Παράρτημα Γ: Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα

Fundamentals of Machine Learning for Predictive Data Analytics

Αθανάσιος Σάκκας, ΟΠΑ

- Ένας **βαθμωτός αριθμός** είναι ένας μόνο αριθμός.
- Ένας **πίνακας** είναι ένας δισδιάστατος πίνακας ($n \times m$) αριθμών.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,m} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,m} \end{bmatrix}$$

- Κάθε στοιχείο ενός πίνακα προσδιορίζεται από δύο δείκτες: γραμμή και στήλη.

$$\mathbf{C}[2,2] = c_{2,2}$$

- Ένα **διάνυσμα** είναι μια διάταξη αριθμών σε συγκεκριμένη σειρά.
- Ένα διάνυσμα μπορεί να είναι διάνυσμα στήλης ή διάνυσμα γραμμής.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{bmatrix}$$

- Κάθε στοιχείο ενός διανύσματος προσδιορίζεται από έναν μόνο δείκτη.

  $\mathbf{a}[2] = a_2 \qquad \mathbf{b}[2] = b_2$

- Τα διανύσματα μπορούν να θεωρηθούν ειδικές περιπτώσεις πινάκων:
  - διάνυσμα στήλης = πίνακας με μία στήλη
  - διάνυσμα γραμμής = πίνακας με μία γραμμή

- Ο ανάστροφος ενός διανύσματος μετατρέπει διάνυσμα στήλης σε διάνυσμα γραμμής και αντίστροφα.
- Αν $\mathbf{a}$ είναι διάνυσμα, τότε ο ανάστροφός του γράφεται $\mathbf{a}^\top$.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a}^\top = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

- Ο ανάστροφος ενός πίνακα προκύπτει όταν ανταλλάσσουμε γραμμές με στήλες.
- Η κύρια διαγώνιος περιέχει στοιχεία όπως $c_{1,1}, c_{2,2}, \ldots$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & c_{1,4} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & c_{2,4} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & c_{3,4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^\top = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} & c_{3,1} \\ c_{1,2} & c_{2,2} & c_{3,2} \\ c_{1,3} & c_{2,3} & c_{3,3} \\ c_{1,4} & c_{2,4} & c_{3,4} \end{bmatrix}$$

- Ο πολλαπλασιασμός πινάκων γράφεται συνήθως με τα σύμβολα των πινάκων δίπλα-δίπλα.

  $\mathbf{DE} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$

- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο πίνακες, ο αριθμός των στηλών του πρώτου πρέπει να είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του δεύτερου.
- Αν αυτό δεν ισχύει, το γινόμενο δεν ορίζεται.

- Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού είναι νέος πίνακας.
- Οι διαστάσεις του είναι:
  - οι γραμμές του πρώτου πίνακα
  - οι στήλες του δεύτερου πίνακα

$$\mathbf{DE}_{r,c} = \sum_i \mathbf{D}[r,i]\mathbf{E}[i,c]$$

- Το γινόμενο δύο διανυσμάτων ίδιου μήκους ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο**.

  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} = f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3$

- Στη **βαθιά μάθηση** χρησιμοποιούμε συχνά το **γινόμενο Hadamard**.
- Συμβολίζεται με $\odot$.
- Πολλαπλασιάζονται τα αντίστοιχα στοιχεία δύο πινάκων ίδιων διαστάσεων.

$$\mathbf{D} \odot \mathbf{E} = \begin{bmatrix} d_{1,1}e_{1,1} & d_{1,2}e_{1,2} \\ d_{2,1}e_{2,1} & d_{2,2}e_{2,2} \end{bmatrix}$$

- Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας $\mathbf{A}$ διαστάσεων $n \times n$.
- Ένα **ιδιοδιάνυσμα** του πίνακα $\mathbf{A}$ είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{x}$ τέτοιο ώστε:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

- Ο αριθμός λ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του πίνακα $\mathbf{A}$.

- Η εξίσωση

  $$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

  σημαίνει ότι όταν ο πίνακας πολλαπλασιάζει το διάνυσμα $\mathbf{x}$, το αποτέλεσμα είναι το ίδιο διάνυσμα πολλαπλασιασμένο με έναν αριθμό.
- Δηλαδή αλλάζει μόνο το **μέγεθος** του διανύσματος και όχι η **κατεύθυνσή** του.

- Για να βρούμε τις ιδιοτιμές λύνουμε:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

- όπου $\mathbf{I}$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας.
- Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση**.

Example

Έστω ο πίνακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Οι ιδιοτιμές είναι:

$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 1$$

και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα μπορούν να υπολογιστούν λύνοντας

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = 0$$