Εφαρμογές Στατιστικών Μεθόδων σε Επιχειρηματικά Προβλήματα

Φροντιστήριο #7

Πολλαπλή Παλινδρόμηση

Σε πολλά πρακτικά προβλήματα η συμπεριφορά μίας μεταβλητής απόκρισης Y επηρεάζεται από πολλές μεταβλητές $X_1, X_2, X_3, \ldots$. Τα μοντέλα αυτά για τα οποία η εξαρτημένη μεταβλητή Y υποθέτουμε ότι συσχετίζεται με κ ανεξάρτητες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_\kappa$ με μία σχέση της μορφής:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_\kappa X_\kappa + \varepsilon$$

όπου,

Y = εξαρτημένη μεταβλητή,

$X_1, X_2, \ldots, X_\kappa$ = ανεξάρτητες μεταβλητές,

β_0 = σταθερά,

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\kappa$ = συντελεστές παλινδρόμησης που περιγράφουν την επίδραση των ανεξάρτητων μεταβλητών,

ε = σφάλμα ή κατάλοιπο (διαφορά πραγματικής τιμής Y της τ.μ. Y από την τιμή της Y όπως προκύπτει από το υπόδειγμα),

καλούνται μοντέλα (υποδείγματα) πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης (multiple linear regression models).

Έστω ότι στόχος μας είναι η πρόβλεψη μίας μεταβλητής απόκρισης Y μέσω των τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots, X_\kappa$. Για το σκοπό αυτό συγκεντρώνουμε δεδομένα που αφορούν τις τιμές

$x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ki}$ καθώς και την αντίστοιχη τιμή y_i της μεταβλητής απόκρισης για $i=1,2,\ldots,n$. Τα σφάλματα (ή κατάλοιπα) e_i $i=1,2,\ldots,n$ ορίζονται από τις διαφορές:

$$e_i = y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \ldots + \beta_k x_{ki}), i=1,2,\ldots,n$$

όπου e_i είναι οι παρατηρούμενες τιμές των σφαλμάτων ε_i, όταν αυτά υπολογίζεται από τις παρατηρούμενες τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots, X_k$ και της εξαρτημένης μεταβλητής Y.

Για τα σφάλματα $\varepsilon_i, i=1,\ldots,n$ κάνουμε τις ακόλουθες υποθέσεις (ανάλογες με εκείνες της απλής γραμμικής παλινδρόμησης).

1. Τα σφάλματα ε_i είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και κατανέμονται σύμφωνα με την κανονική κατανομή.
2. Οι αναμενόμενες τιμές των σφαλμάτων ε_i είναι ίσες με το μηδέν, δηλαδή $E(\varepsilon_i)=0$ $\forall i, i=1,\ldots,n$.
3. Τα σφάλματα ε_i έχουν την ίδια διακύμανση σ_ε^2 για όλες τις τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots, X_k$ (υπόθεση της ομοσκεδαστικότητας).

Στο μοντέλο πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης, θεωρούμε ότι οι πραγματικές τιμές της Y μπορούν να διαχωριστούν σε δύο συνιστώσες:

- τη συνιστώσα της Y, $E(Y)$, που οφείλεται στις συστηματικές επιδράσεις των μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots, X_K$

και

- την τυχαία συνιστώσα (κατάλοιπο) ε που ενσωματώνει όλους τους άλλους (εκτός $X_1, X_2, \ldots, X_K$) παράγοντες που "επηρεάζουν" την διαμόρφωση των τιμών της Y (και τη μεταβλητότητα αυτών των τιμών).

Δηλαδή, μπορούμε να γράψουμε:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_K X_K + \varepsilon = E(Y) + \varepsilon, \text{ όπου}$$

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_K X_K.$$

Θεωρώντας ότι η τιμή y_i μπορεί να προβλεφθεί μέσω του γραμμικού συνδυασμού:

$$\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_K X_{Ki}, i = 1, 2, \ldots, n$$

το ενδιαφέρον μας εστιάζεται στον προσδιορισμό των παραμέτρων $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_K$ έτσι ώστε το άθροισμα τετραγώνων των αποκλίσεων

$$\varepsilon_i = y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \ldots + \beta_K x_{Ki}), i = 1, \ldots, n$$

να γίνει ελάχιστο. Προκειμένου να ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα:

$$g(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_K) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \ldots + \beta_K x_{Ki}) \right]^2$$

αρκεί να λύσουμε το σύστημα που θα προκύψει, αν

Θέλουμε τις μερικές παραγώγους της $g(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k)$ ίσες με μηδέν.

Η λύση του συστήματος θα μας δώσει τις εκτιμήσεις από τα δεδομένα του δείγματος των συντελεστών πολλαπλής παλινδρόμησης, $b_0, b_1, \ldots, b_k$ για τις παραμέτρους $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$, αντίστοιχα, δηλαδή:

$\hat{\beta}_0 = b_0, \ \hat{\beta}_1 = b_1, \ldots, \hat{\beta}_k = b_k$.

Έτσι, η εξίσωση που θα προκύψει από την εκτίμηση των συντελεστών πολλαπλής παλινδρόμησης είναι η:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \ldots + b_k X_k.$$

Οι συντελεστές $b_1, b_2, \ldots, b_k$ δείχνουν τη <u>μερική</u> επίδραση που ασκούν οι ανεξάρτητες μεταβλητές στην εξαρτημένη μεταβλητή.

<u>Π.χ.</u> ο συντελεστής b_2 υποδηλώνει τη μεταβολή της Y που θα προκύψει αν η μεταβλητή X_2 μεταβληθεί κατά μία μονάδα μέτρησης της και οι άλλες μεταβλητές $X_1, X_3, \ldots, X_k$ παραμείνουν σταθερές. Άρα, ο συντελεστής b_2 μετράει τη <u>μερική επίδραση</u> της ανεξάρτητης μεταβλητής X_2. Για αυτό τον λόγο οι συντελεστές $b_1, b_2, \ldots, b_k$ καλούνται και <u>συντελεστές μερικής παλινδρόμησης</u>.

Για το μοντέλο με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές X_1, X_2 το υπόδειγμα που θα εκτιμήσουμε είναι:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2,$$ όπου

$\hat{Y}$: η εκτίμηση της $E(Y)$.

Οι αποκλίσεις μεταξύ των πραγματικών τιμών της Y και των τιμών $\hat{Y}$ είναι: $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$

ή $e_i = Y_i - (b_0 + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i})$, $i = 1, \dots, n$, όπου n είναι το μέγεθος του δείγματος. Το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων για τις n τριάδες των παρατηρήσεων ισούται με:

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} [Y_i - (b_0 + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i})]^2 = Q.$$

Αναζητούμε τις τιμές των b_0, b_1, b_2 που ελαχιστοποιούν την Q. Πρέπει να παραγωγίσουμε την Q ως προς b_0, b_1 και b_2, να εξισώσουμε τις παραγώγους με το μηδέν και να λύσουμε ως προς τις άγνωστες παραμέτρους. Θα προκύψει ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους. Το σύστημα αυτό καλείται σύστημα κανονικών εξισώσεων (normal equations).

$$\frac{\partial Q}{\partial b_0} = -2 \sum_{i=1}^{n} [Y_i - b_0 - b_1 X_{1i} - b_2 X_{2i}] = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b_1} = -2 \sum_{i=1}^{n} X_{1i} [Y_i - b_0 - b_1 X_{1i} - b_2 X_{2i}] = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b_2} = -2 \sum_{i=1}^{n} X_{2i} [Y_i - b_0 - b_1 X_{1i} - b_2 X_{2i}] = 0.$$

Ισοδύναμα,

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} Y_i &= n b_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} X_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \\
\sum_{i=1}^{n} Y_i X_{1i} &= b_0 \sum_{i=1}^{n} X_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^{n} X_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} \\
\sum_{i=1}^{n} Y_i X_{2i} &= b_0 \sum_{i=1}^{n} X_{2i} + b_1 \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} + b_2 \sum_{i=1}^{n} X_{2i}
\end{aligned}\right\} (\Sigma)$$

Η λύση του συστήματος των παραπάνω εξισώσεων με τη μέθοδο των οριζουσών δίνει τις τιμές των b_1 και b_2. Ο συντελεστής b_0 προκύπτει εύκολα από την πρώτη εξίσωση του συστήματος με απλή αντικατάσταση των τιμών b_1 και b_2.

Ένας "έξυπνος" τρόπος να προχωρήσουμε στην επίλυση του (Σ) είναι να θέσουμε: $x_{1i} = X_{1i} - \bar{X}_1$, $x_{2i} = X_{2i} - \bar{X}_2$, $y_i = Y_i - \bar{Y}$. Τότε, μπορούμε να γράψουμε:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = n b_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i = b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{2i} y_i = b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2$$

Όμως $\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} x_{1i} = \sum_{i=1}^{n} x_{2i} = 0$ άρα από τις εξισώσεις του (Σ), έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i = b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{2i} y_i = b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2$$

Με μέθοδο οριζουσών, έχουμε:

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{2i} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 \end{vmatrix}} = \frac{(\sum x_1 y)(\sum x_2^2) - (\sum x_2 y)(\sum x_1 x_2)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$\sum_{i=1}^{n} \equiv \sum$ (παραλείπουμε τον δείκτη i)

$$b_2 = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i} y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 \end{vmatrix}} = \frac{(\sum x_2 y)(\sum x_1^2) - (\sum x_1 y)(\sum x_1 x_2)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2}$$

και

$$b_0 = \overline{Y} - b_1 \overline{X}_1 - b_2 \overline{X}_2 .$$

Μέσες ελαστικότητες: (της Y ως προς X_1 και X_2):

$$\bar{\eta}_{Y|X_1} = b_1 \cdot \frac{\bar{X}_1}{\bar{Y}} = b_1 \frac{\frac{\sum X_1}{n}}{\frac{\sum Y}{n}}$$

$$\bar{\eta}_{Y|X_2} = b_2 \frac{\bar{X}_2}{\bar{Y}} = b_2 \frac{\frac{\sum X_2}{n}}{\sum Y/n}$$

Έστω Y:= μηνιαία κατανάλωση (μονάδες προϊόντος)
X_1:= μέση τιμή αγοράς (σε λεπτά)
X_2:= μέση τιμή ανταγωνιστικών προϊόντων (σε λεπτά)

Έστω ότι $\bar{\eta}_{Y|X_1} = -0.843$ και $\bar{\eta}_{Y|X_2} = 0{,}983$.

Ερμηνείες των τιμών (εδώ μετράμε τη σχέση μεταξύ των ποσοστιαίων μεταβολών των μεταβλητών).

$\bar{\eta}_{Y|X_1} \cong -0.84$. Για κάθε αύξηση της τιμής πώλησης του προϊόντος κατά 1% (με σταθερή την μέση τιμή του ανταγωνισμού), η μηνιαία ζήτηση μειώνεται κατά μέσο όρο κατά περίπου 0.84% μονάδες ανά οικογένεια.

$\bar{\eta}_{Y|X_2} \cong 0.99$. Με σταθερή την τιμή πώλησης του προϊόντος για κάθε αύξηση των τιμών των ανταγωνιστών κατά 1%, η μηνιαία ζήτηση αυξάνεται κατά μέσο όρο κατά 0.99% (περίπου) ανά οικογένεια.

δηλ. η ελαστικότητα της ζήτησης ως προς τις τιμές των ανταγωνιστών είναι σε απόλυτους όρους μεγαλύτερη από την ελαστικότητα της ζήτησης ως προς την τιμή του προϊόντος.

Παραδείγματα

(1) Θεωρούμε ότι οι μηνιαίες δαπάνες ενός πληθυσμού νοικοκυριών σε χιλ. ευρώ εξαρτώνται από τους μισθούς τους X_1 και από άλλα εισοδήματα X_2 (ενοίκια κλπ). Ένα τ.δ. $n=4$ νοικοκυριών του πληθυσμού έδωσε τα επόμενα στοιχεία:

Δαπάνες Y	Μισθοί X	Άλλα Εισοδήματα X_2
2	1	2
3	2	1
3	1	3
5	2	5

(i) Να εκτιμηθεί με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων η πολλαπλή παλινδρόμηση $E(Y)=\beta_0+\beta_1 X_1+\beta_2 X_2$ των δαπανών Y ως προς τους μισθούς X_1 και στα άλλα εισοδήματα X_2 των νοικοκυριών του πληθυσμού και να υπολογισθούν τα κατάλοιπα.

(ii) Να υπολογισθούν οι μέσες ελαστικότητες της Y ως προς τις μεταβλητές X_1 και X_2 και να ερμηνευτούν οι τιμές τους.

—

Λύση

(i) Υπολογίζουμε τους μέσους $\bar{Y} = 13/4$, $\bar{X}_1 = 1.5$, $\bar{X}_2 = 11/4$ και κατασκευάζουμε τον πίνακα υπολογισμών:

$y = Y - \bar{Y}$	$x_1 = X_1 - \bar{X}_1$	x_1^2	$x_2 = X_2 - \bar{X}_2$	x_2^2	$x_1 y$	$x_2 y$
$-5/4$	$-1/2$	$1/4$	$-3/4$	$9/16$	$5/8$	$15/16$
$-1/4$	$1/2$	$1/4$	$-7/4$	$49/16$	$-1/8$	$7/16$
$-1/4$	$-1/2$	$1/4$	$1/4$	$1/16$	$1/8$	$-1/16$
$7/4$	$1/2$	$1/4$	$9/4$	$81/16$	$7/8$	$63/16$
Αθροίσματα		1		8.75	1.5	5.25

$x_1 x_2$
$3/8$
$-7/8$
$-1/8$
$9/8$
Αθρ. 0.5

Υπολογίζουμε τους συντελεστές b_1, b_2 και b_0.

$$b_1 = \frac{(\sum x_1 y)(\sum x_2^2) - (\sum x_2 y)(\sum x_1 x_2)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$= \frac{1.5 \cdot 8.75 - 5.25 \cdot 0.5}{1 \cdot 8.75 - 0.25} = 1.235$$

$$b_2 = \frac{(\sum x_2 y)(\sum x_1^2) - (\sum x_1 y)(\sum x_1 x_2)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2) - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$= \frac{5.25 \cdot 1 - 1.5 \cdot 0.5}{1 \cdot 8.75 - 0.25} = 0.529$$ και

$$b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{X}_1 - b_2 \bar{X}_2 = 13/4 - 1.235 \cdot 1.5 - 0.529\,(11/4) =$$

$= -0.558.$

Άρα, το εκτιμώμενο υπόδειγμα πολλαπλής παλινδρόμησης από τα δεδομένα του δείγματος είναι:

$$\hat{Y} = -0.058 + 1.235 X_1 + 0.529 X_2.$$

Τα κατάλοιπα είναι:

$$e_1 = Y_1 - \hat{Y}_1 = 2 - (-0.058 + 1.235 \cdot 1 + 0.529 \cdot 2) = -0.235$$

$$e_2 = Y_2 - \hat{Y}_2 = 3 - (-0.058 + 1.235 \cdot 2 + 0.529 \cdot 1) = 0.059$$

$$e_3 = Y_3 - \hat{Y}_3 = 3 - (-0.058 + 1.235 \cdot 1 + 0.529 \cdot 3) = 0.235$$

$$e_4 = Y_4 - \hat{Y}_4 = 5 - (-0.058 + 1.235 \cdot 2 + 0.529 \cdot 5) = -0.059$$

Παρατηρούμε ότι, όπως αναμενόταν $\sum_{i=1}^{4} e_i = 0.$

Ερμηνεία των συντελεστών της παλινδρόμησης:

$b_1 = 1.235$. Για κάθε αύξηση κατά 1000 ευρώ των μισθών των νοικοκυριών και με αμετάβλητά τα υπόλοιπα εισοδήματα των οικογενειών (π.χ. ενοίκια κλπ) οι μηνιαίες δαπάνες αυξάνονται κατά μέσο όρο κατά περίπου 1235 ευρώ ανά νοικοκυριό.

$b_2 = 0.529$. Για κάθε αύξηση κατά 1000 ευρώ των υπόλοιπων εισοδημάτων των νοικοκυριών και με σταθερούς τους μισθούς τους, οι μηνιαίες δαπάνες των νοικοκυριών αυξάνονται κατά μέσο όρο κατά περίπου 529 ευρώ ανά νοικοκυριό.

(ii) Υπολογίζουμε τις μέσες ελαστικότητες:

$$\bar{\eta}_{Y|X_1} = b_1 \frac{\bar{X}_1}{\bar{Y}} = 1.235 \cdot \frac{1.5}{13/4} = 1.235 \cdot \frac{1.5}{3.25} = 0.57$$

και

$$\bar{\eta}_{Y|X_2} = b_2 \cdot \frac{\bar{X}_2}{\bar{Y}} = 0.529 \cdot \frac{11/4}{13/4} = 0.4476$$

Ερμηνείες:

$\bar{\eta}_{Y|X_1} = 0.57$. Για κάθε αύξηση κατά 1% των μισθών των νοικοκυριών με σταθερά τα εισοδήματα από άλλες πηγές οι μηνιαίες δαπάνες των νοικοκυριών αναμένεται να αυξηθούν κατά 0.57% ανά νοικοκύριο.

$\bar{\eta}_{Y|X_2} = 0.4476$. Για κάθε αύξηση κατά 1% των εισοδημάτων των νοικοκυριών από άλλες πηγές και με αμετάβλητους τους μισθούς τους, οι μηνιαίες δαπάνες των νοικοκυριών αναμένεται να αυξηθούν κατά 0.45% περίπου ανά νοικοκυριό. Σε απόλυτους όρους, η μέση ελαστικότητα των μηνιαίων δαπανών ως προς τους μισθούς είναι μεγαλύτερη από τη μέση ελαστικότητα των μηνιαίων δαπανών ως προς τα εισοδήματά τους από άλλες πηγές.

② Στον πίνακα περιέχονται δεδομένα που συγκεντρώθηκαν από 10 οικογένειες:

Y	X_1	X_2
32	30	2
18	20	4
52	50	2
6	10	5
42	40	3
48	60	9
80	90	8
32	30	7
52	50	2
68	70	4

όπου

Y: = μέση μηνιαία κατανάλωση ενός αγαθού (σε κιλά) ανά οικογένεια

X_1: = μέσο μηνιαίο οικογενειακό εισόδημα (σε εκατοντάδες ευρώ)

X_2: = τιμή πώλησης του αγαθού (σε εκατοντάδες ευρώ).

Δίνονται: $\sum Y = 430$, $\sum X_1 = 450$

$\sum X_2 = 46$, $\sum YX_1 = 24.060$, $\sum YX_2 = 2.068$

$\sum X_1X_2 = 2.260$, $\sum Y^2 = 22.908$, $\sum X_1^2 = 25.500$

$\sum X_2^2 = 272$, $n = 10$, $\bar{Y} = 43$, $\bar{X}_1 = 45$, $\bar{X}_2 = 4.6$

Μετά από τους κατάλληλους υπολογισμούς, η εξίσωση πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης είναι:

$$\hat{Y} = 7,074 + 0,952X_1 - 1,503X_2$$

$b_1 = 0,952$. Αν αυξηθεί το οικογενειακό εισόδημα X_1 κατά 100 ευρώ τότε η κατανάλωση του αγαθού αναμένεται να αυξηθεί κατά μέσο όρο (περίπου) κατά 0,952 του κιλού (με σταθερή την τιμή πώλησης).

$b_2 = -1,503$. Αν αυξηθεί η τιμή του αγαθού κατά 100 ευρώ τότε η κατανάλωση του αγαθού αναμένεται να μειωθεί κατά μέσο όρο (περίπου) κατά 1,503 κιλά (με σταθερό το μέσο μηνιαίο εισόδημα).

Οι συντελεστές μερικής ελαστικότητας της Y ως προς X_1 και X_2 (μέσες ελαστικότητες) είναι:

$$\bar{\eta}_{Y|X_1} = b_1 \cdot \frac{\bar{X}_1}{\bar{Y}} = 0,952 \cdot \frac{45}{43} = 0,99 \text{ και}$$

$$\bar{\eta}_{Y|X_2} = b_2 \cdot \frac{\bar{X}_2}{\bar{Y}} = -1,503 \cdot \frac{4,6}{43} = -0,16$$

δηλ. αύξηση του εισοδήματος κατά 1% αναμένεται να επιφέρει αύξηση της κατανάλωσης κατά 0,99% ενώ αύξηση της τιμής πώλησης του αγαθού κατά 1% θα επιφέρει (αναμένεται να επιφέρει) μείωση της ζητούμενης ποσότητας του αγαθού κατά 0,16%.