

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΣΤΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 1

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΟΥ
ΕΛΕΓΧΟΥ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ:
ΕΛΕΓΧΟΙ ΕΝΟΣ
ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ



Τι Είναι Υπόθεση;

- Μια υπόθεση είναι ένας ισχυρισμός για μια **παράμετρο** του πληθυσμού:

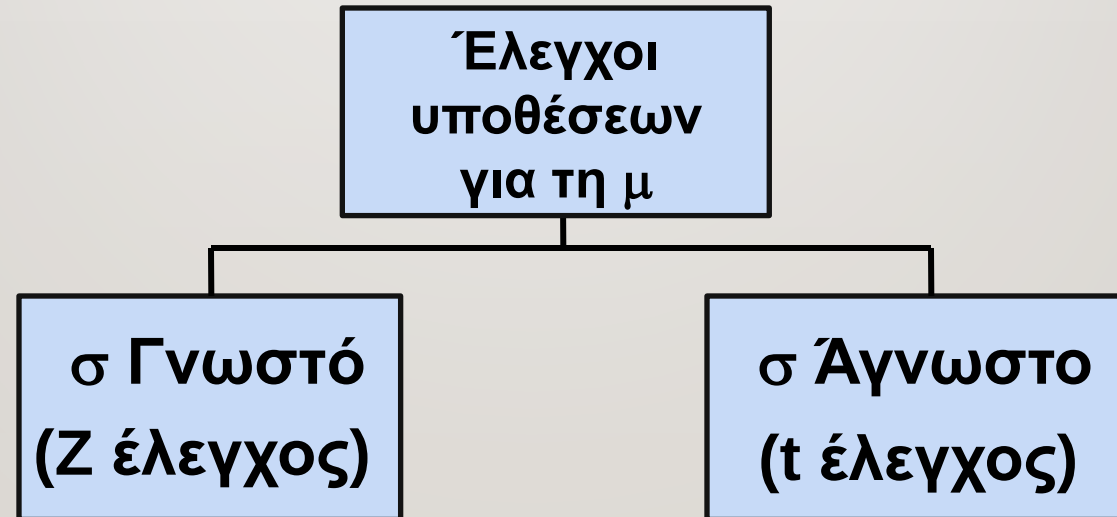
- Μέση τιμή πληθυσμού

Παράδειγμα: Ο μέσος μηνιαίος λογαριασμός κινητής τηλεφωνίας σε αυτή την πόλη είναι $\mu = \$42$

- ποσοστό πληθυσμού

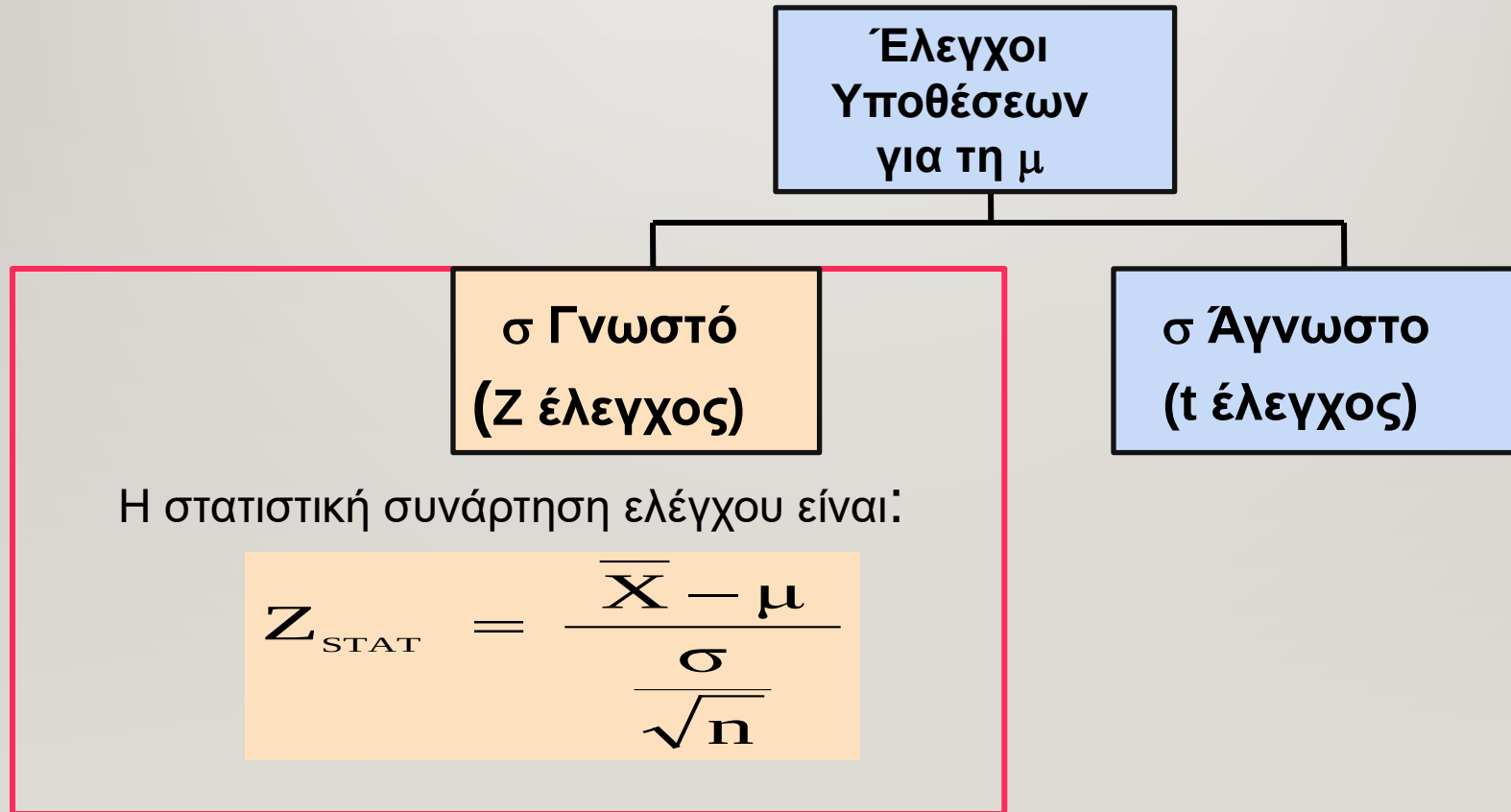
Παράδειγμα: Το ποσοστό των ενηλίκων σε αυτή την πόλη με κινητά τηλέφωνα είναι $\pi = 0,68$

Έλεγχοι Υποθέσεων για τη Μέση τιμή μ



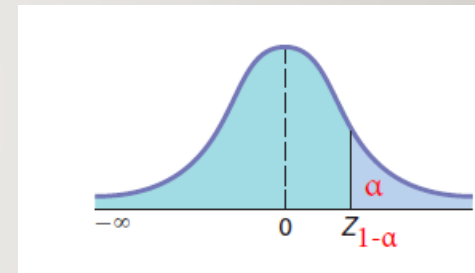
Ζ Έλεγχος Υποθέσεων για την Μέση τιμή (σ Γνωστό)

- Μετατρέψτε το στατιστικό δείγματος ($\bar{X}$) σε μια Z_{STAT} **στατιστική συνάρτηση ελέγχου**



Αμφίπλευροι Έλεγχοι

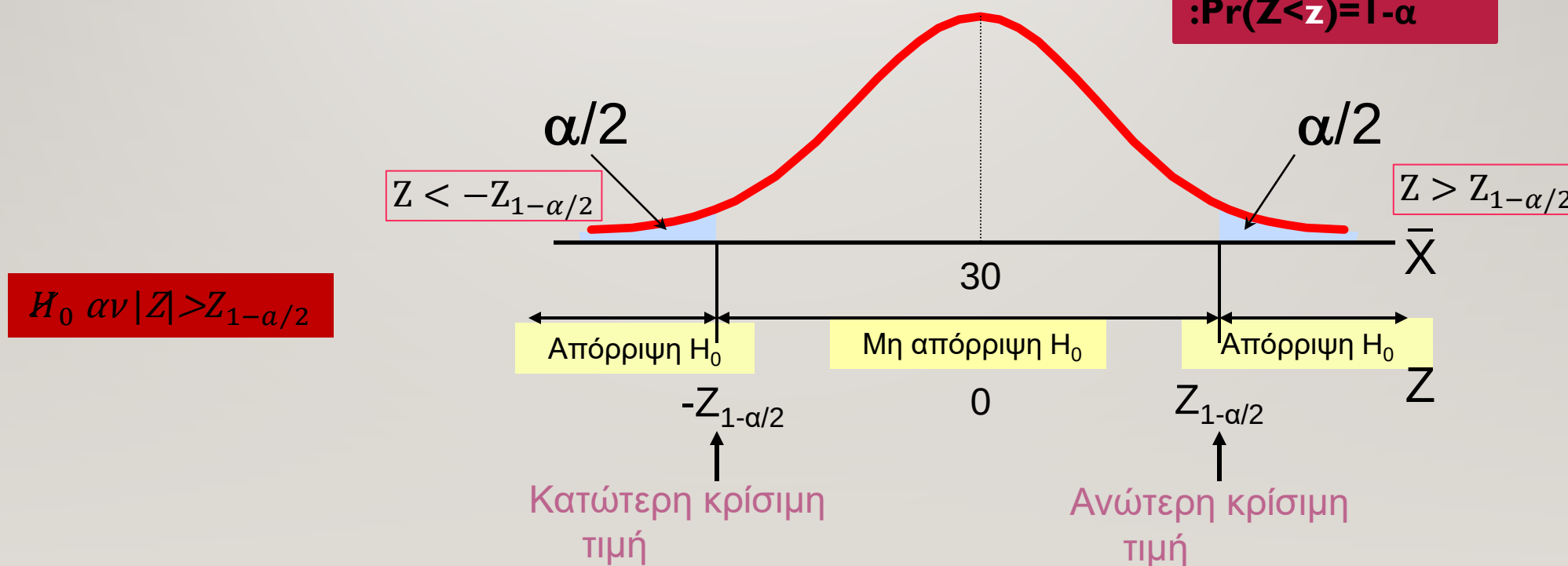
- Υπάρχουν δύο κρίσιμες τιμές, προσδιορίζοντας τις περιοχές απόρριψης



$$H_0: \mu = 30$$

$$H_1: \mu \neq 30$$

z σημείο
:Pr(Z < z) = 1 - α



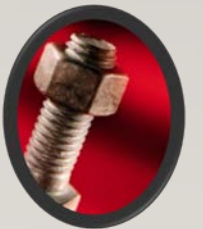
Παράδειγμα Ελέγχου Υποθέσεων

Σύμφωνα με τις προδιαγραφές η μέση διάμετρος ενός παραγόμενου μπουλονιού είναι 30mm. Ο υπεύθυνος ποιοτικού ελέγχου πραγματοποιεί συχνά ελέγχους για το αν το μηχάνημα λειτουργεί σύμφωνα με τις προδιαγραφές και για το λόγο αυτό συλλέγει δείγμα 100 στοιχείων για τα οποία η μέση διάμετρος τους είναι 29.84. Ο πληθυσμός είναι κανονικός και η τυπική απόκλιση της διαμέτρου του μπουλονιού είναι 0.8. Θα πρέπει ο υπεύθυνος να προβεί σε διορθωτική ενέργεια στο μηχάνημα; $\alpha=5\%$

1. Διατυπώστε την κατάλληλη μηδενική υπόθεση H_0 και εναλλακτική υπόθεση H_1

$H_0: \mu = 30$ (Αυτός είναι ένας αμφίπλευρος έλεγχος –εναλλακτική $\neq$)

$H_1: \mu \neq 30$



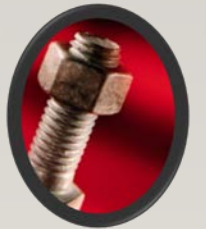
Παράδειγμα Ελέγχου Υποθέσεων

(συνέχεια)

2. Προσδιορίστε το κατάλληλο κριτήριο ελέγχου
 - Πληθυσμός (διάμετρος μπουλονιού) κανονικός
 - σ υποτίθεται γνωστό οπότε αυτός είναι ένας Z έλεγχος.
3. Προσδιορίστε την περιοχή απόρριψης
 - Για $\alpha = 0,05$ οι κρίσιμες Z τιμές είναι $\pm 1,96$
4. Υπολογίστε την τιμή του στατιστικού κριτηρίου ελέγχου

Επομένως η τιμή του στατιστικού ελέγχου, κάτω από την H_0 (θεωρώντας ότι η H_0 είναι αληθής), είναι

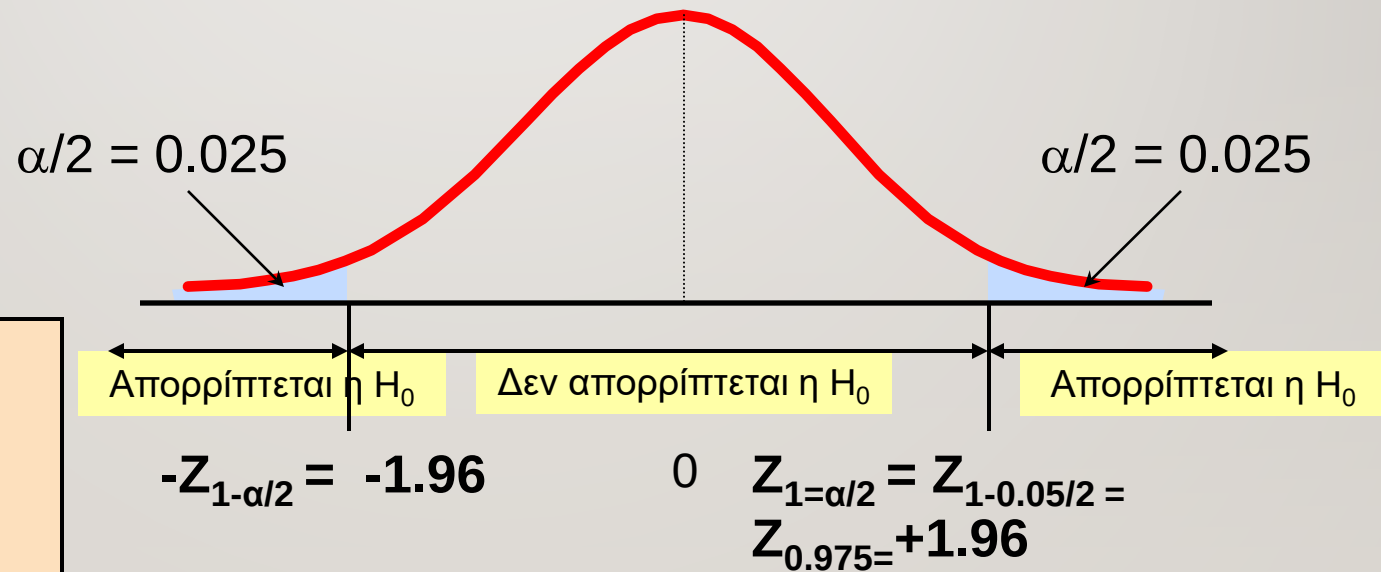
$$Z_{\text{STAT}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{29.84 - 30}{\frac{0.8}{\sqrt{100}}} = \frac{-0.16}{0.08} = -2.0$$



Παράδειγμα Ελέγχου Υποθέσεων

(συνέχεια)

5. Το στατιστικό κριτήριο ελέγχου είναι εντός της περιοχής απόρριψης;



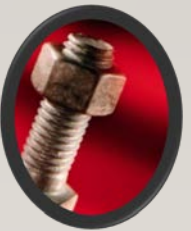
Απορρίπτετε την H_0 αν,

$$|Z| > Z_{1-\alpha/2}$$

διαφορετικά **δεν απορρίπτετε** την H_0

Εδώ, $|Z_{\text{STAT}}| = |-2,0| > +1.96$,
απορρίπτεται η H_0

Συμπεραίνετε ότι υπάρχει επαρκής **στατιστική** ένδειξη ότι η μέση διάμετρος του παραγόμενου μπουλονιού **δεν** είναι ίση με 30. Ο υπεύθυνος θα πρέπει να προβεί σε διορθωτική ενέργεια στο μηχάνημα



Έλεγχος Υποθέσεων με το p -value

- p -value: Η πιθανότητα να προκύψει **η συγκεκριμένη** από τα δεδομένα του δείγματος **τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου** ή ακόμη πιο ακραία, **δεδομένου ότι η H_0 είναι αληθής**
 - Το p -value είναι επίσης γνωστό ως το παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας (*observed significance level*)
 - Είναι η μικρότερη τιμή του α για την οποία η H_0 μπορεί να απορριφθεί



Προσέγγιση της p-value στον Έλεγχο: Ερμηνεύοντας την p-value

- Συγκρίνετε την p-value με το α

- Αν η $p\text{-value} < \alpha$, απορρίπτετε την H_0
- Αν η $p\text{-value} \geq \alpha$, δεν απορρίπτετε την H_0

- Να θυμάστε το εξής,

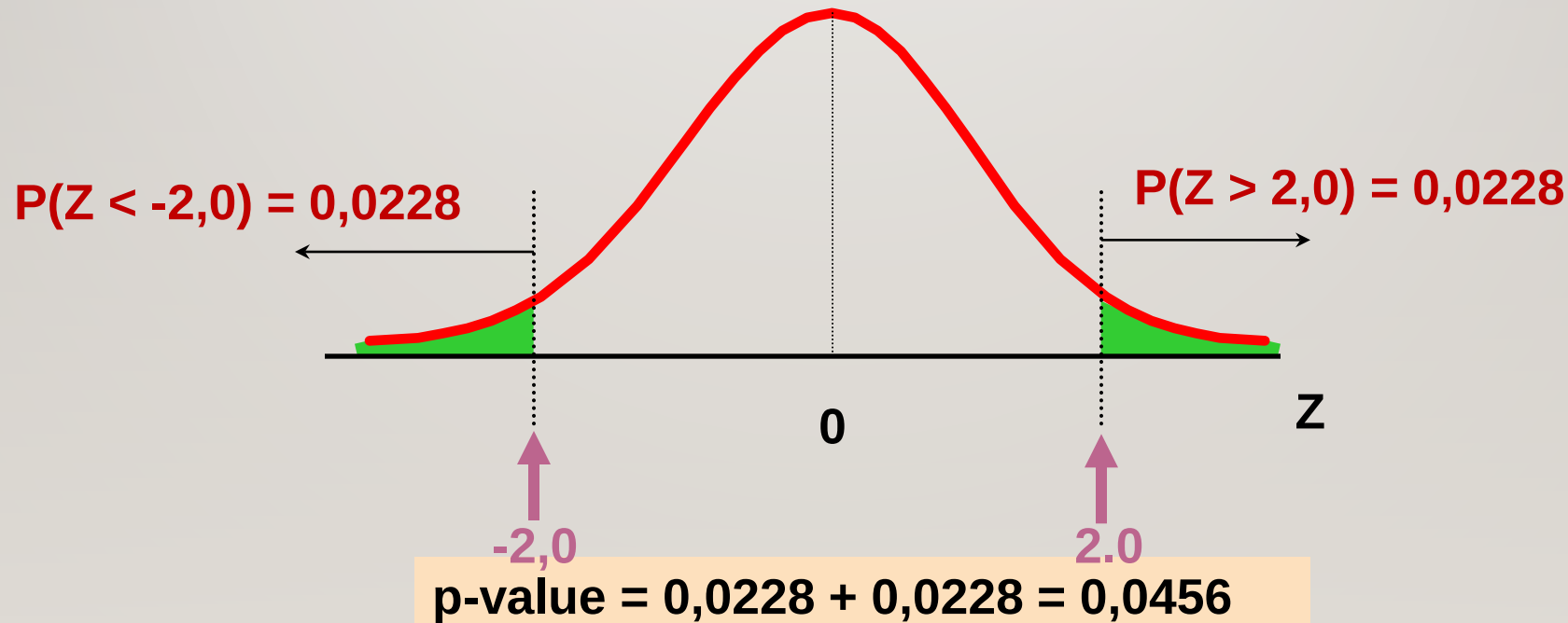
Όταν το $p\text{-value}$ είναι χαμηλό τότε
η H_0 πρέπει να απορριφθεί

Παράδειγμα του p -value Ελέγχου Υποθέσεων: Υπολογίζοντας το p -value

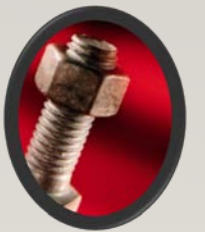
(συνέχεια)

Έγινε υπολογισμός του p -value.

- Πόσο πιθανό είναι να πάρετε μια τιμή για το $|Z_{STAT}|$ ίση με $|-2|$ (ή κάτι ακόμη πιο ακραίο-πιο μακριά από τη μέση τιμή (0), **σε κάθε κατεύθυνση**) **αν η H_0 είναι αληθής**
- **$P(Z > 2.0)$ ή $P(Z < -2.0) = P(|Z| > 2,0)$**



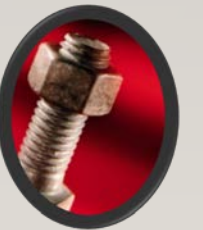
$$p\text{-value} = 2 * P(Z < -2) = 2 * 0.0228 = 0.0456$$



Παράδειγμα p -value Ελέγχου Υποθέσεων

(συνέχεια)

- Το μόνο που χρειάζεται αν χρησιμοποιήσω τη μέθοδο του p -value για να κάνω έλεγχο υπόθεσης είναι να ρωτήσω: Είναι το p -value $< \alpha$;
 - Αφού $p\text{-value} = 0.0456 < \alpha = 0.05$ **απορρίπτετε** την H_0
 - Υπάρχει επαρκής στατιστική ένδειξη για να συμπεράνετε ότι η μέση διάμετρος ενός παραγόμενου μπουλονιού δεν είναι ίση με 30mm.



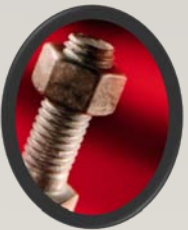
Σύνδεση Μεταξύ Αμφίπλευρου Ελέγχου και Διαστήματος Εμπιστοσύνης

- Για $\bar{X} = 29,84$, $\sigma = 0,8$ και $n = 100$, το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο μ είναι:

$$29.84 - (1.96) \frac{0.8}{\sqrt{100}} \quad ; \quad 29.84 + (1.96) \frac{0.8}{\sqrt{100}}$$

$$29.6832 \leq \mu \leq 29.9968$$

- Αφού αυτό το διάστημα **δεν Περιέχει** την υποθετική μέση τιμή (30), **απορρίπτουμε** την μηδενική υπόθεση στο $\alpha = 0.05$

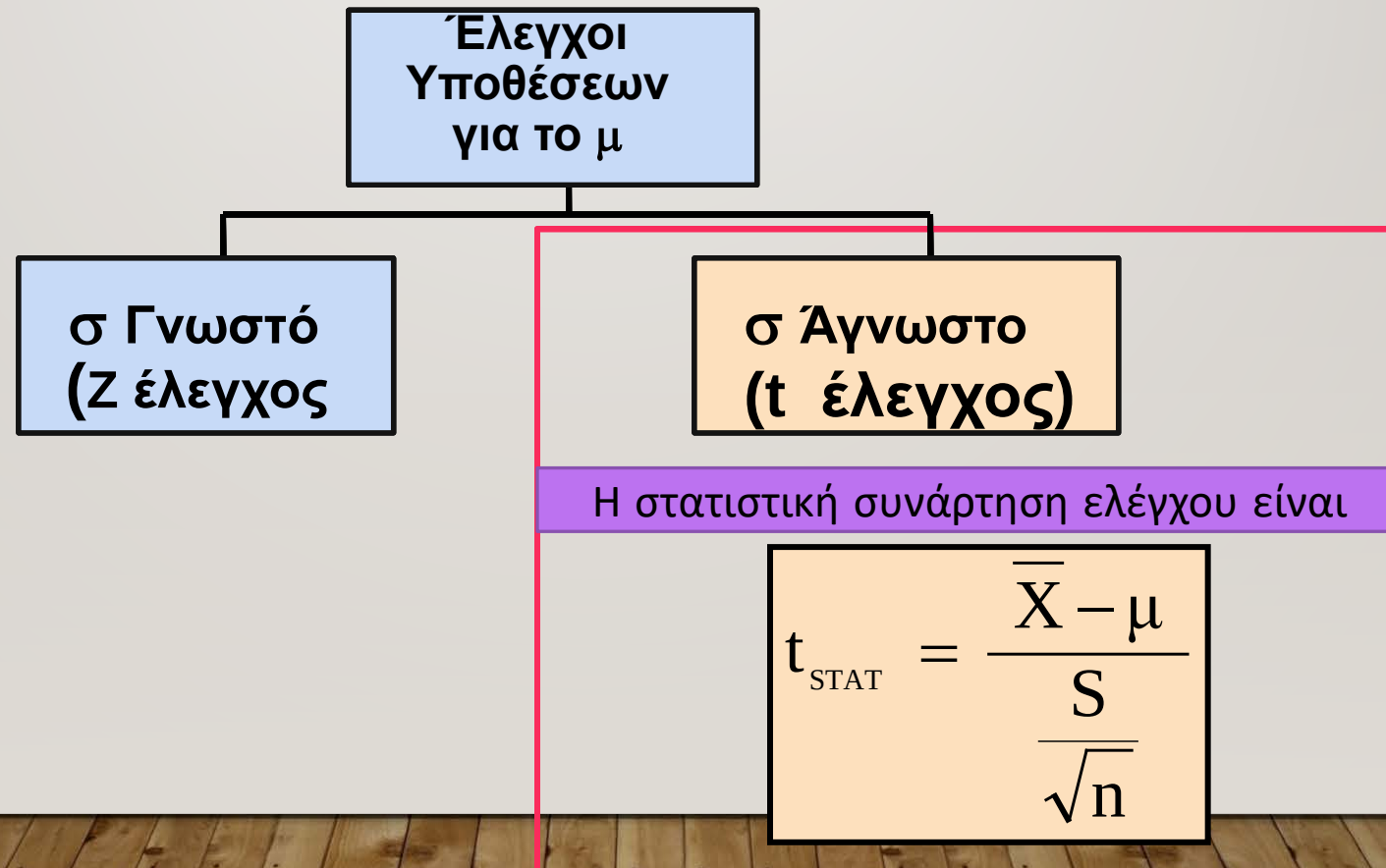


Μπορείτε Πάντα Πραγματικά Να Γνωρίζετε το σ ;

- Πιθανόν όχι!
- Σε όλες σχεδόν τις πραγματικές επιχειρηματικές καταστάσεις, το σ δεν είναι γνωστό.
- Αν υπάρχει μια κατάσταση όπου το σ είναι γνωστό τότε το μ είναι επίσης γνωστό (αφού για να υπολογίσετε το σ πρέπει να γνωρίζετε το μ).
- Αν πραγματικά γνωρίζετε το μ δεν θα υπήρχε ανάγκη να συγκεντρώσετε ένα δείγμα για να το εκτιμήσετε.

t -Έλεγχος για τη μέση τιμή (σ Άγνωστο)

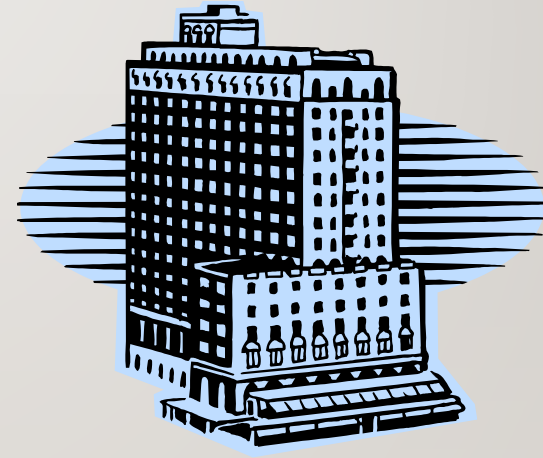
- Μετατρέψτε το στατιστικό δείγματος ($\bar{X}$) σε μια t_{STAT} στατιστική συνάρτηση ελέγχου



Παράδειγμα: Αμφίπλευρος Έλεγχος (σ Άγνωστο)

Το μέσο κόστος ενός δωματίου ξενοδοχείου στην Νέα Υόρκη λέγεται ότι ανέρχεται σε \$168 ανά διανυκτέρευση. Ένας μεσίτης για να ελέγξει τον ισχυρισμό αυτό, λαμβάνει ένα τυχαίο δείγμα 25 ξενοδοχείων και έχει ως αποτέλεσμα ένα $\bar{X}$ ίσο με \$172,50 και ένα S ίσο με \$15,40. Ελέγξτε τις κατάλληλες υποθέσεις για $\alpha = 0,05$.

(Υποθέστε ότι η κατανομή πληθυσμού είναι κανονική)



$$H_0: \mu = 168$$

$$H_1: \mu \neq 168$$

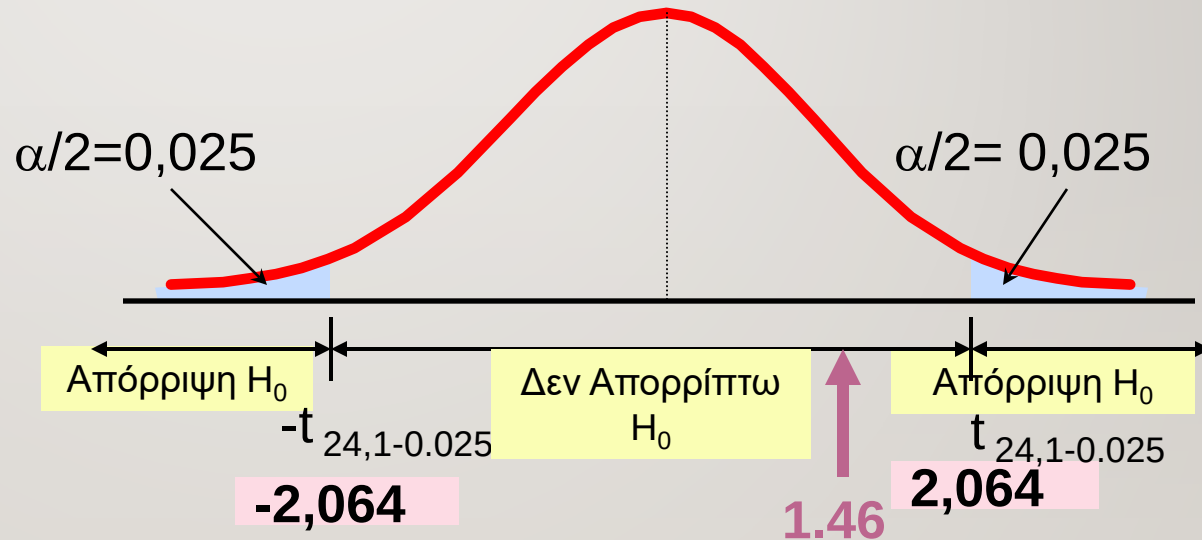
Λύση Παραδείγματος: Αμφίπλευρος Έλεγχος t

$$H_0 \text{ αν } |t| > t_{n-1, 1-\alpha/2}$$

$$H_0: \mu = 168$$
$$H_1: \mu \neq 168$$

- $\alpha = 0,05 \sim$
 $\alpha/2=0,025 \sim 1-\alpha/2=0.975$
- $n = 25, df = 25-1=24$
- σ είναι άγνωστο, έτσι
■ χρησιμοποιείτε μια
 t στατιστική συνάρτηση
- Κρίσιμη Τιμή :

$$\pm t_{24,0.975} = \pm 2,064$$



Λύση Παραδείγματος: Αμφίπλευρος Έλεγχος t

$$H_0: \mu = 168$$

$$H_1: \mu \neq 168$$

- $\alpha = 0,05 \sim$
 $\alpha/2=0,025 \sim 1-\alpha/2=0.975$
- $n = 25, df = 25-1=24$
- σ είναι άγνωστο, έτσι
■ χρησιμοποιείτε μια
 t στατιστική συνάρτηση
- Κρίσιμη Τιμή :

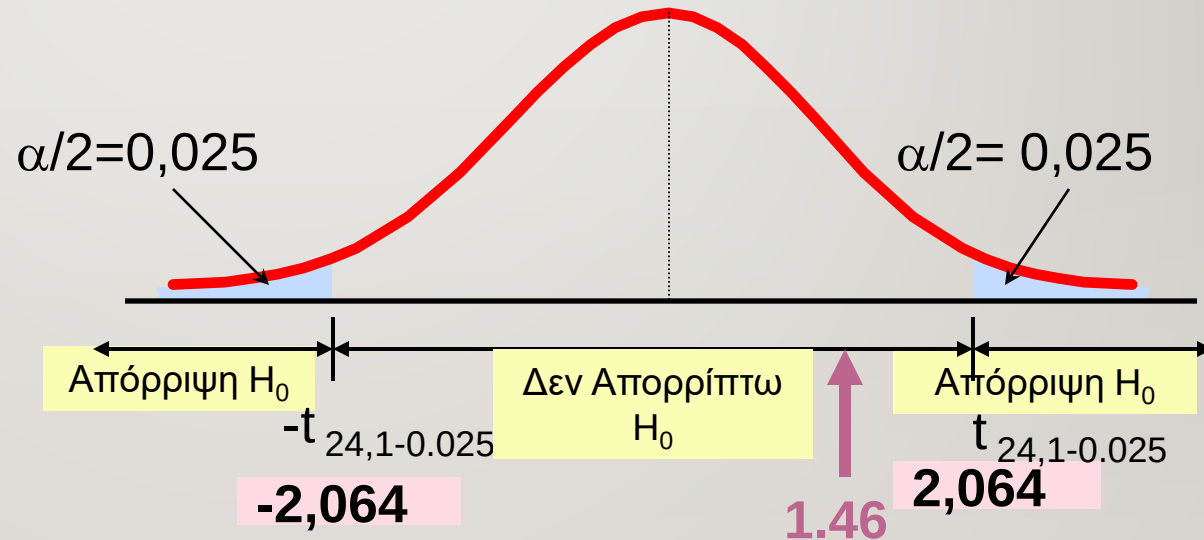
$$\pm t_{24,0.975} = \pm 2,064$$

$1-\alpha = \text{εμβαδόν}$

	0,550	0,600	0,650	0,700	0,750	0,800	0,850	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995	0,997	0,998	0,999
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	106,100	159,153	318,309
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	12,852	15,764	22,327
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	6,994	8,053	10,215
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,321	5,951	7,173
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,570	5,030	5,893
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,152	4,524	5,208
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	3,887	4,207	4,785
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,705	3,991	4,501
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,573	3,835	4,297
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,472	3,716	4,144
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,393	3,624	4,025
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,330	3,550	3,930
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,278	3,489	3,852
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,234	3,438	3,787
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,197	3,395	3,733
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,165	3,358	3,686
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,138	3,326	3,646
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,113	3,298	3,610
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,092	3,273	3,579
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,073	3,251	3,552
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,056	3,231	3,527
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,041	3,214	3,505
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,027	3,198	3,485
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,014	3,183	3,467

Λύση Παραδείγματος: Αμφίπλευρος Έλεγχος t

$$H_0: \mu = 168$$
$$H_1: \mu \neq 168$$



$$H_0 \text{ αν } |t| > t_{n-1, 1-\alpha/2}$$

$$|t| = |1.46| > t_{n-1, 1-\alpha/2} = 2,064$$

Δεν απορρίπτετε την H_0 : ανεπαρκής στατιστική
ένδειξη ότι το πραγματικό μέσο κόστος είναι
διαφορετικό από \$168

Σχέση Μεταξύ Αμφίπλευρων Ελέγχων και Διαστημάτων Εμπιστοσύνης

- Για $\bar{X} = 172,5$, $S = 15,40$ και $n = 25$, το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το μ είναι:

$$166.14 \leq \mu \leq 178.86$$

- Αφού αυτό το διάστημα **περιέχει** την υποθετική μέση τιμή (168), δεν απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση στο $\alpha = 0.05$

Χρήση p -value Ελέγχου Υποθέσεων

(συνέχεια)

- Το μόνο που χρειάζεται αν χρησιμοποιήσω τη μέθοδο του p -value για να κάνω έλεγχο υπόθεσης είναι να ρωτήσω: Είναι το p -value $< \alpha$;
 - Έστω ότι δίνεται p -value = 0.157
 - **Επειδή** p -value = 0.157 ~~$< \alpha = 0.05$~~ **Δεν απορρίπτετε** την H_0
 - Υπάρχει επαρκής στατιστική ένδειξη για να συμπεράνετε ότι η μέση διάμετρος ενός παραγόμενου μπουλονιού δεν είναι ίση με 30mm.



Μονόπλευροι Έλεγχοι Υποθέσεων

- Σε πολλές περιπτώσεις, η εναλλακτική υπόθεση εστιάζει προς μια συγκεκριμένη κατεύθυνση

$$H_0: \mu \geq 3$$

$$H_1: \mu < 3$$



Αυτός είναι ένας έλεγχος **κάτω**-άκρου αφού η εναλλακτική υπόθεση επικεντρώνεται στο κατώτερο άκρο κάτω από τον μέσο 3

$$H_0: \mu \leq 3$$

$$H_1: \mu > 3$$



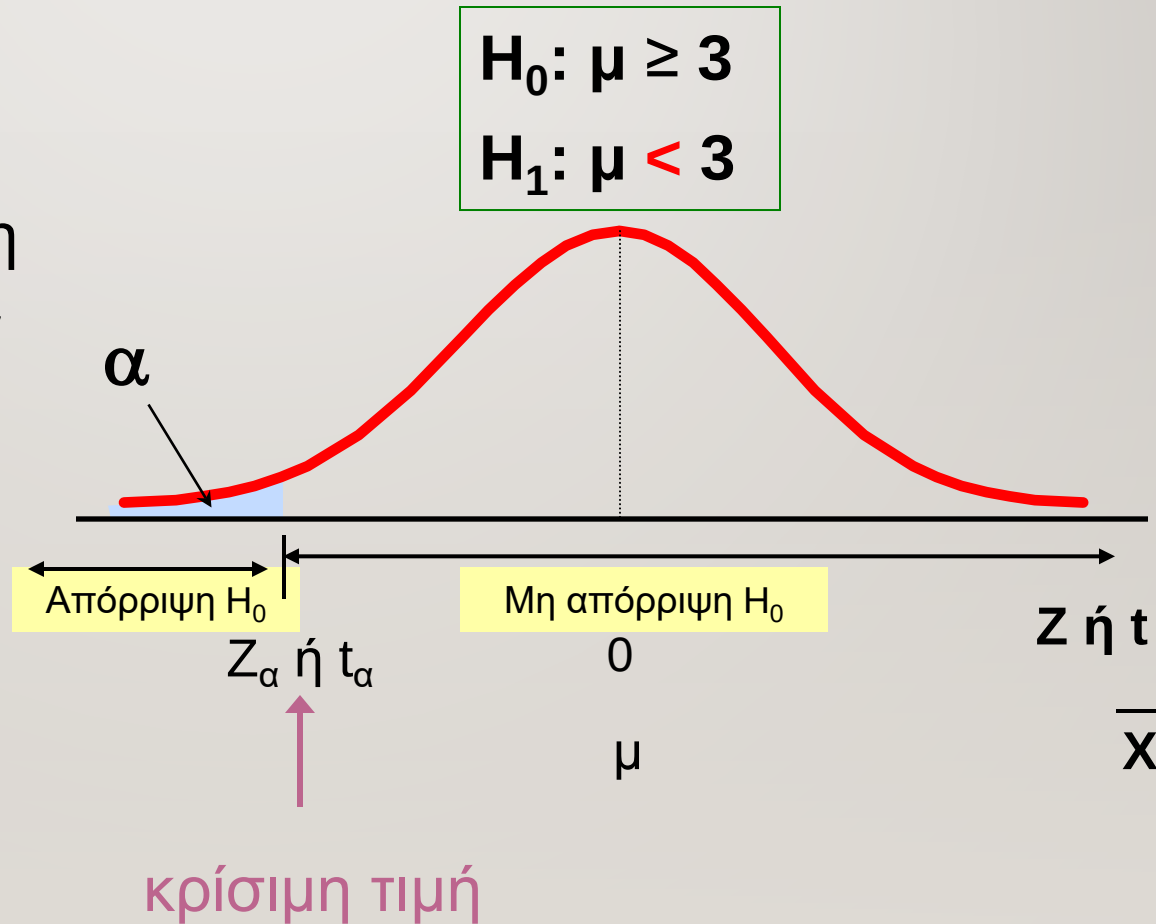
Αυτός είναι ένας έλεγχος **άνω**-άκρου αφού η εναλλακτική υπόθεση επικεντρώνεται στο ανώτερο άκρο πάνω από τον μέσο 3

Έλεγχοι Κάτω Άκρων

- Υπάρχει μόνο μία κρίσιμη τιμή, αφού η περιοχή απόρριψης είναι μόνο σε ένα άκρο

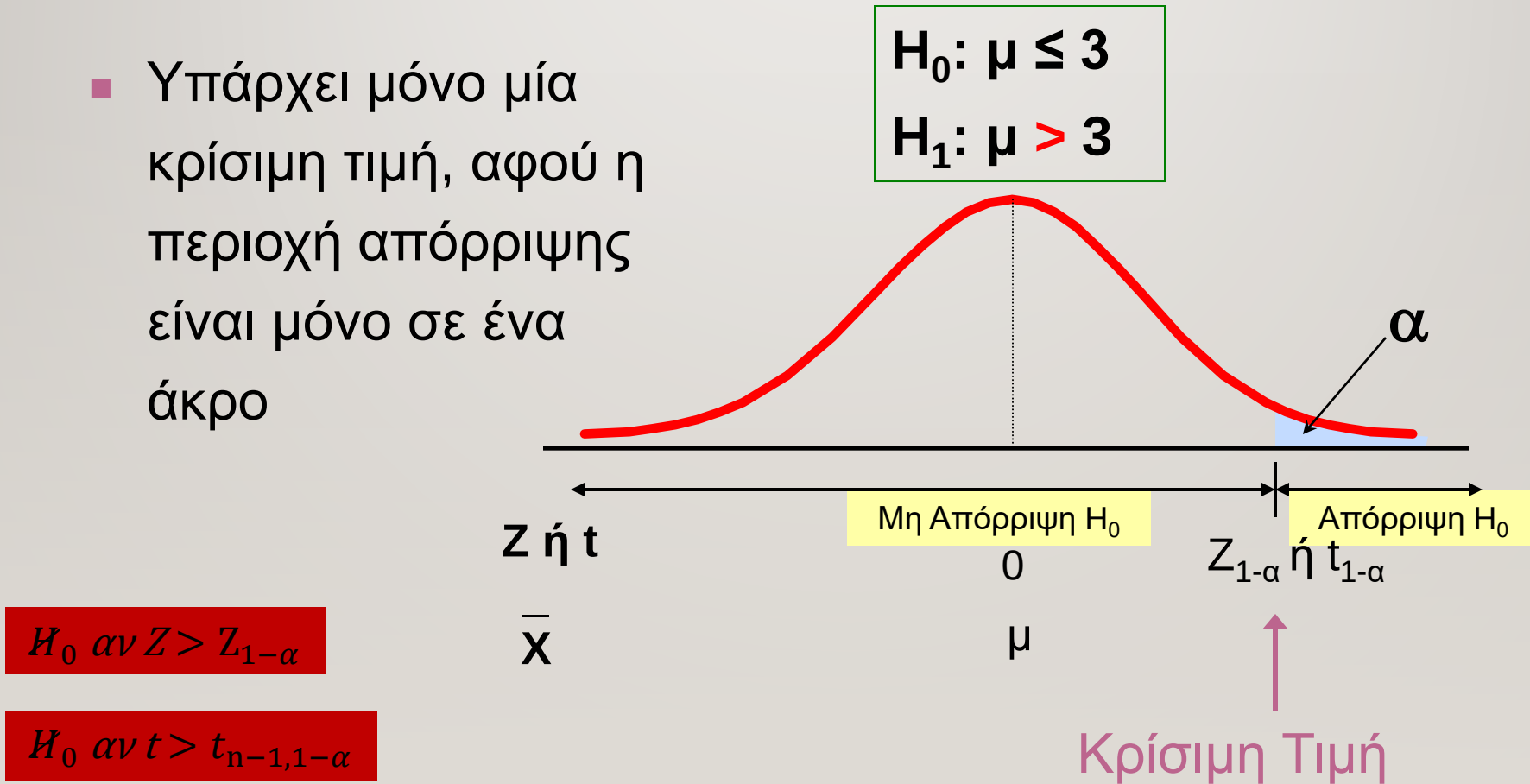
$$H_0 \text{ αν } Z < Z_\alpha$$

$$H_0 \text{ αν } t < t_{n-1,\alpha}$$



Έλεγχοι Άνω Άκρων

- Υπάρχει μόνο μία κρίσιμη τιμή, αφού η περιοχή απόρριψης είναι μόνο σε ένα άκρο



Παράδειγμα: Μονοκατάληκτος Προς τα Άνω - t - Έλεγχος Μέσου (σ Άγνωστο)



Ένας οργανισμός προστασίας καταναλωτών πιστεύει ότι οι μηνιαίες χρεώσεις των κινητών τηλεφώνων των πελατών μιας εταιρείας έχουν αυξηθεί και τώρα έχουν μέσο όρο πάνω από \$52 το μήνα. Για το λόγο αυτό συλλέγει δεδομένα από 25 λογαριασμούς πελατών για τους οποίους υπολογίζει ότι ο μέσος όρος χρέωσης είναι 53,1 και η τυπική απόκλιση 10. Ο οργανισμός επιθυμεί να ελέγξει αυτόν τον ισχυρισμό. (Υποθέστε έναν κανονικό πληθυσμό) $\alpha=0,01$

Δημιουργείστε τον στατιστικό έλεγχο υποθέσεων

$H_0: \mu \leq 52$ ο μέσος όρος δεν υπερβαίνει τα \$52 ανά μήνα

$H_1: \mu > 52$ ο μέσος όρος **είναι** μεγαλύτερος από \$52 ανά μήνα
(δηλ. υπάρχει επαρκής ένδειξη για την στήριξη του ισχυρισμού του διευθυντή)

Παράδειγμα: Στατιστική Συνάρτηση Ελέγχου

(συνέχεια)



Η στατιστική συνάρτηση ελέγχου είναι:

$$t_{\text{STAT}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{53.1 - 52}{\frac{10}{\sqrt{25}}} = 0.55$$



Παράδειγμα: Εύρεση της Περιοχής Απόρριψης

(συνέχεια)

$$H_0 \text{ αν } t > t_{n-1,1-\alpha}$$

$$\alpha = 0,01$$

$$t_{n-1,\alpha} = t_{24,1-0,01=0,99}=2,492$$

$$t = 0,55 > t_{n-1,1-\alpha} = 2,492$$

Δεν Απορρίπτετε την H_0

Δεν υπάρχει επαρκής ένδειξη ότι η μέση χρέωση είναι πάνω από \$52)

	$1 - \alpha = \text{εμβαδόν}$										
	0,550	0,600	0,650	0,700	0,750	0,800	0,850	0,900	0,950	0,975	0,990
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485



Παράδειγμα: Χρήση του p -value για τον Έλεγχο

- Μας δίνεται η p -τιμή=0,29 και συγκρίνετε με το $\alpha=0,01$

$$p\text{-value} = 0,29 < \alpha = 0,01$$

Δεν απορρίπτετε την H_0

1^ο Πρόβλημα

Ένα μηχάνημα κατασκευάζει μπαταρίες για ειδικές χρήσεις των οποίων ο χρόνος ζωής ακολουθεί, σύμφωνα με τις τεχνικές προδιαγραφές του μηχανήματος, κανονική κατανομή με μέσο 22 ώρες και τυπική απόκλιση 3 ώρες. Επειδή στις χρήσεις για τις οποίες προορίζονται οι μπαταρίες ο χρόνος ζωής τους είναι μία κρίσιμη παράμετρος, η λειτουργία του μηχανήματος παρακολουθείται συνεχώς με δειγματοληπτικό έλεγχο για το χρόνο ζωής των παραγόμενων μπαταριών. Από τυχαίο δείγμα 9 μπαταριών διαπιστώνεται ότι οι χρόνοι ζωής τους (σε ώρες) είναι:

16	18	22	20	21	20	16	22	25
----	----	----	----	----	----	----	----	----

Με τη βοήθεια της πληροφορίας αυτής να ελεγχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05, αν το μηχάνημα λειτουργεί σύμφωνα με τις τεχνικές προδιαγραφές του. Τα συμπεράσματά σας συμφωνούν αν κάνετε χρήση της τιμής $p\text{-value}=0,0456$ ή ενός 95% διαστήματος εμπιστοσύνης για το μέσο χρόνο ζωής των μπαταριών;



Λύση

Ο στατιστικός έλεγχος που πρέπει να διεξαχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 , είναι:

$$H_0 : \mu = 22$$

$$H_1 : \mu \neq 22$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι η τιμή του δειγματικού μέσου είναι:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^9 X_i}{9} = \frac{16+18+\dots+25}{9} = \frac{180}{9} = 20 \text{ ώρες}$$

Το τυπικό σφάλμα εκτίμησης του μέσου είναι: $\sigma_{\bar{X}} = \sigma / \sqrt{n} = 3 / \sqrt{9} = 1$

Η τιμή της **στατιστικής συνάρτησης** ελέγχου κάτω από τη μηδενική υπόθεση, είναι:

$$Z_{STAT} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{20 - 22}{1} = -2$$

Η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης προσδιορίζεται ως

$$\mathcal{H}_0 \text{ αν } |Z| > Z_{1-\alpha/2}$$

Από τον Πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής, βρίσκουμε ότι για $\alpha=5\%$ είναι $Z_{\alpha/2}^* = Z_{1-\alpha/2} = Z_{0,975} = 1,96$

$$H_0 \text{ αν } |Z| > Z_{1-\alpha/2}$$

$$|Z| = |-2| > Z_{1-\alpha/2} = 1,96$$

Κατά συνέπεια, απορρίπτουμε την H_0 . Οι ενδείξεις οδηγούν στο συμπέρασμα ότι το μηχανήμα δεν λειτουργεί σύμφωνα με τις τεχνικές προδιαγραφές του.

- Επίσης μπορούμε να αποφασίσουμε για το αν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση μέσω του p -value.

Καθώς το p -value = 0,0456 είναι μικρότερο από το α , συμπεραίνουμε ότι η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται!

- Μία ακόμη μέθοδος για να αποφασίσουμε για το αν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση είναι μέσω των διαστημάτων εμπιστοσύνης, μόνο για το δίπλευρο έλεγχο στα πλαίσια αυτού του μαθήματος.

Το 95% ΔΕ (18,04;21,96)

Παρατηρούμε ότι το 95% διαστήματος εμπιστοσύνης, **ΔΕΝ ΠΕΡΙΕΧΕΙ** το 22 επιβεβαιώνοντας τα αποτελέσματά μας με τη μέθοδο της κρίσιμης τιμής και τη μέθοδο της p -value.

2^ο Πρόβλημα

Ένα μηχάνημα κατασκευάζει μπαταρίες για ειδικές χρήσεις των οποίων ο χρόνος ζωής ακολουθεί, σύμφωνα με τις τεχνικές προδιαγραφές του μηχανήματος, κανονική κατανομή με μέσο 22. Επειδή στις χρήσεις για τις οποίες προορίζονται οι μπαταρίες ο χρόνος ζωής τους είναι μία κρίσιμη παράμετρος, η λειτουργία του μηχανήματος παρακολουθείται συνεχώς με δειγματοληπτικό έλεγχο για το χρόνο ζωής των παραγόμενων μπαταριών. Από τυχαίο δείγμα 9 μπαταριών διαπιστώνεται ότι οι χρόνοι ζωής τους (σε ώρες) είναι:

16	18	22	20	21	20	16	22	25
----	----	----	----	----	----	----	----	----

- a. Με τη βοήθεια της πληροφορίας αυτής να ελεγχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05, αν το μηχάνημα λειτουργεί σύμφωνα με τις τεχνικές προδιαγραφές του.
- b. Με τη βοήθεια της πληροφορίας αυτής να ελεγχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05 η υπόθεση ότι ο μέσος χρόνος ζωής των μπαταριών είναι **μικρότερος** από 22 ώρες.

Λύση

α. Ο στατιστικός έλεγχος που πρέπει να διεξαχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 , είναι:

$$H_0 : \mu = 22$$

$$H_1 : \mu \neq 22 \quad \text{Δίπλευρος έλεγχος}$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι η τιμή του δειγματικού μέσου είναι:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^9 X_i}{9} = \frac{16+18+\dots+25}{9} = \frac{180}{9} = 20 \text{ ώρες}$$

Επίσης βρίσκουμε ότι:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^9 (X_i - \bar{X})^2}{9-1}} = \sqrt{\frac{(16-20)^2 + (18-20)^2 + \dots + (25-20)^2}{8}} = 2,958$$

και, κατά συνέπεια, το τυπικό σφάλμα εκτίμησης του μέσου είναι $s_{\bar{X}} = s / \sqrt{n} = 2,958 / \sqrt{9} = 0,986$

Η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου κάτω από τη μηδενική υπόθεση, είναι:

$$t_{STAT} = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}} = \frac{20 - 22}{0,986} = -2,03$$

Λύση

α. Ο στατιστικός έλεγχος που πρέπει να διεξαχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 , είναι:

$$H_0 : \mu = 22$$

$$H_1 : \mu \neq 22 \quad \text{Δίπλευρος έλεγχος}$$

Η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης προσδιορίζεται ως

$$\mathcal{H}_0 \text{ αν } |T| > t_{n-1, 1-\alpha/2}$$

Από τον Πίνακα που περιέχει τα ποσοστιαία σημεία της t κατανομής, βρίσκουμε ότι για $\alpha=5\%$ και για βαθμούς ελευθερίας $\nu=8$ είναι

$$t_{n-1, 1-\alpha/2} = t_{8, 0,975} = 2,306$$

Άρα, στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν ισχύει ότι η τιμή της στατιστικής συνάρτησης είναι κατά απόλυτη τιμή $|-2,03|$ μεγαλύτερη από την κρίσιμη τιμή και επομένως η H_0 **δεν απορρίπτεται**

Επομένως, οι ενδείξεις οδηγούν στο συμπέρασμα ότι το μηχάνημα λειτουργεί σύμφωνα με τις τεχνικές προδιαγραφές του.

- Μία ακόμη μέθοδος για να αποφασίσουμε για το αν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση είναι μέσω των διαστημάτων εμπιστοσύνης, μόνο για το δίπλευρο έλεγχο στα πλαίσια αυτού του μαθήματος.

Το 95% ΔΕ (13,18;26,82) **ΠΕΡΙΕΧΕΙ** το 22 επιβεβαιώνοντας τα αποτελέσματά μας με τη μέθοδο της κρίσιμης τιμής.



β. Ο στατιστικός έλεγχος που πρέπει να διεξαχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 , είναι:

$$H_0 : \mu \geq 22$$

$$H_1 : \mu < 22 \quad \text{Μονόπλευρος έλεγχος}$$

Η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου κάτω από τη μηδενική υπόθεση, είναι η ΙΔΙΑ που υπολογίσαμε για το δίπλευρο έλεγχο καθώς δεν άλλαξε η τιμή ελέγχου $\mu_0=22$:

Τώρα έχουμε **μονόπλευρο έλεγχο** (έλεγχος κάτω άκρου), άρα η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης προσδιορίζεται ως

$$\text{Reject } H_0 \text{ αν } T < t_{n-1, \alpha}$$

Από τον Πίνακα που περιέχει τα ποσοστιαία σημεία της t κατανομής, βρίσκουμε ότι για $\alpha=5\%$ και για βαθμούς ελευθερίας $\nu=8$ είναι

$$t_{n-1, 1-\alpha} = t_{8, 0,95} = 1,86$$

Άρα, στη συγκεκριμένη περίπτωση ισχύει ότι η τιμή της στατιστικής συνάρτησης -2,03 είναι μικρότερη από την κρίσιμη τιμή και επομένως η **H_0 απορρίπτεται**

Επομένως, οι ενδείξεις οδηγούν στο συμπέρασμα ότι ο μέσος χρόνος ζωής των μπαταριών είναι μικρότερος από 22 ώρες.

3^ο Πρόβλημα

Όπως προκύπτει από ιστορικά στοιχεία, το ποσοστό των ελαττωματικών συσκευασιών μιας εταιρείας παραγωγής και συσκευασίας ενός προϊόντος είναι 10%. Ο υπεύθυνος του ποιοτικού ελέγχου της εταιρείας θεωρεί ότι το ποσοστό αυτό είναι υψηλό και εισάγει μια νέα μέθοδο συσκευασίας προκειμένου να το μειώσει. Για να διαπιστώσει τα αποτελέσματα της νέας μεθόδου, επιλέγει ένα τυχαίο δείγμα 200 συσκευασιών για τις οποίες χρησιμοποιήθηκε η νέα μέθοδος, και παρατηρεί ότι 11 από αυτές είναι ελαττωματικές. Ποιο θα είναι το συμπέρασμα του υπευθύνου σχετικά με την αποτελεσματικότητα της νέας μεθόδου σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05;



Λύση

$$H_0: \pi_0 \geq 0,1$$

$$H_1: \pi_0 < 0,1$$

Από το δείγμα έχουμε:

$$p = \frac{X}{n} = \frac{11}{200} = 0,055$$

$$\boxed{np = 200 \cdot 0,055 = 11 > 5}$$

$$nq = n(1-p) = 200 \cdot 0,945 = 189 > 5$$

$$Z = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \stackrel{\min(n \cdot p, n \cdot q) \geq 5}{\sim} N(0,1)$$

Συνεπώς, η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου, κάτω από τη μηδενική υπόθεση, είναι:

$$Z = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0,055 - 0,1}{\sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{200}}} = 0,055$$

Η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης προσδιορίζεται ως $Z_{STAT} < -Z_{1-\alpha}$

Από τον Πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής, βρίσκουμε ότι για $\alpha=5\%$ είναι $Z_{0,95} = 1,64$

~~$Z = 0,055 < -1,64$~~ Επομένως, οι ενδείξεις που έχουμε από το δείγμα οδηγούν σε απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης, που σημαίνει ότι η νέα μέθοδος συσκευασίας μειώνει το ποσοστό των ελαττωματικών.

Μέση Τιμή μ σ^2 Γνωστό

Στατιστική συνάρτηση

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Κανονικός Πληθυσμός

ή

$n > 30$

$$H_1: \mu > \mu_0$$

$$\mathcal{H}_0 \text{ αν } Z > Z_{1-\alpha}$$

$$H_1: \mu < \mu_0$$

$$\mathcal{H}_0 \text{ αν } Z < Z_\alpha$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$\mathcal{H}_0 \text{ αν } |Z| > Z_{1-\alpha/2}$$

$$1 - \alpha \% \Delta.E. \quad \bar{X} \pm Z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Μέση Τιμή μ σ^2 Άγνωστο

Στατιστική συνάρτηση

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{X})^2}{n-1}}$$

$$H_1: \mu > \mu_0$$

$$\mathcal{H}_0 \text{ αν } T > t_{n-1, 1-\alpha}$$

$$H_1: \mu < \mu_0$$

$$\mathcal{H}_0 \text{ αν } T < t_{n-1, \alpha}$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$\mathcal{H}_0 \text{ αν } |T| > t_{n-1, 1-\alpha/2}$$

$$1-\alpha\% \Delta.E. \quad \bar{X} \pm t_{n-1, 1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Πληθυσμιακή Αναλογία π

Στατιστική συνάρτηση

$$Z = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \stackrel{\min(n \cdot p, n \cdot q) \geq 5}{\sim} N(0,1)$$

όπου: p = δειγματική αναλογία
 π = πληθυσμιακή αναλογία
 $q = 1 - p$

$$H_1: \pi > \pi_0$$

$$H_1: \pi < \pi_0$$

$$H_1: \pi \neq \pi_0$$

$$\mathcal{H}_0 \text{ αν } Z > Z_{1-\alpha}$$

$$\mathcal{H}_0 \text{ αν } Z < Z_{\alpha}$$

$$\mathcal{H}_0 \text{ αν } |Z| > Z_{1-\alpha/2}$$

$$(1 - \alpha)\% \Delta E \quad p \pm Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{pq}{n}}$$