

Παρουσίαση

βασισμένη στο βιβλίο

**Στατιστική
Τόμος Α**

ΤΩΝ

Βασίλη Αγγελή & Κατερίνας Δημάκη

Αθήνα, 2011

7. Εκτίμηση Παραμέτρων Πληθυσμού

Το πρόβλημα της εκτίμησης παραμέτρων ενός υπό μελέτη πληθυσμού είναι ιδιαίτερα συνηθισμένο. Ο απλούστερος τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος είναι να επιλέξουμε ένα τυχαίο δείγμα και να εκτιμήσουμε την άγνωστη παράμετρο του πληθυσμού μέσω της τιμής της αντίστοιχης στατιστικής συνάρτησης που υπολογίζεται από το δείγμα. Η στατιστική συνάρτηση την οποία χρησιμοποιούμε για να εκτιμήσουμε την άγνωστη παράμετρο ονομάζεται **εκτιμήτρια**. Είναι προφανές ότι η εκτιμήτρια είναι μία τυχαία μεταβλητή. Η αριθμητική τιμή της εκτιμήτριας για κάθε συγκεκριμένο δείγμα ονομάζεται **εκτίμηση** της παραμέτρου. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουμε μία **σημειακή εκτίμηση** της άγνωστης παραμέτρου του πληθυσμού.

Είναι, βέβαια, φανερό ότι η εκτίμηση αυτή θα διαφέρει, γενικά, από την πραγματική τιμή της παραμέτρου.

Ιδιότητες των σημειακών εκτιμητριών

Στην προσπάθεια εύρεσης σημειακής εκτίμησης μιας παραμέτρου είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε περισσότερες της μιας εκτιμήτριες. Αν, για παράδειγμα, θέλουμε να εκτιμήσουμε τον μέσο ενός πληθυσμού, θα πρέπει να αποφασίσουμε αν θα χρησιμοποιήσουμε ως εκτιμήτρια συνάρτηση το δειγματικό μέσο ή τη δειγματική διάμεσο.

Είναι προφανές, κατά συνέπεια, η αναγκαιότητα θέσπισης ορισμένων «κριτηρίων» τα οποία οδηγούν στην επιλογή μιας «καλής» εκτιμήτριας.

Μερικές από τις επιθυμητές ιδιότητες μιας εκτιμήτριας είναι η **αμεροληψία**, η **αποτελεσματικότητα**, η **συνέπεια** και η **επάρκεια**. Σε ορισμένες από τις ιδιότητες αυτές θα αναφερθούμε με απλά λόγια, παραθέτοντας και αντιπροσωπευτικά παραδείγματα.

Μια εκτιμήτρια θα ονομάζεται **αμερόληπτη** αν η αναμενόμενη τιμή της είναι ίση με την παράμετρο του πληθυσμού την οποία θέλουμε να εκτιμήσουμε. Αν
δηλαδή

Ο **δειγματικός μέσος είναι** αμερόληπτη εκτιμήτρια του μέσου μ του
πληθυσμού.

Η **δειγματική διακύμανση δεν είναι** αμερόληπτη εκτιμήτρια της διακύμανσης
του πληθυσμού.

Η ιδιότητα της αμεροληψίας δεν αρκεί για να διασφαλίσει την επιλογή μιας «καλής» εκτιμήτριας. Σε αρκετές, μάλιστα, περιπτώσεις μπορεί να προσδιοριστούν περισσότερες από μία αμερόληπτες εκτιμήτριες της υπό μελέτη πληθυσμιακής παραμέτρου. Επιπλέον, η αμεροληψία μιας εκτιμήτριας δεν μας παρέχει πληροφορίες σχετικές με τη διασπορά της κατανομής της. Μια αμερόληπτη εκτιμήτρια με μεγάλη διακύμανση δεν είναι επιθυμητή, όπως επίσης δεν είναι επιθυμητή μια εκτιμήτρια με πολύ μικρή διακύμανση, η οποία όμως είναι μεροληπτική. Οδηγούμαστε, λοιπόν, στο συμπέρασμα ότι μεταξύ των αμερόληπτων εκτιμητριών περισσότερο επιθυμητή είναι εκείνη που έχει τη μικρότερη διακύμανση. Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στην ιδιότητα της αν, αφενός, είναι αμερόληπτη και, αφετέρου, έχει τη μικρότερη διακύμανση από οποιαδήποτε άλλη αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου.

Έστω δύο εκτιμήτριες μιας παραμέτρου του πληθυσμού οι οποίες προέρχονται από ισομεγέθη δείγματα και οι οποίες είναι και οι δύο αμερόληπτες. Θα λέμε ότι **σχετικά πιο αποτελεσματική** είναι εκείνη η οποία έχει τη μικρότερη διακύμανση.

Μια άλλη σημαντική ιδιότητα μιας «καλής» εκτιμήτριας είναι η **συνέπεια**. Η ιδιότητα αυτή είναι **ασυμπτωτική**, περιγράφει δηλαδή τον τρόπο που μεταβάλλονται βασικά χαρακτηριστικά της κατανομής της εκτιμήτριας, καθώς μεταβάλλεται το μέγεθος του δείγματος. Μια εκτιμήτρια λέγεται **συνεπής** αν η πιθανότητα να έχουμε από το δείγμα εκτίμηση που να είναι **αρκετά κοντά** στην άγνωστη τιμή της παραμέτρου αυξάνεται καθώς το μέγεθος του δείγματος γίνεται μεγαλύτερο.

Η τελευταία ιδιότητα μιας «καλής» εκτιμήτριας, στην οποία θα αναφερθούμε, είναι η **επάρκεια**. Μια εκτιμήτρια ονομάζεται **επαρκής** για την παράμετρο ενός πληθυσμού αν χρησιμοποιεί όλες τις πληροφορίες που περιέχονται στο δείγμα σχετικά με την υπό μελέτη παράμετρο.

Προκειμένου να προσδιορίσουμε μια «καλή» εκτιμήτρια, είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε μια κατάλληλη μέθοδο. Οι πιο γνωστές μέθοδοι προσδιορισμού εκτιμητριών είναι η **μέθοδος των ροπών**, η **μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας** και η **μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων**.

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΕΝΟΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ

Η σημειακή εκτίμηση είναι ένας συνηθισμένος τρόπος εκτίμησης παραμέτρων, ο οποίος όμως αφήνει αναπάντητα αρκετά ερωτήματα. Για παράδειγμα, δεν καθορίζει, μεταξύ άλλων, το βαθμό πληροφόρησης στον οποίο βασίζονται η εκτίμηση και το πιθανό μέγεθος του σφάλματος που εμπεριέχει. Οδηγούμαστε, λοιπόν, στο συμπέρασμα ότι είναι προτιμότερο να εκτιμηθεί η υπό μελέτη παράμετρος όχι σημειακά

αλλά με ένα **«φάσμα πιθανών τιμών»**.

Η στατιστική αυτή μεθοδολογία ονομάζεται μέθοδος εκτίμησης παραμέτρων με **διαστήματα εμπιστοσύνης**.

Ένα διάστημα εμπιστοσύνης της παραμέτρου θ είναι ένα διάστημα της μορφής $\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2$, όπου $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ είναι τιμές κατάλληλων μεταβλητών $\hat{\Theta}_1$ και $\hat{\Theta}_2$. Με τον όρο «κατάλληλες μεταβλητές» εννοούμε εκείνες των οποίων οι τιμές ικανοποιούν τη σχέση $P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) = 1 - \alpha$, όπου $(1 - \alpha)$ είναι προκαθορισμένη πιθανότητα.

Για συγκεκριμένη τιμή της $(1 - \alpha)$ το $\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2$ ονομάζεται ένα $(1 - \alpha)100\%$

διάστημα εμπιστοσύνης.

Το $(1 - \alpha)$ ονομάζεται **βαθμός εμπιστοσύνης**, τα άκρα $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ του διαστήματος ονομάζονται αντίστοιχα **κατώτερο και ανώτερο όριο εμπιστοσύνης**,

το δε α **επίπεδο σημαντικότητας**.

Έτσι, όταν το επίπεδο σημαντικότητας είναι $\alpha = 0.05$, τότε ο βαθμός εμπιστοσύνης είναι 0.95 και προκύπτει ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης.

Διαστήματα εμπιστοσύνης για τον μέσο πληθυσμού

α. Πληθυσμός κανονικός με γνωστή διακύμανση

Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε τον μέσο μ ενός κανονικού πληθυσμού. Ας υποθέσουμε ότι η διακύμανση σ^2 του υπό μελέτη πληθυσμού είναι γνωστή.

Τα άκρα του $(1-\alpha)100\%$ διαστήματος εμπιστοσύνης για τον μέσο μ ενός κανονικού πληθυσμού με γνωστή διακύμανση σ^2 είναι τα

$$\left(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma_{\bar{X}}, \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma_{\bar{X}} \right)$$

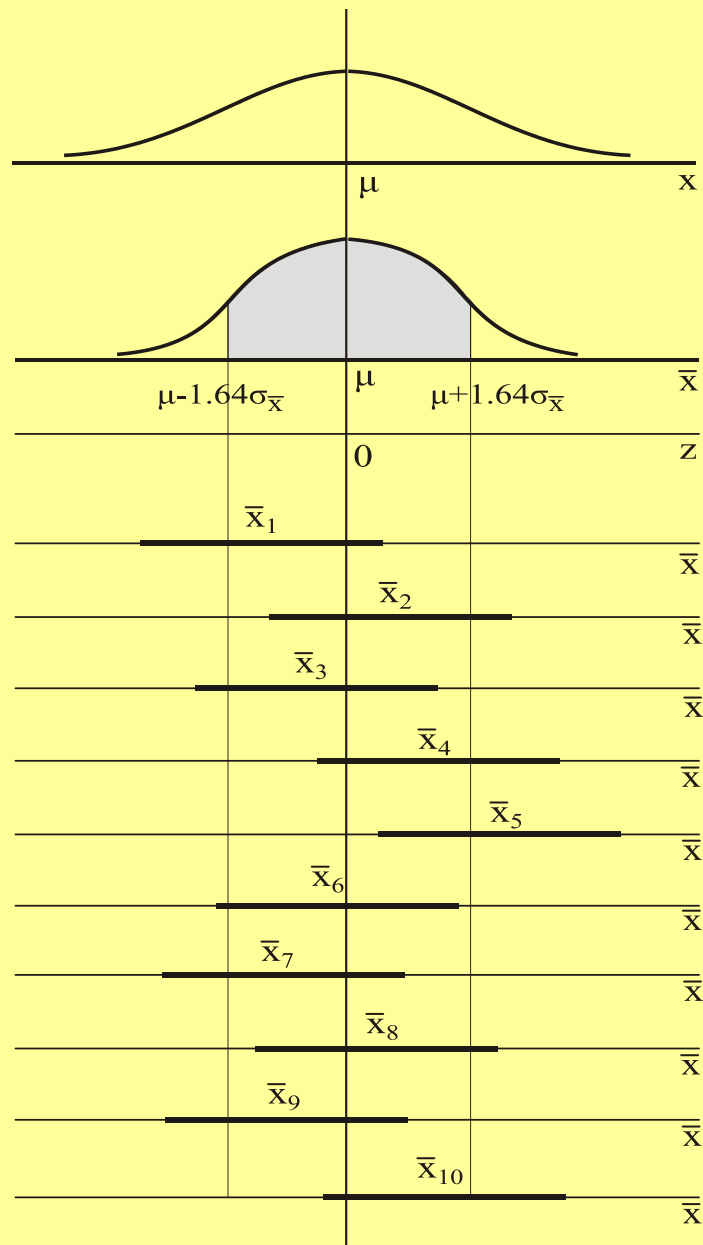
όπου

$$\sigma_{\bar{X}} = \sigma / \sqrt{n}$$

είναι το τυπικό σφάλμα εκτίμησης του μέσου.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το διάστημα εμπιστοσύνης που κατασκευάσαμε, είναι συμμετρικό ως προς τη σημειακή εκτίμηση. Αυτό δεν είναι απαραίτητο να συμβαίνει σε όλες τις περιπτώσεις. Θα πρέπει, όμως, να σημειωθεί ότι τα συμμετρικά διαστήματα εμπιστοσύνης είναι τα μικρότερα δυνατά, στην περίπτωση τουλάχιστον των συμμετρικών κατανομών και αυτό είναι ιδιαίτερα επιθυμητό.

Ερμηνεία του διαστήματος εμπιστοσύνης: Αν $\bar{x}$ η τιμή του δειγματικού μέσου $\bar{X}$, η οποία προκύπτει από συγκεκριμένο δείγμα, τότε εκτιμούμε το διάστημα εμπιστοσύνης ως $(\bar{x} - Z_{1-\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}, \bar{x} + Z_{1-\alpha/2} \sigma_{\bar{X}})$. Αυτό θα περιέχει την πραγματική τιμή της άγνωστης παραμέτρου μ με βαθμό εμπιστοσύνης $1-\alpha$. Με απλά λόγια, αν προβούμε σε ανεξάρτητες λήψεις δειγμάτων μεγέθους n από τον υπό μελέτη πληθυσμό, τότε το $(1-\alpha)100\%$ των διαστημάτων που θα κατασκευάσουμε θα περιέχει την πραγματική τιμή της άγνωστης παραμέτρου



Ερμηνεία του 90% διαστήματος εμπιστοσύνης για το μ

Το Σχήμα δίνει παραστατικά την έννοια του διαστήματος εμπιστοσύνης. Συγκεκριμένα, απεικονίζεται αφενός μεν η πληθυσμιακή κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ αφετέρου δε η κατανομή του δειγματικού μέσου $\bar{X}$ η οποία, όπως γνωρίζουμε, είναι επίσης κανονική με τον ίδιο μέσο αλλά με μικρότερη διακύμανση, δηλαδή $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$. Στο ίδιο σχήμα απεικονίζεται επίσης η θέση δέκα 90% διαστημάτων εμπιστοσύνης για το μ . Δεδομένου ότι $1 - \alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.10$ και από τον Πίνακα 4 της τυποποιημένης κανονικής κατανομής βρίσκουμε ότι: $Z_{1-\alpha/2} = Z_{0.95} = 1.64$. Παρατηρούμε ότι το 90% των σχηματισθέντων διαστημάτων (δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση τα 9 από τα 10) περιέχουν την παράμετρο μ του υπό μελέτη πληθυσμού.

Παράδειγμα Ένα μηχάνημα κατασκευάζει μπαταρίες για ειδικές χρήσεις των οποίων ο χρόνος ζωής ακολουθεί, σύμφωνα με τις τεχνικές προδιαγραφές του μηχανήματος, κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση 3 ώρες. Επειδή στις χρήσεις για τις οποίες προορίζονται οι μπαταρίες ο χρόνος ζωής τους είναι ιδιαίτερα κρίσιμος, η λειτουργία του μηχανήματος παρακολουθείται συνεχώς με δειγματοληπτικό έλεγχο του χρόνου ζωής των παραγόμενων μπαταριών. Από τυχαίο δείγμα 9 μπαταριών διαπιστώνεται ότι οι χρόνοι ζωής τους (σε ώρες) είναι:

16 18 22 20 21 20 16 22 25

Με τη βοήθεια της πληροφορίας αυτής να εκτιμηθεί ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο χρόνο ζωής του συνόλου των παραγόμενων μπαταριών.

Λύση

Για να σχηματίσουμε το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο χρόνο ζωής των μπαταριών, θα εφαρμόσουμε το γνωστό τύπο.

Εύκολα βρίσκουμε ότι η τιμή του δειγματικού μέσου είναι

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^9 x_i}{9} = 20 \text{ ώρες.}$$

Το τυπικό σφάλμα εκτίμησης του μέσου είναι $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1$.

Στην προκειμένη περίπτωση $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$ και κατά συνέπεια από τον Πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής βρίσκουμε ότι $Z_{1-\alpha/2} = Z_{0.975} = 1.96$.

Επομένως, τα άκρα του 95% διαστήματος εμπιστοσύνης για το μέσο χρόνο ζωής των μπαταριών είναι 18.04 ώρες και 21.96 ώρες.

Διαστήματα εμπιστοσύνης για τον μέσο πληθυσμού

β. Πληθυσμός κανονικός με άγνωστη διακύμανση

Τα άκρα του $(1-\alpha)100\%$ διαστήματος εμπιστοσύνης για τον μέσο μ ενός κανονικού πληθυσμού με άγνωστη διακύμανση είναι τα

$$\left(\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} S_{\bar{X}}, \bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} S_{\bar{X}} \right)$$

όπου

$$S_{\bar{X}} = S/\sqrt{n}$$

είναι το τυπικό σφάλμα εκτίμησης του δειγματικού μέσου

Παράδειγμα Ένα μηχάνημα κατασκευάζει μπαταρίες για ειδικές χρήσεις των οποίων ο χρόνος ζωής ακολουθεί, σύμφωνα με τις τεχνικές προδιαγραφές του μηχανήματος, κανονική κατανομή. Επειδή στις χρήσεις για τις οποίες προορίζονται οι μπαταρίες ο χρόνος ζωής τους είναι ιδιαίτερα κρίσιμος, η λειτουργία του μηχανήματος παρακολουθείται συνεχώς με δειγματοληπτικό έλεγχο του χρόνου ζωής των παραγόμενων μπαταριών. Από τυχαίο δείγμα 9 μπαταριών διαπιστώνεται ότι οι χρόνοι ζωής τους (σε ώρες) είναι:

16 18 22 20 21 20 16 22 25

Με τη βοήθεια της πληροφορίας αυτής να εκτιμηθεί ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο χρόνο ζωής του συνόλου των παραγόμενων μπαταριών.

Λύση

Για να προσδιορίσουμε τα άκρα ενός 95% διαστήματος εμπιστοσύνης για το μέσο χρόνο ζωής των μπαταριών, θα εφαρμόσουμε τον αντίστοιχο τύπο.

Εύκολα βρίσκουμε ότι η τιμή του δειγματικού μέσου είναι

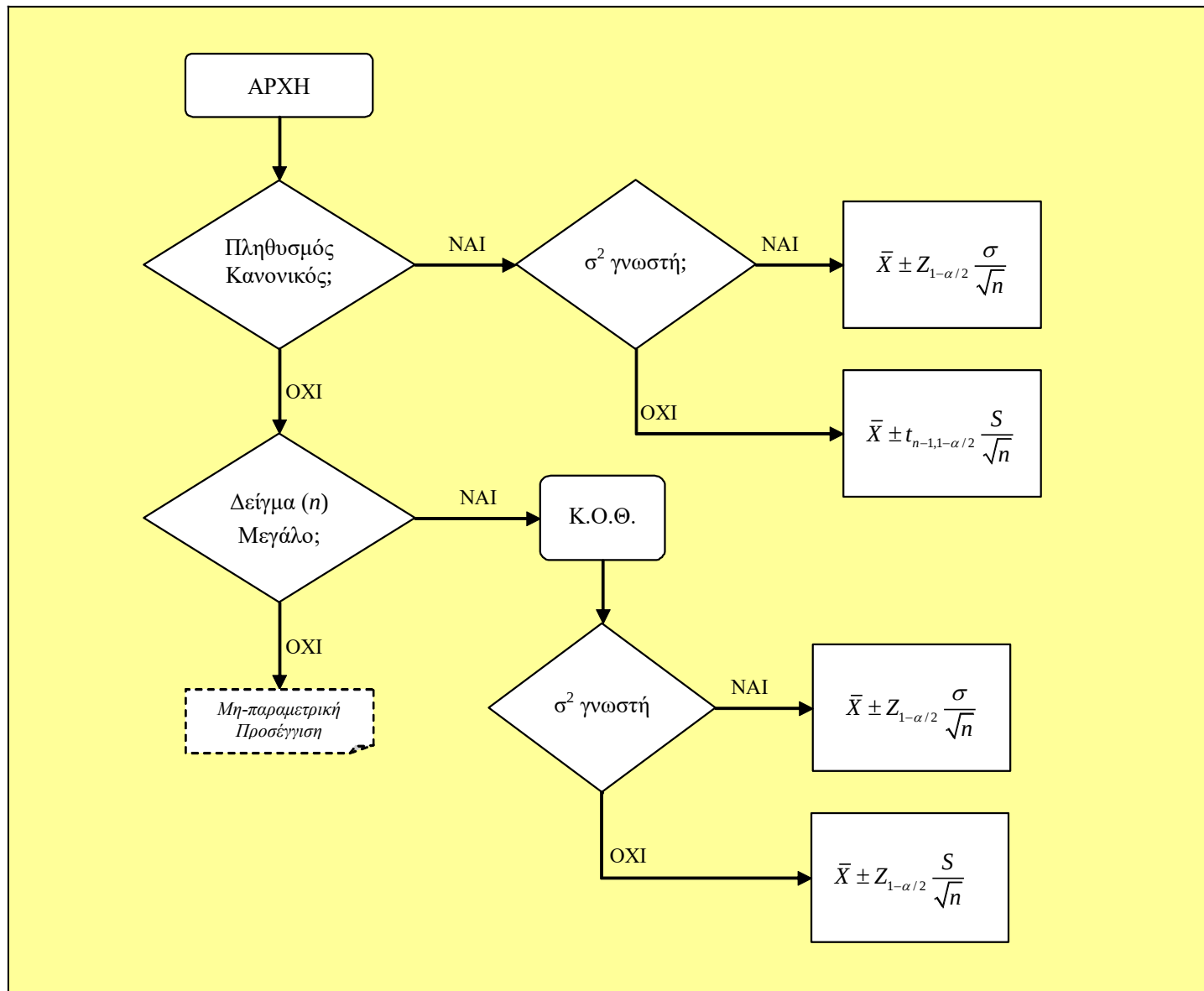
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^9 x_i}{9} = 20 \text{ ώρες.}$$

Δεδομένου ότι η πληθυσμιακή διακύμανση είναι άγνωστη, θα πρέπει να εκτιμηθεί από το δείγμα. Εύκολα προκύπτει ότι η δειγματική τυπική απόκλιση είναι $s = 2.958$ ώρες και, κατά συνέπεια, το τυπικό σφάλμα εκτίμησης του μέσου είναι $s_{\bar{x}} = 0.986$.

Στην προκειμένη περίπτωση $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$ και $\nu = n - 1 = 9 - 1 = 8$. Κατά συνέπεια, από τον των ποσοστιαίων σημείων της κατανομής t βρίσκουμε ότι

$$t_{n-1, 1-\alpha/2} = t_{8, 0.975} = 2.306.$$

Επομένως, τα άκρα του 95% διαστήματος εμπιστοσύνης για το μέσο χρόνο ζωής του συνόλου των παραγόμενων μπαταριών είναι, 17.726 ώρες και 22.274 ώρες.



Συνοπτική παρουσίαση διαστημάτων εμπιστοσύνης για τον μέσο πληθυσμού

Διαστήματα εμπιστοσύνης για το ποσοστό

Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το πραγματικό ποσοστό p των μονάδων του πληθυσμού που παρουσιάζουν μια συγκεκριμένη ιδιότητα. Θα χρησιμοποιήσουμε το αντίστοιχο δειγματικό ποσοστό $\hat{p} = X / n$, όπου X οι μονάδες του δείγματος (μεγέθους n) που έχουν τη συγκεκριμένη ιδιότητα.

Για μεγάλα δείγματα, σύμφωνα με τα όσα έχουν αναφερθεί ισχύει:

$$\frac{\hat{p} - p}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1).$$

Όταν το p του πληθυσμού είναι άγνωστο, τότε άγνωστο είναι και το $\sigma_{\hat{p}}^2$ και θα πρέπει να

$$\text{εκτιμηθεί από την } \hat{\sigma}_{\hat{p}}^2 = \frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}.$$

Τα άκρα ενός $(1 - \alpha)100\%$ διαστήματος εμπιστοσύνης για το p είναι, κατά προσέγγιση, τα

$$\left(\hat{p} - Z_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_{\hat{p}}, \hat{p} + Z_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_{\hat{p}} \right)$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \quad (\hat{q} = 1 - \hat{p})$$

είναι το τυπικό σφάλμα εκτίμησης του ποσοστού.

Παράδειγμα Ο υπεύθυνος ποιοτικού ελέγχου μιας εταιρείας θέλει να εκτιμήσει το ποσοστό των ελαττωματικών συσκευασιών. Για το λόγο αυτόν επιλέγει ένα τυχαίο δείγμα 200 συσκευασιών και διαπιστώνει ότι 11 από αυτές ήταν ελαττωματικές. Να εκτιμηθεί ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το ποσοστό των ελαττωματικών συσκευασιών.

Λύση

Δίνεται ότι $n = 200$ και $X = 11$. Το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο.

Παρατηρούμε ότι $\hat{p} = 11/200 = 0.055$ και $\hat{q} = 0.945$, επομένως το τυπικό σφάλμα εκτίμησης του ποσοστού είναι:

$$\hat{\sigma}_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{(0.055)(0.945)}{200}} = 0.016.$$

Στην προκειμένη περίπτωση $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$ και, κατά συνέπεια, από τον Πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής προκύπτει ότι $Z_{1-\alpha/2} = Z_{0.975} = 1.96$.

Επομένως, τα άκρα του 95% διαστήματος εμπιστοσύνης για το ποσοστό των ελαττωματικών συσκευασιών είναι 0.023 και 0.086. Δηλαδή, με πιθανότητα 95%, το ποσοστό των ελαττωματικών συσκευασιών βρίσκεται μεταξύ 2.3% και 8.6%.

Διαστήματα εμπιστοσύνης για τη διακύμανση κανονικού πληθυσμού

Τα άκρα ενός $(1-\alpha)100\%$ διαστήματος εμπιστοσύνης για το σ^2 είναι :

.

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{X_{1-\alpha/2, n-1}^2}, \frac{(n-1)S^2}{X_{\alpha/2, n-1}^2} \right)$$

Να σημειώσουμε ότι στην ανάλυση που απαιτήθηκε η μέση τιμή του υπό μελέτη κανονικού πληθυσμού ήταν άγνωστη και εκτιμήθηκε μέσω του δειγματικού μέσου $\bar{X}$. Η περίπτωση αυτή είναι η συνηθέστερη.

Παράδειγμα Μετρήσαμε το βάρος τυχαίου δείγματος $n=29$ συσκευασιών και βρήκαμε ότι ο μεν δειγματικός μέσος του βάρους είναι 589.9 gr, η δε δειγματική διακύμανση του βάρους είναι 89.9. Να εκτιμηθεί ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διακύμανση του βάρους όλων των προϊόντων απ' όπου προέρχεται το δείγμα.

Λύση

Δίνεται ότι $S^2 = 89,9$. Στην προκειμένη περίπτωση $1-\alpha = 0,90 \Rightarrow \alpha = 0,10$ και $\nu = n-1 = 29-1 = 28$. Κατά συνέπεια, από τον Πίνακα 6 του Προσαρτήματος ο οποίος περιέχει τα ποσοστιαία σημεία της κατανομής χ^2 , βρίσκουμε, στους 28 βαθμούς ελευθερίας, ότι $\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{28, 0.95} = 41.34$ και $\chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{28, 0.05} = 16.93$.

Επομένως, τα άκρα του 90% διαστήματος εμπιστοσύνης για τη διακύμανση του βάρους είναι 60.89 και 148.68.

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΔΥΟ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ

Διαστήματα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων δύο πληθυσμών

α. Κανονικοί πληθυσμοί με γνωστές διακυμάνσεις. Δείγματα ανεξάρτητα

Έστω δύο κανονικοί πληθυσμοί οι οποίοι περιγράφονται από τις τυχαίες μεταβλητές X και Y , δηλαδή, $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ και $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ και έστω ότι οι διακυμάνσεις τους σ_X^2 και σ_Y^2 είναι γνωστές. Θέλουμε να συγκρίνουμε τους μέσους των δύο πληθυσμών. Η σύγκριση θα γίνει με την κατασκευή διαστήματος εμπιστοσύνης για τη διαφορά $\mu_X - \mu_Y$. Για το σκοπό αυτόν θεωρούμε δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα $X_1, X_2, \dots, X_n$ και $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ μεγέθους n και m αντίστοιχα από τους πληθυσμούς αυτούς.

Τα άκρα του $(1-\alpha)100\%$ διαστήματος εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων $\mu_X - \mu_Y$ δύο κανονικών πληθυσμών με γνωστές διακυμάνσεις είναι

$$\left((\bar{X} - \bar{Y}) - Z_{1-\alpha/2} \sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}, (\bar{X} - \bar{Y}) + Z_{1-\alpha/2} \sigma_{\bar{X}-\bar{Y}} \right)$$

$$\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{\sigma_X^2 / n + \sigma_Y^2 / m}$$

είναι το τυπικό σφάλμα εκτίμησης της διαφοράς των μέσων στην περίπτωση αυτή.

β. Κανονικοί πληθυσμοί με άγνωστες και ίσες διακυμάνσεις. Δείγματα ανεξάρτητα

Τα άκρα του $(1-\alpha)100\%$ διαστήματος εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων $\mu_X - \mu_Y$ δύο κανονικών πληθυσμών με άγνωστες αλλά ίσες διακυμάνσεις είναι

$$\left((\bar{X} - \bar{Y}) - t_{1-\alpha/2, n+m-2} S_{\bar{X}-\bar{Y}}, (\bar{X} - \bar{Y}) + t_{1-\alpha/2, n+m-2} S_{\bar{X}-\bar{Y}} \right)$$

όπου

$$S_{\bar{X}-\bar{Y}} = S_p \sqrt{1/n + 1/m}$$

είναι το τυπικό σφάλμα εκτίμησης της διαφοράς των μέσων στην περίπτωση αυτή και

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2}{n+m-2}$$

η συνδυασμένη διακύμανση

γ. Κανονικοί πληθυσμοί με άγνωστες και άνισες διακυμάνσεις. Δείγματα ανεξάρτητα

Τα άκρα του $(1-\alpha)100\%$ διαστήματος εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων $\mu_X - \mu_Y$ δύο κανονικών πληθυσμών με άγνωστες και άνισες διακυμάνσεις είναι:

$$\left((\bar{X} - \bar{Y}) - t_{1-\alpha/2, n+m-2} S_{\bar{X}-\bar{Y}}, (\bar{X} - \bar{Y}) + t_{1-\alpha/2, n+m-2} S_{\bar{X}-\bar{Y}} \right)$$

όπου

$$S_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{S_X^2 / n + S_Y^2 / m}$$

είναι το τυπικό σφάλμα εκτίμησης της διαφοράς των μέσων στην περίπτωση αυτή.

Οι βαθμοί ελευθερίας, της κατανομής t , στην περίπτωση αυτή δίνονται από τη σχέση

$$\nu \cong \frac{\left(\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m} \right)^2}{\frac{(S_X^2/n)^2}{n-1} + \frac{(S_Y^2/m)^2}{m-1}}$$

δ. Μη κανονικοί πληθυσμοί με γνωστές ή άγνωστες διακυμάνσεις

Βλέπε Πίνακα με τη συνοπτική παρουσίαση

ε. Κανονικοί πληθυσμοί. Δείγματα εξαρτημένα (ζεύγη)

Υπάρχουν περιπτώσεις που οι παρατηρήσεις του ενός δείγματος δεν είναι ανεξάρτητες από τις παρατηρήσεις στο άλλο δείγμα. Η εξάρτηση μπορεί να εμφανιστεί είτε διότι οι παρατηρήσεις στα δύο δείγματα έχουν επιλεγεί κατά ζεύγη με βάση κάποιο χαρακτηριστικό είτε διότι έχουμε επαναλαμβανόμενες παρατηρήσεις πάνω στα ίδια άτομα ή στοιχεία. Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις θα έχουμε δύο σειρές μετρήσεων $X_1, X_2, \dots, X_n$ και $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$.

Δοθέντος, όμως, ότι τα δείγματα δεν θα είναι ανεξάρτητα, θεωρούμε ότι έχουμε n ζευγάρια παρατηρήσεων (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. Και στη συνέχεια δημιουργούμε τις διαφορές των παρατηρήσεων $D_i = X_i - Y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Κατά συνέπεια, η μεταβλητή που χρησιμοποιείται για την μελέτη του προβλήματος είναι η διαφορά των τιμών των παρατηρήσεων και όχι αυτές καθαυτές οι παρατηρήσεις. Καταλήγουμε, δηλαδή, τελικά σε ένα πρόβλημα n παρατηρήσεων $D_1, D_2, \dots, D_n$, οπότε η ανάλυσή τους θα είναι ουσιαστικά αντίστοιχη με εκείνη που αναφέρεται σε ένα μόνο δείγμα.

Τα άκρα ενός $(1-\alpha)100\%$ διαστήματος εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων δύο πληθυσμών $\mu_X - \mu_Y$ με βάση δύο εξαρτημένα δείγματα είναι τα

$$\left(\bar{D} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} S_{\bar{D}}, \bar{D} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} S_{\bar{D}} \right)$$

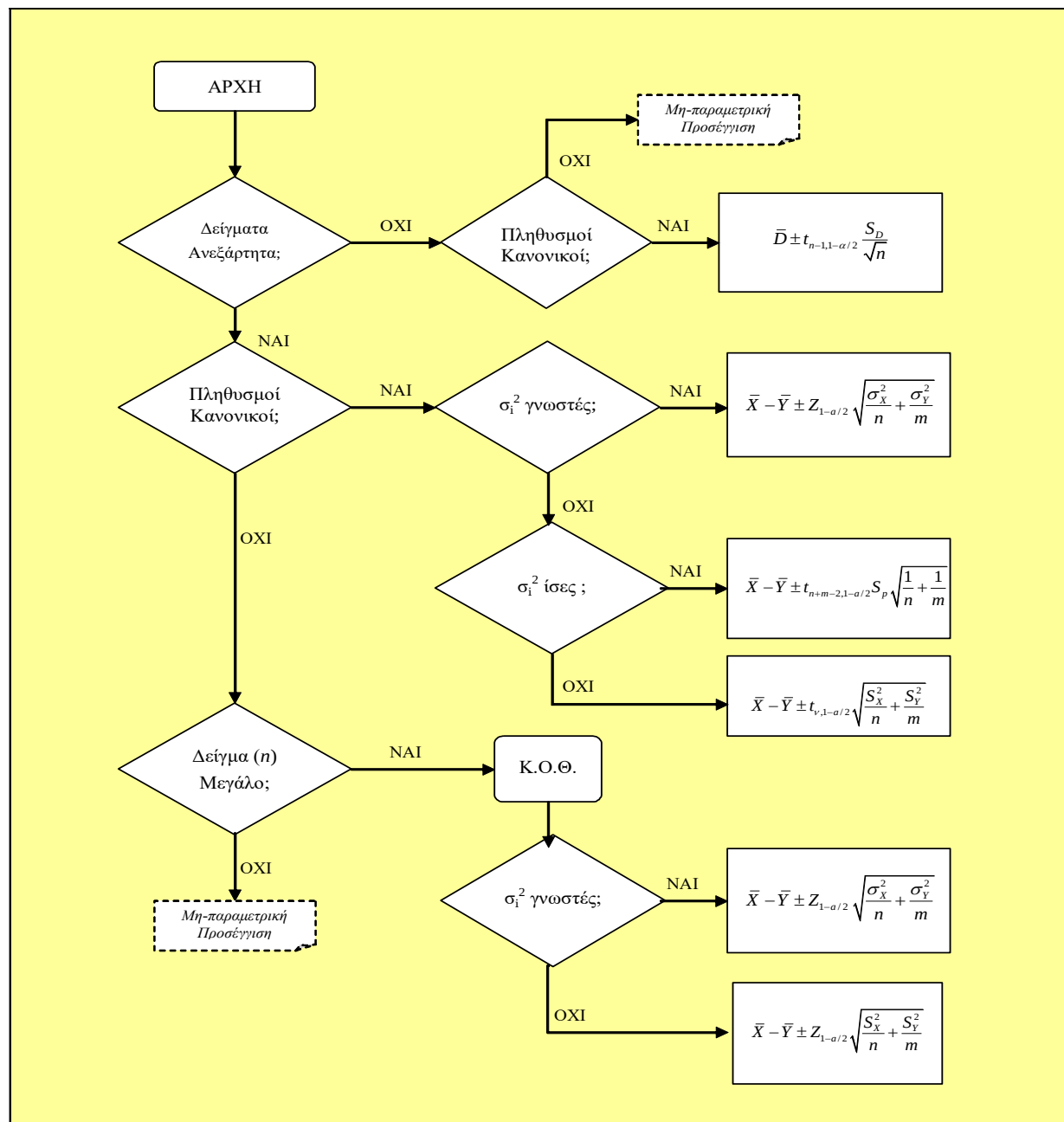
όπου

$$S_{\bar{D}} = \frac{S_D}{\sqrt{n}}$$

είναι το τυπικό σφάλμα εκτίμησης της διαφοράς των μέσων στην περίπτωση αυτή.

Επίσης, Για το δείγμα των διαφορών θα έχουμε ότι:

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{n}$$
$$S_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}{n-1}}.$$



Συνοπτική παρουσίαση διαστημάτων εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων δύο πληθυσμών

Παράδειγμα Ο υπεύθυνος εκπαίδευσης ενός ναυπηγείου θέλει να συγκρίνει την αποτελεσματικότητα δύο εναλλακτικών μεθόδων που χρησιμοποιούνται για την εκπαίδευση των ηλεκτροσυγκολλητών της εταιρείας. Για το λόγο αυτόν χωρίζει τυχαία 26 υποψηφίους για εκπαίδευση ηλεκτροσυγκολλητές σε δύο ισοπληθείς ομάδες A και B, για να εκπαιδευτούν με τις μεθόδους 1 και 2 αντίστοιχα. Κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσης, κάποιοι εκπαιδευόμενοι αποχώρησαν για λόγους ανεξάρτητους με το πρόγραμμα εκπαίδευσης και, τελικά, το πρόγραμμα ολοκλήρωσαν 12 άτομα της ομάδας A και 10 άτομα της ομάδας B. Μετά την ολοκλήρωση του προγράμματος οι εκπαιδευθέντες υποβλήθηκαν σε μια κοινή για όλους πρακτική άσκηση προκειμένου να αξιολογηθούν οι γνώσεις και οι ικανότητες που απέκτησαν. Η βαθμολογία της απόδοσής τους στην πρακτική άσκηση δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Βαθμολογία εκπαιδευθέντων

ΟΜΑΔΑ A (x_i)	70	93	82	90	77	86	79	84	98	73	81	85
ΟΜΑΔΑ B (y_i)	89	78	94	83	88	80	91	92	87	97		

Με βάση τα στοιχεία αυτά να κατασκευαστεί ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά της μέσης βαθμολογίας στις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Δίνεται ότι η βαθμολογία ακολουθεί την κανονική κατανομή. Επίσης, από προηγούμενη εμπειρία είναι γνωστό ότι η τυπική απόκλιση της βαθμολογίας για όσους εκπαιδεύονται με την πρώτη μέθοδο είναι $\sigma_x = 8$, ενώ η τυπική απόκλιση της βαθμολογίας για όσους εκπαιδεύονται με τη δεύτερη μέθοδο είναι $\sigma_y = 6$.

β. Δίνεται ότι η βαθμολογία ακολουθεί την κανονική κατανομή και υποθέτουμε ότι οι διακυμάνσεις των δύο πληθυσμών είναι ίσες.

γ. Δίνεται ότι η βαθμολογία ακολουθεί την κανονική κατανομή και υποθέτουμε ότι οι διακυμάνσεις των δύο πληθυσμών είναι άνισες.

Λύση

α. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων των δύο πληθυσμών οι διακυμάνσεις των οποίων είναι γνωστές. Επίσης, από το πρόβλημα προκύπτει ότι τα δύο δείγματα είναι ανεξάρτητα. Εύκολα βρίσκουμε ότι οι τιμές των δειγματικών μέσων είναι $\bar{x} = 83.17$ και $\bar{y} = 87.90$. Το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης της διαφοράς των μέσων είναι:

$$\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{\sigma_X^2 / n + \sigma_Y^2 / m} = \sqrt{8^2 / 12 + 6^2 / 10} = 2.99.$$

Στην προκειμένη περίπτωση $1 - \alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.10$ και, κατά συνέπεια, από τον Πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής βρίσκουμε ότι $Z_{1-\alpha/2} = Z_{0.95} = 1.64$. Άρα, προκύπτει ότι τα άκρα του 90% διαστήματος εμπιστοσύνης για τη διαφορά της μέσης βαθμολογίας είναι -9.63 και 0.17 .

Λύση

α. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων των δύο πληθυσμών οι διακυμάνσεις των οποίων είναι γνωστές. Επίσης, από το πρόβλημα προκύπτει ότι τα δύο δείγματα είναι ανεξάρτητα. Εύκολα βρίσκουμε ότι οι τιμές των δειγματικών μέσων είναι $\bar{x} = 83.17$ και $\bar{y} = 87.90$. Το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης της διαφοράς των μέσων είναι:

$$\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}} = \sqrt{\sigma_X^2 / n + \sigma_Y^2 / m} = \sqrt{8^2 / 12 + 6^2 / 10} = 2.99 .$$

Στην προκειμένη περίπτωση $1 - \alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.10$ και, κατά συνέπεια, από τον Πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής βρίσκουμε ότι $Z_{1-\alpha/2} = Z_{0.95} = 1.64$. Άρα, προκύπτει ότι τα άκρα του 90% διαστήματος εμπιστοσύνης για τη διαφορά της μέσης βαθμολογίας είναι $- 9.63$ και 0.17 .

β. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων των δύο πληθυσμών για τις άγνωστες διακυμάνσεις των οποίων έχουμε υποθέσει ότι είναι ίσες. Επίσης, από το πρόβλημα προκύπτει ότι τα δύο δείγματα είναι ανεξάρτητα. Έχουμε ήδη υπολογίσει τις τιμές των δειγματικών μέσων ότι είναι $\bar{x} = 83.17$ και $\bar{y} = 87.90$. Επίσης, οι δειγματικές τυπικές αποκλίσεις υπολογίζονται και είναι $s_x = 8.05$ και $s_y = 6.08$. Υπολογίζουμε τη συνδυασμένη διακύμανση και βρίσκουμε ότι η συνδυασμένη τυπική απόκλιση είναι $s_p = 7.23$. Άρα, το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης της διαφοράς των μέσων είναι

$$s_{\bar{X}-\bar{Y}} = 7.23\sqrt{1/12 + 1/10} = 3.096.$$

Στην προκειμένη περίπτωση $1 - \alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.10$, οι δε βαθμοί ελευθερίας δίνονται από τη σχέση $\nu = n + m - 2 = 12 + 10 - 2 = 20$. Κατά συνέπεια, από τον Πίνακα των ποσοστιαίων σημείων της κατανομής t βρίσκουμε ότι $t_{n+m-2, 1-\alpha/2} = t_{20, 0.95} = 1.725$. Άρα, προκύπτει ότι τα άκρα του 90% διαστήματος εμπιστοσύνης για τη διαφορά της μέσης βαθμολογίας είναι -10.07 και 0.61 .

Υ. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων των δύο πληθυσμών για τις διακυμάνσεις των οποίων έχουμε υποθέσει ότι είναι άνισες. Επίσης, από το πρόβλημα προκύπτει ότι τα δύο δείγματα είναι ανεξάρτητα. Έχουμε ήδη υπολογίσει ότι $\bar{x} = 83.17$, $\bar{y} = 87.90$, και $s_x = 8.05$ $s_y = 6.08$.

Επομένως, το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης της διαφοράς των μέσων είναι:

$$S_{\bar{x}-\bar{y}} = \sqrt{(8.05)^2 / 12 + (6.08)^2 / 10} = 3.016 .$$

Από το σχετικό τύπο προκύπτει ότι οι βαθμοί ελευθερίας στην περίπτωση αυτή είναι

$$\nu \cong \frac{\left(\frac{8.05^2}{12} + \frac{6.08^2}{10} \right)^2}{\frac{(8.05^2/12)^2}{12-1} + \frac{(6.08^2/10)^2}{10-1}} \cong 20 .$$

Επιπλέον, στην προκειμένη περίπτωση $1-\alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.10$, οι δε βαθμοί ελευθερίας είναι 20. Κατά συνέπεια, από τον Πίνακα των ποσοστιαίων σημείων της κατανομής t βρίσκουμε ότι $t_{\nu, 1-\alpha/2} = t_{20, 0.95} = 1.73$. Άρα, προκύπτει ότι τα άκρα του 90% διαστήματος εμπιστοσύνης για τη διαφορά της μέσης περιεκτικότητας είναι $- 9.95$ και 0.49 .

Παράδειγμα Για να μετρηθεί η αποτελεσματικότητα μιας μεθόδου αδυνατίσματος, επελέγη ένα τυχαίο δείγμα πέντε ατόμων το βάρος των οποίων καταγράφηκε με τα εξής αποτελέσματα.

A	B	Γ	Δ	Ε
84	98	78	92	85

Τέσσερις βδομάδες μετά την έναρξη της δίαιτας παρατηρήθηκε ότι το βάρος τους ελαττώθηκε, με εξαίρεση του B, ο οποίος ζύγιζε περισσότερο. Συγκεκριμένα, τα βάρη μετά τη δίαιτα διαμορφώθηκαν ως εξής:

B	Ε	Δ	Γ	A
99	82	90	75	80

Να κατασκευαστεί ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά του μέσου βάρους πριν και μετά τη δίαιτα.

Λύση

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων δύο πληθυσμών στηριζόμενοι στις πληροφορίες δύο εξαρτημένων δειγμάτων. Τα δείγματα είναι εξαρτημένα, αφού αναφέρονται στα ίδια άτομα, δηλαδή τα στοιχεία μας αποτελούν ζεύγη. Για το λόγο αυτόν το πρώτο βήμα είναι η αντιστοίχιση των τιμών.

	A	B	Γ	Δ	Ε
ΠΡΙΝ	84	98	78	92	85
ΜΕΤΑ	80	99	75	90	82
D_i	4	-1	3	2	3

Εύκολα προκύπτει ότι $\bar{D} = 2.2$. και $S_D = 1.924$.

Το τυπικό σφάλμα εκτίμησης της διαφοράς των μέσων είναι, $S_{\bar{D}} = 0.860$.

Τέλος, από τους πίνακες της κατανομής t βρίσκουμε ότι $t_{4,0.975} = 2.776$.

Επομένως, προκύπτει ότι τα άκρα ενός 95% διαστήματος εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων είναι -0.189 και 4.589 .