

**ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΘΗΝΩΝ**



ATHENS UNIVERSITY
OF ECONOMICS
AND BUSINESS

**ΣΧΟΛΗ
ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ**

SCHOOL OF
BUSINESS

**ΤΜΗΜΑ
ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ &
ΧΡΗΜΑΤΟ-
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ**
DEPARTMENT OF
ACCOUNTING &
FINANCE

Γραμμική Άλγεβρα και Μαθηματικός Λογισμός για Οικονομικά και Επιχειρησιακά Προβλήματα

Ενότητα: Ολοκληρωτικός Λογισμός (μέρος 1)

Ανδριανός Ε. Τσεκρέκος

Τμήμα Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής

1. Σκοποί ενότητας	4
2. Περιεχόμενα ενότητας.....	4
3. Ολοκληρωτικός Λογισμός	5
3.1 Μέθοδοι Ολοκλήρωσης	6
3.1.1 Εφαρμόζοντας τους τύπους των βασικών ολοκληρωμάτων.....	6
3.1.2 Με αντικατάσταση και στη συνέχεια εφαρμόζοντας τους τύπους των βασικών ολοκληρωμάτων	6
3.1.3 Ολοκληρώματα Ρητών Συναρτήσεων	7
3.1.4 Ανάλυση σε απλά κλάσματα.....	7
3.1.5 Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες.....	9

1. Σκοποί ενότητας

Παρουσιάζονται θέματα Ολοκληρωτικού Λογισμού (μέρος 1) που είναι απαραίτητα για τον χρηματοοικονομικό και λογιστικό αναλυτή.

2. Περιεχόμενα ενότητας

Ολοκληρωτικός Λογισμός, Μέθοδοι Ολοκλήρωσης, Εφαρμόζοντας τους τύπους των βασικών ολοκληρωμάτων, Με αντικατάσταση και στη συνέχεια εφαρμόζοντας τους τύπους των βασικών ολοκληρωμάτων, Ολοκληρώματα Ρητών Συναρτήσεων, Ανάλυση σε απλά κλάσματα, Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες.

3. Ολοκληρωτικός Λογισμός

Θεώρημα: Μια συνάρτηση $F(x)$ είναι **αντιπαράγωγος** της συνάρτησης $f(x)$ εάν $F'(x) = f(x)$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f .

Παράδειγμα: $f(x) = x^2 + x$.

Η αντιπαράγωγος της f είναι $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$, αφού $F'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)' = x^2 + x = f(x)$.

Όμως, $G(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3\right)' = x^2 + x = f(x)$.

Θεώρημα: Έστω F μια αντιπαράγωγος της f σε ένα διάστημα Δ , τότε η συνάρτηση είναι μια αντιπαράγωγος της f στο διάστημα Δ , **αν και μόνο αν** η G είναι της μορφής:
 $G(x) = F(x) + c$ όπου c είναι μια σταθερά.

Ορισμός: Το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων μια συνάρτησης f είναι το **αόριστο ολοκλήρωμα** της f , και συμβολίζεται με $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Βασικά Ολοκληρώματα

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$.
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$.
- $\int e^x dx = e^x + c$.
- $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c, a > 0, a \neq 1$.
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$.
- $\int \cos x dx = \sin x + c$.
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + c$.
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + c$.

Βασικοί Κανόνες Ολοκλήρωσης:

1. $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$.
2. $\int af(x) dx = a \int f(x) dx$.

3.1 Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

3.1.1 Εφαρμόζοντας τους τύπους των βασικών ολοκληρωμάτων

1. $\int 4x dx = 4 \int x dx = 4 \frac{x^2}{2} + c$.
2. $\int (1 + e^x) dx = \int 1 dx + \int e^x dx = x + e^x + c$.

3.1.2 Με αντικατάσταση και στη συνέχεια εφαρμόζοντας τους τύπους των βασικών ολοκληρωμάτων

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται σε ολοκληρώματα της μορφής $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$.

Θέτουμε $u = g(x)$. Υπολογίζουμε το du , $du = g'(x) dx$. Λύνουμε το ολοκλήρωμα ως προς du και αντικαθιστούμε το u από το $g(x)$.

Παραδείγματα:

1. $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$, θέτω $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx$, άρα $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c = \ln|x^2 + 1| + c$.
2. $\int \frac{1}{x-2} dx$, θέτω $u = x - 2 \Rightarrow du = dx$, άρα $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c = \ln|x - 2| + c$.
3. $\int (x+1)^2 dx$, θέτω $u = x + 1 \Rightarrow du = dx$, άρα $\int u^2 du = \frac{u^{2+1}}{2+1} + c = \frac{(x+1)^3}{3} + c$.
4. $\int \frac{\cos^5 x - 3\cos^2 x - 7}{\cos^4 x} \sin x dx$, θέτω $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx \Rightarrow dx = -\frac{du}{\sin x}$, άρα
$$\int \frac{\cos^5 x - 3\cos^2 x - 7}{\cos^4 x} \sin x dx = -\int \frac{u^5 - 3u^2 - 7}{u^4} du = -\int \left(\frac{u^5}{u^4} - \frac{3u^2}{u^4} - \frac{7}{u^4} \right) du =$$
$$-\int \left(u - \frac{3}{u^2} - \frac{7}{u^4} \right) du = -\int (u - 3u^{-2} - 7u^{-4}) du = -\frac{u^{1+1}}{1+1} + 3\frac{u^{-2+1}}{-2+1} + 7\frac{u^{-4+1}}{-4+1} + c =$$
$$-\frac{u^2}{2} - 3u^{-1} - 7\frac{u^{-3}}{3} + c = -\frac{\cos^2 x}{2} - 3\cos x^{-1} - 7\frac{\cos^3 x^{-3}}{3} + c.$$
5. $\int x \cos(x^2 + 3) dx$, θέτω $u = x^2 + 3 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$, άρα
$$\int x \cos(x^2 + 3) dx = \frac{1}{2} \int \cos u du = \frac{1}{2} \sin u + c = \frac{1}{2} \sin(x^2 + 3) + c.$$
6. $I = \int (2x+1)e^{x^2+x} dx = e^{x^2+x} + c$.
7. $I = \int \sin^2 x \cos x dx$ θέτω $u = \sin x$ αποτέλεσμα $I = \frac{\sin^3 x}{3} + c$.
8. $I = \int \sqrt{1+x^2} 2x dx$ θέτω $u = 1+x^2$ αποτέλεσμα $I = \frac{2}{3} (1+x^2)^{3/2} + c$.
9. $I = \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$ θέτω $u = 4-x^2$ αποτέλεσμα $I = -\sqrt{4-x^2} + c$.

3.1.3 Ολοκληρώματα Ρητών Συναρτήσεων

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx.$$

- Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι < του βαθμού παρονομαστή τότε αναλύω σε απλά κλάσματα.
- Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι > του βαθμού παρονομαστή τότε κάνουμε την διαίρεση

$$\frac{f(x)}{g(x)} = p(x) + \frac{v(x)}{h(x)} \text{ και το αναλύω } \frac{v(x)}{h(x)} \text{ σε απλά κλάσματα.}$$

3.1.4 Ανάλυση σε απλά κλάσματα

Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή $g(x)$ και εάν:

1. Το $g(x)$ έχει μια πραγματική ρίζα τότε: $\frac{A}{a_1x + a_2}$.
2. Το $g(x)$ έχει μια πραγματική ρίζα με πολλαπλότητα n τότε:
$$\frac{A_1}{a_1x + a_2} + \frac{A_2}{(a_1x + a_2)^2} + \dots + \frac{A_n}{(a_1x + a_2)^n}.$$
3. Το $g(x)$ έχει ένα ζεύγος μιγαδικών ριζών: $\frac{Ax + B}{a_1x^2 + a_2x + a_3}$.
4. Το $g(x)$ έχει ένα ζεύγος μιγαδικών ριζών με πολλαπλότητα n :
$$\frac{A_1x + B_1}{a_1x^2 + a_2x + a_3} + \frac{A_2x + B_2}{(a_1x^2 + a_2x + a_3)^2} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{(a_1x^2 + a_2x + a_3)^n}.$$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{5x-3}{x^2-2x-3} dx$ (2 πραγματικές ρίζες).

Λύση:

Αναλύω το κλάσμα ως εξής $\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} \Rightarrow \dots \Rightarrow A=2, B=3$.

Άρα $I = \int \frac{5x-3}{x^2-2x-3} dx = 2 \ln |x+1| + 3 \ln |x-3| + c$.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$ (3 πραγματικές ρίζες).

Λύση:

Αναλύω το κλάσμα ως εξής $\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \Rightarrow \dots \Rightarrow A=1, B=5, C=5$.

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx = \int \frac{1}{x-1} + \frac{5}{x-3} - \frac{5}{x-2} = \ln(x-1) + 5 \ln(x-3) - 5 \ln(x-2) + c.$$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{6x+7}{(x^2+4x+4)(x+1)} dx$ (2 πραγματικές ρίζες, η μια πραγματική πολλαπλότητα 2).

Λύση:

Αναλύω το κλάσμα ως εξής $\frac{6x+7}{(x^2+4x+4)(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} \Rightarrow \dots \Rightarrow A=1, B=-1, C=5,$

άρα $I = \int \frac{6x+7}{x^2+4x+4} dx = \dots = -\frac{5}{x+2} - \ln(x+2) + \ln(x+1) + c.$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{1}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$ (2 ρίζες συζυγείς μιγαδικές και 1 ρίζα πραγματική πολλαπλότητα 2).

Λύση:

Αναλύω το κλάσμα ως εξής $\frac{1}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = 0, C = -\frac{1}{2}, D = \frac{1}{2}.$ Άρα,

$I = \int \frac{1}{(x^2+1)(x-1)^2} dx = \int -\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{2(x^2+1)} dx =$
 $-\frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + c.$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x^3-3x+2}{x^2-5x+6} dx$ (Ο βαθμός του αριθμητή μεγαλύτερος του βαθμού του παρονομαστή).

Λύση:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & -3x+2 \\ x^3 & -5x^2+6x \\ \hline 0 & 5x^2-9x+2 \\ - & 5x^2-25x+30 \\ \hline & 16x-28 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2-5x+6 \\ x+5 \end{array}, \text{ άρα } \frac{x^3-3x+2}{x^2-5x+6} = x+5 + \frac{16x-28}{x^2-5x+6}.$$

$\int \frac{x^3-3x+2}{x^2-5x+6} dx = \int \left(x+5 + \frac{16x-28}{x^2-5x+6} \right) dx = \int x dx + \int 5 dx + \int \frac{16x-28}{x^2-5x+6} dx.$

$\int \frac{16x-28}{x^2-5x+6} dx = \int \frac{16x-28}{(x-2)(x-3)} dx,$ αναλύω το $\frac{16x-28}{(x-2)(x-3)}$ σε απλά κλάσματα:

$$\frac{16x-28}{(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3} \Rightarrow \dots \Rightarrow a = -4, b = 20 \text{ \u03ac\u03c1\u03b1}$$

$$\int \frac{16x-28}{x^2-5x+6} dx = \int \frac{16x-28}{(x-2)(x-3)} dx = \int \frac{-4}{x-2} dx + \int \frac{20}{x-3} dx = -4 \ln|x-2| + 20 \ln|x-3| + c.$$

$$\text{\u039c\u03b5\u03bb\u03b9\u03ba\u03ac: } \int \frac{x^3-3x+2}{x^2-5x+6} dx = \frac{x^2}{2} + 5x - 4 \ln|x-2| + 20 \ln|x-3| + c.$$

3.1.5 \u039e\u039c\u0391\u039d\u0397\u0399\u03a3\u0397 \u039a\u0391\u03a4\u0391 \u03a0\u0391\u03a1\u0391\u0393\u0391\u039d\u0395\u03a3

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx + c.$$

\u039c\u03b5 \u03c4\u039f\u039d \u03a0\u0391\u03a1\u0391\u03a0\u0391\u039d\u0397\u0399\u03a5 \u03a4\u0399\u03a0\u039f\u039e \u039b\u0399\u03a5\u039d\u0391\u039d\u0395\u0399 \u039e\u039c\u0391\u039d\u0397\u0399\u03a1\u039c\u0391\u03a4\u0391 \u03a4\u0397\u0399\u03a3 \u039c\u039f\u03a1\u03a6\u0397\u0397:

- $\int f(x) \sin(ax+b) dx.$
- $\int f(x) \cos(ax+b) dx.$
- $\int e^{ax} \sin(ax+b) dx.$
- $\int e^{ax} \cos(ax+b) dx.$
- $\int f(x) \ln f(x) dx.$
- $\int f(x) e^{ax} dx.$
- $\int f(x) e^{ax} \sin(ax+b) dx$ (\u03b5\u03c6\u0391\u03a1\u039c\u0391\u03a1\u039c\u0391\u03a4\u0391 \u0393\u0399\u0391 $e^{ax} \sin(ax+b)$ \u03a0\u03a1\u0391\u03a5\u0391).
- $\int f(x) e^{ax} \cos(ax+b) dx$ (\u03b5\u03c6\u0391\u03a1\u039c\u0391\u03a1\u039c\u0391\u03a4\u0391 \u0393\u0399\u0391 $e^{ax} \cos(ax+b)$ \u03a0\u03a1\u0391\u03a5\u0391).

\u0391\u03a3\u039a\u0397\u0397\u0395\u0399\u03a3:

1. $I = \int x e^x dx = x e^x - e^x + c.$
2. $I = \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c.$
3. $I = \int \ln x dx = x \ln x - x + c.$
4. $I = \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c.$
5. $I = \int \frac{\ln x}{x^3} dx = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + c.$
6. $I = \int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + c.$
7. $I = \int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + c.$
8. $I = \int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c.$
9. $I = \int x \sin 2x dx = -x \frac{\cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} + c.$
10. $I = \int \ln^2 x dx = x \ln^2 x + 2(x \ln x - x) + c$ (\u0394\u0392\u0391\u039c\u0391 \u03a6\u0391\u03a1\u0391\u03a3\u0391\u03a3\u039c\u0391\u03a4\u0391).

$$11. I = \int \frac{\sin x}{e^{2x}} dx = \frac{-\cos x - 2 \sin x}{5e^{2x}} \text{ (δύο φορές παραγοντική).}$$

$$12. I = \int \sin(\ln x) dx = \frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + c \text{ (δύο φορές παραγοντική).}$$

$$13. I = \int \sin x \sin 3x dx = \frac{1}{8} \sin 3x \cos x - \frac{3}{8} \cos 3x + \sin x \text{ (δύο φορές παραγοντική).}$$

$$14. I = \int e^x \cos 2x dx = \frac{1}{5} (e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x) + c.$$

$$15. I = \int x e^x \sin x dx = \frac{1}{2} x (e^x \sin x - e^x \cos x) + \frac{1}{2} e^x \cos x + c.$$

$$16. I = \int e^{2x} \cos 3x dx.$$

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Οικονομικό Πανεπιστήμιον Αθηνών, Ανδριανός Ε. Τσεκρέκος, 2015. Ανδριανός Ε. Τσεκρέκος. «Γραμμική Άλγεβρα και Μαθηματικός Λογισμός για Οικονομικά και Επιχειρησιακά Προβλήματα». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://opencourses.aueb.gr/modules/document/?course=LOXR100>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων

- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)
μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

