	677	223	faulty
37	685	303	faulty
38	698	197	faulty
39	699	311	faulty
40	712	257	faulty
41	722	193	faulty
42	735	259	faulty
43	738	314	faulty
44	753	113	faulty
45	767	286	faulty
46	771	264	faulty
47	780	137	faulty
48	784	131	faulty
49	798	132	faulty
50	820	152	faulty
51	834	157	faulty
52	858	163	faulty
53	888	91	faulty
54	891	156	faulty
55	911	79	faulty
56	939	99	faulty



Σχήμα: Διάγραμμα διασποράς των περιγραφικών χαρακτηριστικών RPM και Vibration από το σύνολο δεδομένων των γεννητριών που φαίνεται στον Πίνακα, όπου οι *'good'* γεννήτριες εμφανίζονται με σταυρούς και οι *'faulty'* με τρίγωνα.



Σχήμα: Διάγραμμα διασποράς των περιγραφικών χαρακτηριστικών RPM και Vibration από το σύνολο δεδομένων των γεννητριών που φαίνεται στον Πίνακα 1 [3]. Εμφανίζεται επίσης ένα όριο απόφασης που διαχωρίζει τις *'good'* γεννήτριες (σταυροί) από τις *'faulty'* (τρίγωνα).

- Εφόσον το όριο απόφασης είναι ένας **γραμμικός διαχωριστής**, μπορεί να οριστεί με την εξίσωση της ευθείας ως εξής:

$$\text{Vibration} = 830 - 0.667 \times \text{RPM} \tag{1}$$

ή

$$830 - 0.667 \times \text{RPM} - \text{Vibration} = 0 \tag{2}$$

- Εφαρμόζοντας την Εξίσωση (2)[6] στην παρατήρηση RPM $= 810$, Vibration $= 495$, η οποία βρίσκεται πάνω από το όριο απόφασης, δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$830 - 0.667 \times 810 - 495 = -205.27$$

- Αντίθετα, αν εφαρμόσουμε την Εξίσωση (2)[6] στην παρατήρηση RPM $= 650$ και Vibration $= 240$, η οποία βρίσκεται κάτω από το όριο απόφασης, παίρνουμε

$$830 - 0.667 \times 650 - 240 = 156.45$$

- Όλα τα σημεία δεδομένων πάνω από το όριο απόφασης θα δώσουν αρνητική τιμή όταν αντικατασταθούν στην εξίσωση του ορίου απόφασης, ενώ όλα τα σημεία κάτω από το όριο θα δώσουν θετική τιμή.

- Άρα έχουμε:

$$Y(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \mathbf{w} \cdot \mathbf{X} \geq 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- Η επιφάνεια που ορίζεται από αυτόν τον κανόνα είναι γνωστή ως **επιφάνεια απόφασης**.

- Το αυστηρό όριο απόφασης που δίνεται στην παραπάνω εξίσωση είναι **ασυνεχές**, επομένως δεν είναι παραγωγίσιμο και έτσι δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την κλίση της επιφάνειας σφάλματος.
- Επιπλέον, το μοντέλο κάνει πάντοτε απολύτως βέβαιες προβλέψεις 0 ή 1, ενώ είναι επιθυμητή λίγη περισσότερη λεπτότητα.
- Αντιμετωπίζουμε αυτά τα ζητήματα χρησιμοποιώντας μια πιο σύνθετη συνάρτηση κατωφλίου που είναι συνεχής, και επομένως παραγωγίσιμη, και επιτρέπει την επιθυμητή λεπτότητα: τη **λογιστική συνάρτηση**.

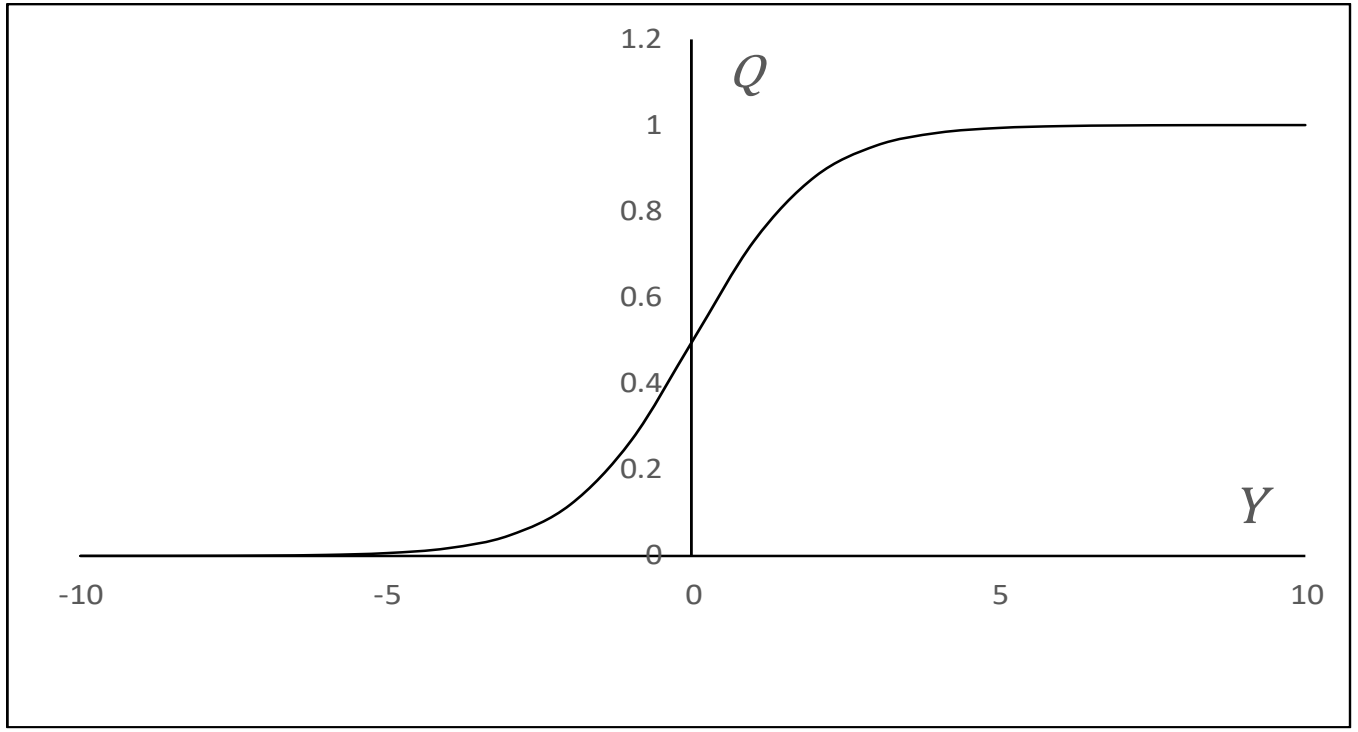
Logistic (ή Logit) Regression

- Ο στόχος είναι να ταξινομηθούν οι παρατηρήσεις σε "θετικό αποτέλεσμα" και "αρνητικό αποτέλεσμα" χρησιμοποιώντας ως δεδομένα χαρακτηριστικά.
- Η πιθανότητα θετικού αποτελέσματος θεωρείται ότι είναι μια σιγμοειδής συνάρτηση (sigmoid ή logistic function):$Q = \frac{1}{1+e^{-Y}}$

  όπου το Y σχετίζεται γραμμικά με τις τιμές των χαρακτηριστικών:

$$Y = a + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \cdots + X_m$$

Σιγμοειδής συνάρτηση (sigmoid ή logistic function)



Maximum Likelihood Estimation

- Χρησιμοποιούμε το training set για να μεγιστοποιήσουμε

$$\sum_{\substack{\text{Positive}\\\text{Outcomes}}} \ln(Q) + \sum_{\substack{\text{Negative}\\\text{Outcomes}}} \ln(1-Q)$$

Ισοδύναμα μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε μια συνάρτηση κόστους

$$\frac{1}{n}\left[-\sum_{\substack{\text{Positive}\\\text{Outcomes}}} \ln(Q) - \sum_{\substack{\text{Negative}\\\text{Outcomes}}} \ln(1-Q)\right]$$

- Αυτή η μεγιστοποίηση (ελαχιστοποίηση) δεν μπορεί να γίνει αναλυτικά, αλλά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν αλγόριθμο gradient ascent
- Για να συμπεριλάβουμε το regularization μπορούμε να προσθέσουμε $\lambda \sum b_j^2$ ή $\lambda \sum |b_j|$ στη συνάρτηση που ελαχιστοποιείται

Εφαρμογή LendingClub

- Τα δεδομένα αποτελούνται από δάνεια, καλά (good) ή αθετημένα (defaulted).
- Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε μόνο τέσσερα χαρακτηριστικά

1. Ιδιοκτησία σπιτιού (ενοικίαση έναντι ιδιοκτησία) - Home ownership (rent vs. own)
2. Εισόδημα – Income
3. Χρέος προς εισόδημα - Debt to income
4. Πιστωτική βαθμολογία - Credit score

- Το σύνολο δεδομένων έχει 12.290 παρατηρήσεις (9.733 καλά δάνεια “Fully Paid” και 2.557 δάνεια αθέτησης “Charged Off”). 7.000 δάνεια τέθηκαν σε training set, 3.000 σε validation set, και 2.290 σε test set.

Κάποια δεδομένα (**unscaled**) από το training, validation και test set

```
#print first five instances for each data set - unscaled
print("Unscaled data")
print("Training set")
print(X_train_unscaled.head())
print("Validation set")
print(X_val_unscaled.head())
print("Test set")
print(X_test_unscaled.head())
```

```
Unscaled data
Training set
   home_ownership     income    dti  fico
0               1    44304.0  18.47   690
1               0    50000.0  29.62   735
2               0    64400.0  16.68   675
3               0    38500.0  33.73   660
4               1   118000.0  26.66   665
Validation set
   home_ownership     income    dti  fico
0               0    25000.0  27.60   660
1               0    50000.0  21.51   715
2               1   100000.0   8.14   770
3               0    75000.0   1.76   685
4               1    78000.0  16.11   680
Test set
   home_ownership     income    dti  fico
0               1    52400.0  24.64   665
1               1   150000.0  17.04   785
2               1   100000.0  20.92   710
3               0    97000.0  13.11   705
4               1   100000.0  24.08   685
```

Αποτελέσματα σε Training Set (Unscaled data)

```
#Create an instance of logistic regression named lgstc_reg on unscaled data

lgstc_reg =  LogisticRegression(penalty="none",solver="newton-cg")

# Fit logististic regression to training set

lgstc_reg.fit(X_train_unscaled, y_train)                    # fit training data on logistic regression


print(lgstc_reg.intercept_, lgstc_reg.coef_)                # get the coefficients of each features
```

```
[-5.98082741] [[ 2.97659316e-01  6.17979317e-07 -3.65499148e-02  1.12603137e-02]]
```

X_1= *Home Ownership*

X_2= *Income*

X_3= *Debt to income ratio*

X_4 = *Credit score*

$$Y = -5.981 + 0.297X_1 + 0.0000006X_2 - 0.0365X_3 + 0.0113X_4$$

$$\text{Probability of a good loan} = \frac{1}{1+e^{-Y}}$$

π.χ. Για το πρώτο δάνειο η πιθανότητα να είναι καλό είναι $\frac{1}{1+e^{-Y}}$, όπου $Y = -5.981 + 0.297 * 1 + 0.0006 * 44304 - 0.0365 * 18.47 + 0.0113 * 690 = =1.439$, άρα $\text{Probability of a good loan} = \frac{1}{1+e^{-Y}} = 0.808$.

Κάποια δεδομένα (**scaled**) από το training, validation και test set

```
#print first five instances for each data set - scaled
print("Scaled data")
print("Training set")
print(X_train.head())
print("Validation set")
print(X_val.head())
print("Test set")
print(X_test.head())
```

```
Scaled data
Training set
   home_ownership    income       dti      fico
0        0.809651 -0.556232  0.053102 -0.163701
1       -1.234923 -0.451393  1.307386  1.262539
2       -1.234923 -0.186349 -0.148259 -0.639114
3       -1.234923 -0.663060  1.769728 -1.114527
4        0.809651  0.800204  0.974410 -0.956056
Validation set
   home_ownership    income       dti      fico
0       -1.234923 -0.911538  1.080153 -1.114527
1       -1.234923 -0.451393  0.395077  0.628655
2        0.809651  0.468899 -1.108940  2.371837
3       -1.234923  0.008753 -1.826638 -0.322172
4        0.809651  0.063971 -0.212379 -0.480643
Test set
   home_ownership    income       dti      fico
0        0.809651 -0.407219  0.747177 -0.956056
1        0.809651  1.389190 -0.107762  2.847250
2        0.809651  0.468899  0.328707  0.470184
3       -1.234923  0.413681 -0.549855  0.311713
4        0.809651  0.468899  0.684181 -0.322172
```

Αποτελέσματα σε Training Set (scaled data)

```
#Create an instance of logistic regression named lgstc_reg on scaled data

lgstc_reg =  LogisticRegression(penalty="none",solver="newton-cg")

# Fit logististic regression to training set

lgstc_reg.fit(X_train, y_train)                    # fit training data on logistic regression


print(lgstc_reg.intercept_, lgstc_reg.coef_)       # get the coefficients of each features
```

```
[1.4162429] [[ 0.14531037  0.03366005 -0.32404502  0.36315462]]
```

X_1= *Home Ownership*

X_2= *Income*

X_3= *Debt to income ratio*

X_4 = *Credit score*

$$Y = 1.416 + 0.145X_1 + 0.033X_2 - 0.324X_3 + 0.363X_4$$

Probability of a good loan = $\frac{1}{1+e^{-Y}}$

π.χ. Για το πρώτο δάνειο η πιθανότητα να είναι καλό είναι $\frac{1}{1+e^{-Y}}$, όπου $Y = 1.416 + 0.145 * 0.810 + 0.033 * (-0.556) - 0.324 * 0.053 + 0.363 * (-0.164)$=1.439, άρα Probability of a good loan = $\frac{1}{1+e^{-Y}}$ =0.808.

Υπολογίζουμε τη συνάρτηση κόστους για το training, validation και test sets.

$$\frac{1}{n}\left[-\sum_{\text{Positive Outcomes}} \ln(Q) - \sum_{\text{Negative Outcomes}} \ln(1-Q)\right]$$

Unscaled data

```
# y_train_pred, y_val_pred, and y_test_pred are the predicted probabilities for the training set
# validation set and test set using the fitted logistic regression model

y_train_pred=lgstc_reg.predict_proba(X_train_unscaled)
y_val_pred=lgstc_reg.predict_proba(X_val_unscaled)
y_test_pred=lgstc_reg.predict_proba(X_test_unscaled)

# Calculate maximum likelihood for training set, validation set, and test set

mle_vector_train = np.log(np.where(y_train == 1, y_train_pred[:,1], y_train_pred[:,0])) # if y_train == 1 set y_tr
mle_vector_val = np.log(np.where(y_val == 1, y_val_pred[:,1], y_val_pred[:,0]))
mle_vector_test = np.log(np.where(y_test == 1, y_test_pred[:,1], y_test_pred[:,0]))

# Calculate cost functions from maximum likelihoods

cost_function_training=np.negative(np.sum(mle_vector_train)/len(y_train))
cost_function_val=np.negative(np.sum(mle_vector_val)/len(y_val))
cost_function_test=np.negative(np.sum(mle_vector_test)/len(y_test))

print('cost function training set =', cost_function_training)
print('cost function validation set =', cost_function_val)
print('cost function test set =', cost_function_test)
```

```
cost function training set = 0.49111475922103454
cost function validation set = 0.4861711930624396
cost function test set = 0.4847008607351808
```

Scaled data

```
# y_train_pred, y_val_pred, and y_test_pred are the predicted probabilities for the training set
# validation set and test set using the fitted logistic regression model

y_train_pred=lgstc_reg.predict_proba(X_train)
y_val_pred=lgstc_reg.predict_proba(X_val)
y_test_pred=lgstc_reg.predict_proba(X_test)

# Calculate maximum likelihood for training set, validation set, and test set

mle_vector_train = np.log(np.where(y_train == 1, y_train_pred[:,1], y_train_pred[:,0]))
mle_vector_val = np.log(np.where(y_val == 1, y_val_pred[:,1], y_val_pred[:,0]))
mle_vector_test = np.log(np.where(y_test == 1, y_test_pred[:,1], y_test_pred[:,0]))

# Calculate cost functions from maximum likelihoods

cost_function_training=np.negative(np.sum(mle_vector_train)/len(y_train))
cost_function_val=np.negative(np.sum(mle_vector_val)/len(y_val))
cost_function_test=np.negative(np.sum(mle_vector_test)/len(y_test))

print('cost function training set =', cost_function_training)
print('cost function validation set =', cost_function_val)
print('cost function test set =', cost_function_test)
```

```
cost function training set = 4.72569039145501
cost function validation set = 4.7284436817084305
cost function test set = 4.729486296578716
```

π.χ. Οι συναρτήσεις κόστους για τα training και validation sets δείχνουν ότι το μοντέλο γενικεύεται καλά. Αυτό δε σημαίνει απαραίτητα ότι είναι το καλύτερο μοντέλο. Με την προσθήκη νέων χαρακτηριστικών μπορείτε να καταλήξετε σε καλύτερο μοντέλο.

Decision Criterion

- Το dataset είναι imbalanced με περισσότερα καλά δάνεια (good loans) από δάνεια που δεν πληρώνουν (defaulting loans).
- Υπάρχουν διαδικασίες για τη δημιουργία ενός balanced dataset.
- Με ένα balanced data set θα μπορούσαμε να ταξινομήσουμε μια παρατήρηση ως θετική αν $Q > 0.5$ και αρνητική αν $Q \leq 0.5$.
- Ωστόσο, αυτό δεν λαμβάνει υπόψη το κόστος της εσφαλμένης ταξινόμησης ενός επισφαλούς δανείου και το διαφυγόν κέρδος από την εσφαλμένη ταξινόμηση ενός καλού δανείου
- Μια καλύτερη προσέγγιση είναι η διερεύνηση διαφορετικών thresholds Z
  - Αν $Q > Z$ τότε δεχόμαστε το δάνειο.
  - Αν $Q \leq Z$ τότε απορρίπτουμε το δάνειο.

The Confusion matrix and common ratios (αφορούν το test set)

Confusion matrix :
Δείχνει τη σχέση Predictions - outcomes

	Predict positive outcome	Predict negative outcome
Outcome positive	TP (True Positive)	FN (False Negative)
Outcome negative	FP (False Positive)	TN (True Negative)

Common ratios:

- **Accuracy** $= \frac{TP+TN}{TP+FN+FP+TN}$. Δείχνει το ποσοστό των παρατηρήσεων που ταξινομούνται σωστά.
- **True Positive Rate** (sensitivity or recall) $= \frac{TP}{TP+FN}$. Δείχνει το ποσοστό των θετικών αποτελεσμάτων που προβλέπονται σωστά.
- **True Negative rate** (specificity) $= \frac{TN}{TN+FP}$. Δείχνει το ποσοστό των αρνητικών αποτελεσμάτων που προβλέπονται ως αρνητικά.
- **False Positive Rate** $= \frac{FP}{TN+FP}$. Δείχνει το ποσοστό των αρνητικών αποτελεσμάτων που ταξινομήθηκαν λανθασμένα.
- **Precision**, $P = \frac{TP}{TP+FP}$. Δείχνει το ποσοστό των θετικών αποτελεσμάτων που αποδείχθηκαν σωστά.
- **F score** $= 2 \times \frac{P \times TPR}{P+TPR}$. Είναι ένα accuracy μέτρο για imbalanced dataset και δείχνει πόσο καλά τα θετικά αποτελέσματα έχουν αναγνωρισθεί.

Αποτελέσματα στο test set

$Z = 0.00$:

	Predict no default	Predict default
Outcome positive (no default)	79.17%	0.00%
Outcome negative (default)	20.83%	0.00%

$Z = 0.75$:

	Predict no default	Predict default
Outcome positive (no default)	60.83%	18.34%
Outcome negative (default)	11.70%	9.13%

Z=0.80:

	Predict no default	Predict default
Outcome positive (no default)	42.71%	36.46%
Outcome negative (default)	6.46%	14.37%

Z=0.85:

	Predict no default	Predict default
Outcome positive (no default)	22.75%	56.42%
Outcome negative (default)	3.01%	17.82%

$Z = 1.00$:

	Predict no default	Predict default
Outcome positive (no default)	0.00%	79.17%
Outcome negative (default)	0.00%	20.83%

```
THRESHOLD = [0.00, .75, .80, .85 , 1.00]
# Create dataframe to store resultd
results = pd.DataFrame(columns=["THRESHOLD", "accuracy", "true pos rate", "true neg rate", "false pos rate", "p

# Create threshold row
results['THRESHOLD'] = THRESHOLD

j = 0

# Iterate over the 3 thresholds

for i in THRESHOLD:


    #lgstc_reg.fit(X_train, y_train)


    # If prob for test set > threshold predict 1
    preds = np.where(lgstc_reg.predict_proba(X_test)[:,1] > i, 1, 0)


    # create confusion matrix
    cm = (confusion_matrix(y_test, preds,labels=[1, 0], sample_weight=None) / len(y_test))*100

    print('Confusion matrix for threshold =',i)
    print(cm)
    print(' ')
```

```
Confusion matrix for threshold = 0.0
[[79.17030568  0.        ]
 [20.82969432  0.        ]]

Confusion matrix for threshold = 0.75
[[60.82969432 18.34061135]
 [11.70305677  9.12663755]]

Confusion matrix for threshold = 0.8
[[42.70742358 36.4628821 ]
 [ 6.4628821  14.36681223]]

Confusion matrix for threshold = 0.85
[[22.7510917  56.41921397]
 [ 3.01310044 17.81659389]]

Confusion matrix for threshold = 1.0
[[ 0.         79.17030568]
 [ 0.         20.82969432]]
```

Test Set Ratios για διαφορετικές τιμές του Z

```
for i in THRESHOLD:


    #lgstc_reg.fit(X_train, y_train)


    # If prob for test set > threshold predict 1
    preds = np.where(lgstc_reg.predict_proba(X_test)[:,1] > i, 1, 0)


    # create confusion matrix
    cm = (confusion_matrix(y_test, preds,labels=[1, 0], sample_weight=None) / len(y_test))*100

    print('Confusion matrix for threshold =',i)
    print(cm)
    print(' ')

    TP = cm[0][0]
    FN = cm[0][1]
    FP = cm[1][0]
    TN = cm[1][1]

    results.iloc[j,1] = accuracy_score(y_test, preds)
    results.iloc[j,2] = recall_score(y_test, preds)
    results.iloc[j,3] = TN/(FP+TN)
    results.iloc[j,4] = FP/(FP+TN)
    results.iloc[j,5] = precision_score(y_test, preds)
    results.iloc[j,6] = f1_score(y_test, preds)


    j += 1

print('ALL METRICS')
print( results.T)
```

```
ALL METRICS
                     0         1         2         3         4
THRESHOLD          0.0      0.75       0.8      0.85       1.0
accuracy      0.791703  0.699563  0.570742  0.405677  0.208297
true pos rate      1.0   0.76834  0.539437  0.287369       0.0
true neg rate      0.0  0.438155  0.689727  0.855346       1.0
false pos rate     1.0  0.561845  0.310273  0.144654       0.0
precision     0.791703  0.838651  0.868561  0.883051       0.0
f-score       0.883744  0.801957  0.665532  0.433625       0.0
```

	Z=0.00	**Z = 0.75**	**Z = 0.80**	**Z = 0.85**	**Z=1.00**
Accuracy	79.17%	69.96%	57.07%	40.57%	20.83%
True Positive Rate	100.00%	76.83%	53.94%	28.74%	0.00%
True Negative Rate	0.00%	43.82%	68.97%	85.53%	100.00%
False Positive Rate	100.00%	56.18%	31.03%	14.47%	0.00%
Precision	79.17%	83.87%	86.86%	88.31%	n.a.
F-score	88.37%	80.20%	66.55%	43.36%	n.a.

- Υπάρχει ένα **trade-off** μεταξύ των **True Positive Rate** - **False Positive Rate**:

Όταν μεγαλώνει το **True Positive Rate** μεγαλώνει και το **False Positive Rate**.

Στο παράδειγμά μας αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να αναγνωρίσουμε ένα μεγαλύτερο ποσοστό καλών δανείων μόνο όταν ταξινομούμε λάθος ένα μεγαλύτερο ποσοστό κακών δανείων.

- Η **ROC (receiver operating characteristics)** curve δείχνει τη σχέση αυτή.

- **Area Under Curve (AUC)** Η area under the curve είναι ένας δημοφιλής τρόπος περίληψης της προγνωστικής ικανότητας ενός μοντέλου να εκτιμά μια δυαδική μεταβλητή (binary variable).

❑ Όταν AUC =1 τότε το μοντέλο είναι τέλειο (perfect).
❑ Όταν AUC > 0.5 τότε το μοντέλο έχει (κάποια) προγνωστική ικανότητα
❑ Όταν AUC =0.5 τότε το μοντέλο δεν έχει προγνωστική ικανότητα (no predictive ability).
❑ Όταν AUC < 0.5 τότε το μοντέλο έχει αρνητική προγνωστική ικανότητα (negative predictive ability).

Για το LendingClub model με τα 4 χαρακτηριστικά (features), AUC = 0.6578.

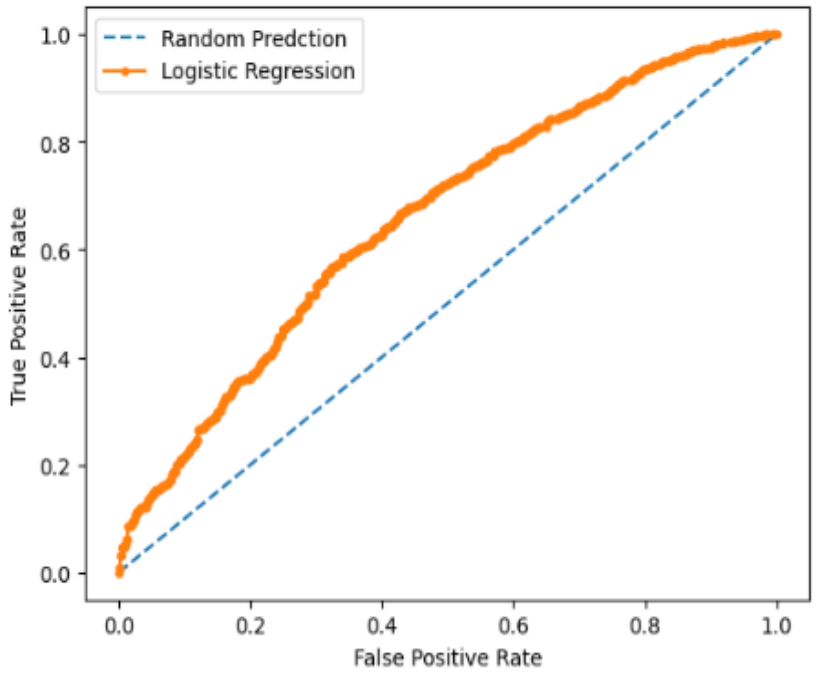
```
# Calculate the receiver operating curve and the AUC measure

lr_prob=lgstc_reg.predict_proba(X_test)
lr_prob=lr_prob[:, 1]
ns_prob=[0 for _ in range(len(y_test))]
ns_auc=roc_auc_score(y_test, ns_prob)
lr_auc=roc_auc_score(y_test,lr_prob)
print("AUC random predictions =", ns_auc)
print("AUC predictions from logistic regression model =", lr_auc)
ns_fpr,ns_tpr,_=roc_curve(y_test,ns_prob)
lr_fpr,lr_tpr,_=roc_curve(y_test,lr_prob)

plt.plot(ns_fpr,ns_tpr,linestyle='--',label='Random Predction')
plt.plot(lr_fpr,lr_tpr,marker='.',label='Logistic Regression')

plt.xlabel('False Positive Rate')
plt.ylabel('True Positive Rate')
plt.legend()
plt.show()
```

```
AUC random predictions = 0.5
AUC predictions from logistic regression model = 0.6577628841779786
```



Επιλέγοντας το Z

- Η τιμή του Z μπορεί να βασίζεται
  - Στο αναμενόμενο κέρδος από ένα δάνειο που είναι καλό, P
  - Η αναμενόμενη απώλεια από ένα δάνειο που αθετείται, L

- Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε το $(P \times \text{True Positive}) - (L \times \text{False Positive})$
- Αν θεωρήσουμε ότι το κόστος των δανείων που αθετούνται να είναι 4 φορές το κέρδος των καλών δανείων, τότε για

❑ Για $Z = 0.75$ προκύπτει $0.1402P$ $(=P \times 60.83\% - 4P \times 11.70\%)$

❑ Για $Z=0.80$ προκύπτει $0.1686P$ $(=P \times 42.71\% - 4P \times 6.46\%)$

❑ Για $Z =0.85$ προκύπτει $0.1070P$ $(=P \times 22.75\% - 4P \times 3.01\%)$

Άρα **επιλέγουμε το Z=0.80** επειδή είναι το πιο κερδοφόρο.