

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΣΤΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 1

6^ο ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Η ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ
ΚΑΙ ΑΛΛΕΣ ΣΥΝΕΧΕΙΣ
ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ



Συνάρτηση Πυκνότητας για μία Συνεχή μεταβλητή

- **Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας:**

Η συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $(-\infty, +\infty)$ και πεδίο τιμών $(-\infty, +\infty)$ με ιδιότητες:

$$f \text{ συνεχής}$$

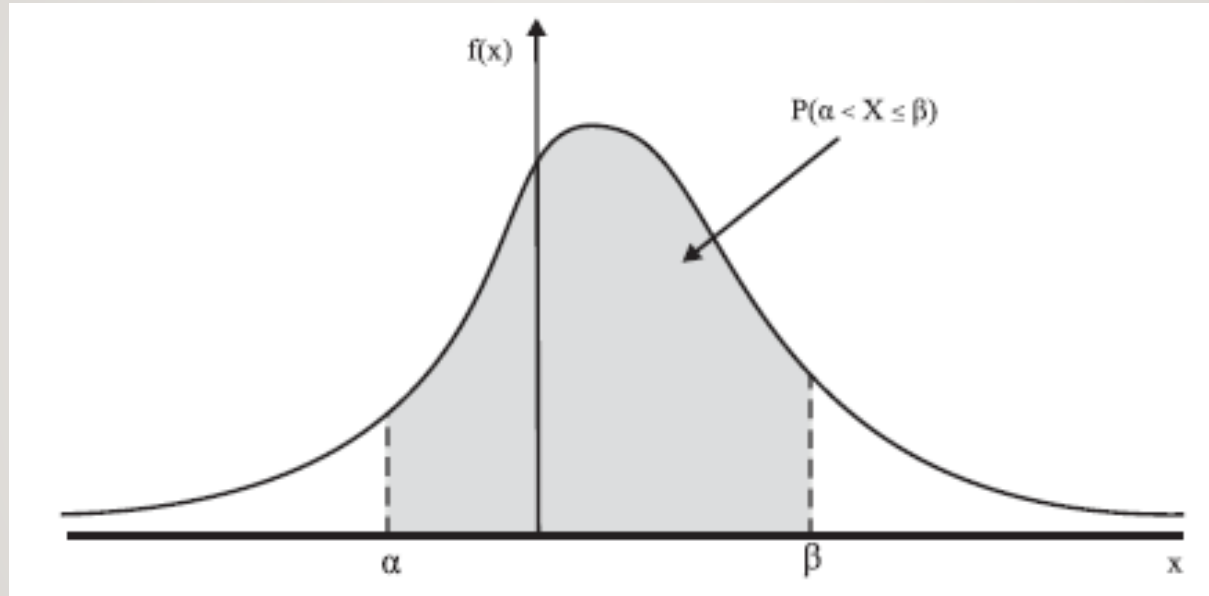
$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$$

καλείται Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (probability density function) της τυχαίας μεταβλητής X

Συνάρτηση Πυκνότητας για μία Συνεχή μεταβλητή

Η συνάρτηση $f(x)$ ορίζει μία συνεχή καμπύλη η οποία βρίσκεται εξ ολοκλήρου πάνω από τον άξονα των τετμημένων



Η καμπύλη αυτή είναι το **διάγραμμα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας** (probability plot) της τυχαίας μεταβλητής X

Συνάρτηση Πυκνότητας για μία Συνεχή μεταβλητή

Αν X συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ και $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ με $\alpha < \beta$

$$\Pr(\alpha < X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) d(x)$$

η πιθανότητα $\Pr(\alpha < X \leq \beta)$ απεικονίζεται γραφικά ως το **εμβαδόν** της επιφάνειας που περιέχεται μεταξύ της καμπύλης που ορίζει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ και του άξονα των x , ενώ περιορίζεται από τις κατακόρυφες στα α και β .

Συνάρτηση Πυκνότητας για μία Συνεχή μεταβλητή

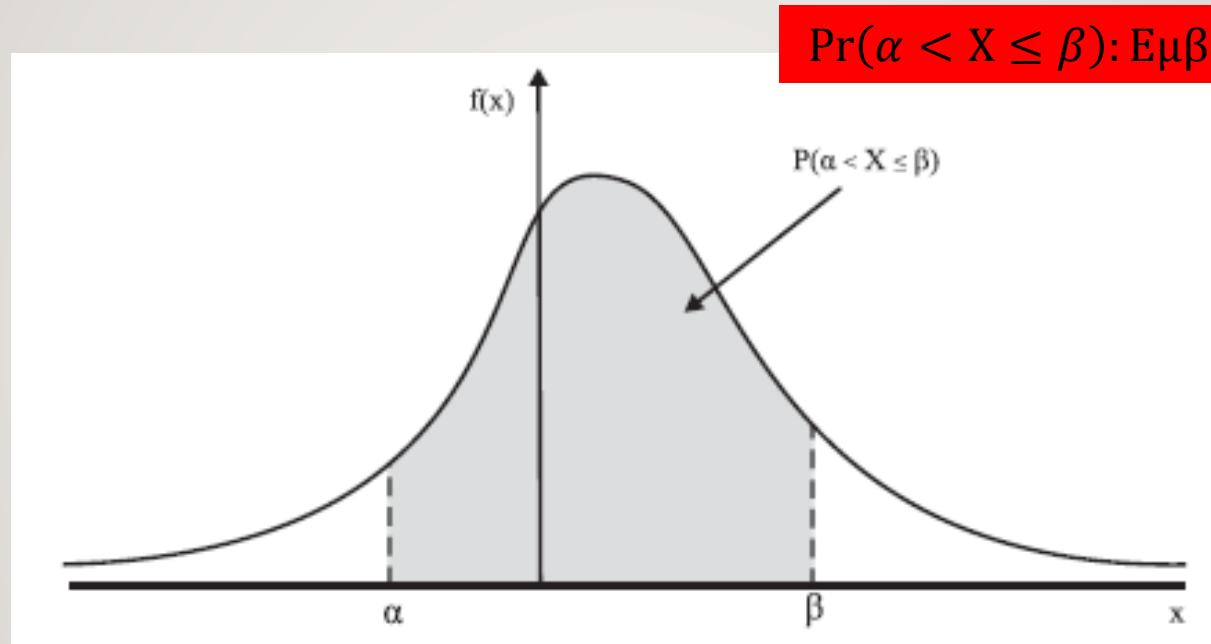
Στην περίπτωση των συνεχών τυχαίων μεταβλητών η έκφραση ‘πιθανότητα η μεταβλητή X να πάρει μια ορισμένη τιμή x' **αντικαθίσταται** από την ‘πιθανότητα η μεταβλητή X να πάρει τιμές **σε ένα ορισμένο απειροστό διάστημα** γύρω από το σημείο x' ή την ‘πιθανότητα η μεταβλητή X να πάρει τιμές πολύ κοντά στο σημείο x'

$$\Pr(X = \alpha) = \Pr(X = \beta) = 0$$

ένα απειροστό διάστημα είναι ένα διάστημα που δεν έχει ορισμένα άκρα, αλλά είναι άπειρα μικρό πχ το $(-\infty, a)$ ή το $(b, +\infty)$, όπου a και b είναι πραγματικοί αριθμοί.

Συνάρτηση Πυκνότητας για μία Συνεχή μεταβλητή

Επομένως, με το γραμμοσκιασμένο εμβαδό απεικονίζεται οποιαδήποτε από τις πιθανότητες



$\Pr(\alpha < X \leq \beta)$: Εμβαδό

$$\Pr(\alpha < X \leq \beta) = \Pr(\alpha \leq X \leq \beta) = \Pr(\alpha \leq X < \beta) = \Pr(\alpha < X < \beta)$$

Συνάρτηση Κατανομής- Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας

Η συνάρτηση $F: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ που εκφράζει την πιθανότητα η X να λάβει οποιαδήποτε τιμή μικρότερη ή ίση του α

$$F(\alpha) = \Pr(X \leq \alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f(x) dx \quad \forall \alpha \in \mathcal{R}$$

Η πιθανότητα να λάβει η συνεχής τυχαία μεταβλητή X τιμή μεταξύ δύο οποιονδήποτε πραγματικών αριθμών $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ με $\alpha < \beta$

$$\Pr(\alpha < X \leq \beta) = \Pr(\alpha \leq X \leq \beta) = \Pr(\alpha \leq X < \beta) = \Pr(\alpha < X < \beta) \\ = F(\beta) - F(\alpha)$$

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας Συνάρτηση Κατανομής-Παράδειγμα

Ο χρόνος ζωής ενός λαμπτήρα (σε 1000-αδες ώρες) περιγράφεται από μία τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^3}, & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Ποια είναι η κατάλληλη τιμή για την σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι σππ;

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας Συνάρτηση Κατανομής-Παράδειγμα

Πρέπει να ισχύουν:

$$f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R} \rightarrow c \geq 0$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 &\rightarrow \int_1^3 \frac{c}{x^3} dx = 1 \rightarrow c \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^3 = 1 \rightarrow c \left(\frac{3^{-2}}{-2} - \frac{1^{-2}}{-2} \right) = 1 \\ &\rightarrow c \frac{8}{18} = 1 \rightarrow c = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας Συνάρτηση Κατανομής-Παράδειγμα

Ο χρόνος ζωής ενός λαμπτήρα (σε 1000-αδες ώρες) περιγράφεται από μία τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9}{4x^3}, & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να βρεθεί η **συνάρτηση κατανομής** της συγκεκριμένης μεταβλητής

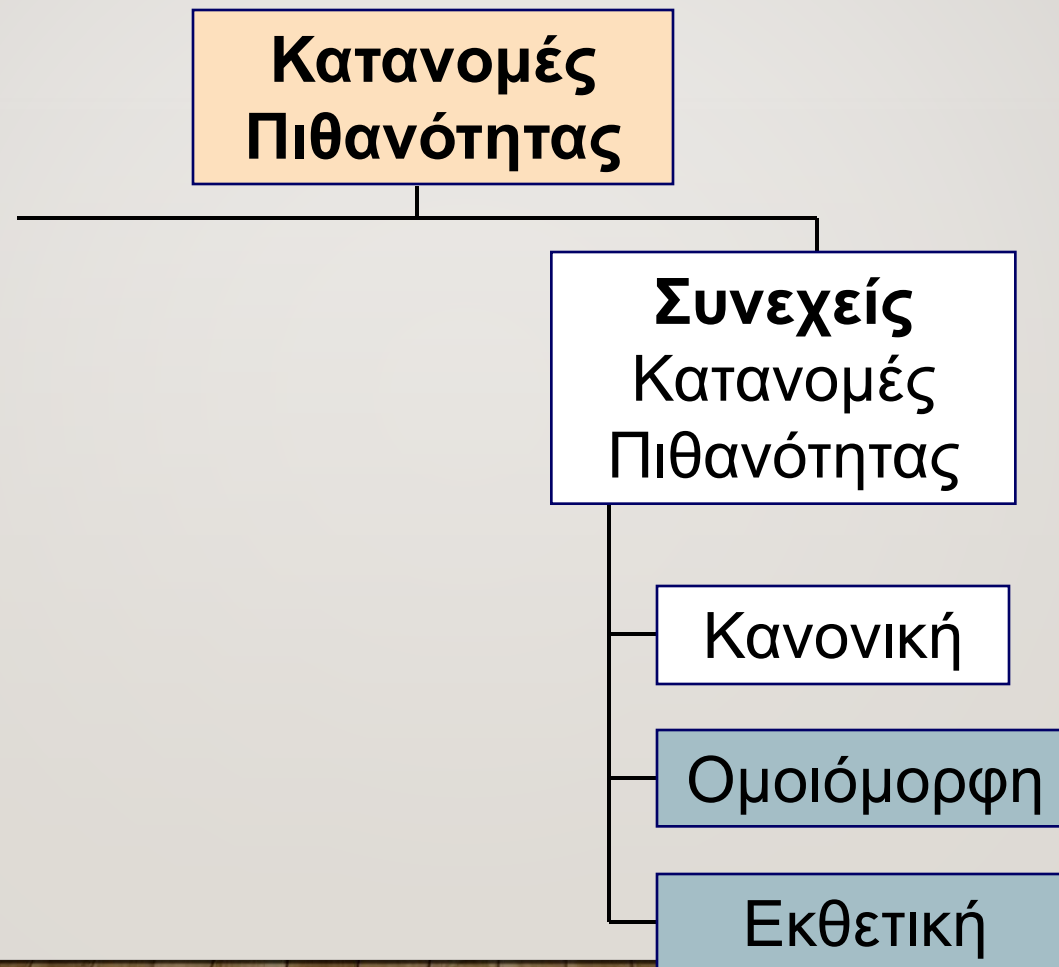
Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας Συνάρτηση Κατανομής-Παράδειγμα

$$F(\alpha) = \Pr(X \leq \alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f(x) dx = \begin{cases} 0, & \alpha < 1 \\ \int_1^{\alpha} \frac{9}{4x^3} dx, & 1 \leq \alpha < 3 \\ 1, & \alpha \geq 3 \end{cases}$$

$$\int_1^{\alpha} \frac{9}{4x^3} dx = \frac{9}{4} \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^{\alpha} = \frac{9}{8} \left(1 - \frac{1}{\alpha^2} \right)$$

$$F(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha < 1 \\ \frac{9}{8} \left(1 - \frac{1}{\alpha^2} \right), & 1 \leq \alpha < 3 \\ 1, & \alpha \geq 3 \end{cases}$$

Κατανομές Πιθανότητας



Η Κανονική Κατανομή

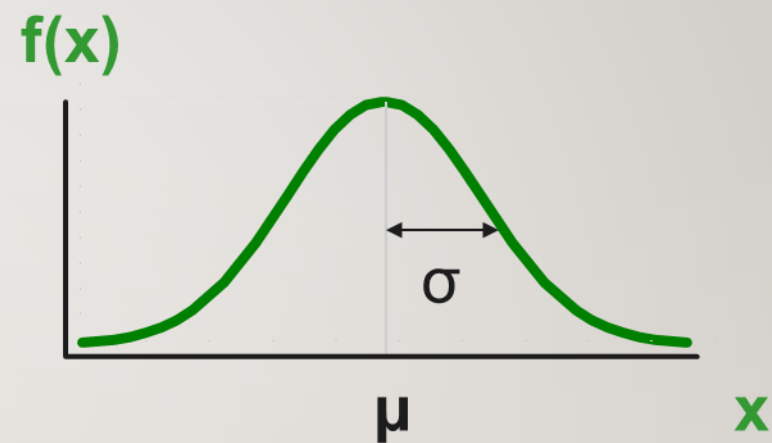
- **‘Σχήμα καμπάνας’**
- **Συμμετρική**
- Μέση Τιμή, Διάμεσος και Επικρατούσα Τιμή είναι ίσα

Η θέση καθορίζεται από τη μέση τιμή, μ

Η διασπορά καθορίζεται από την τυπική απόκλιση, σ

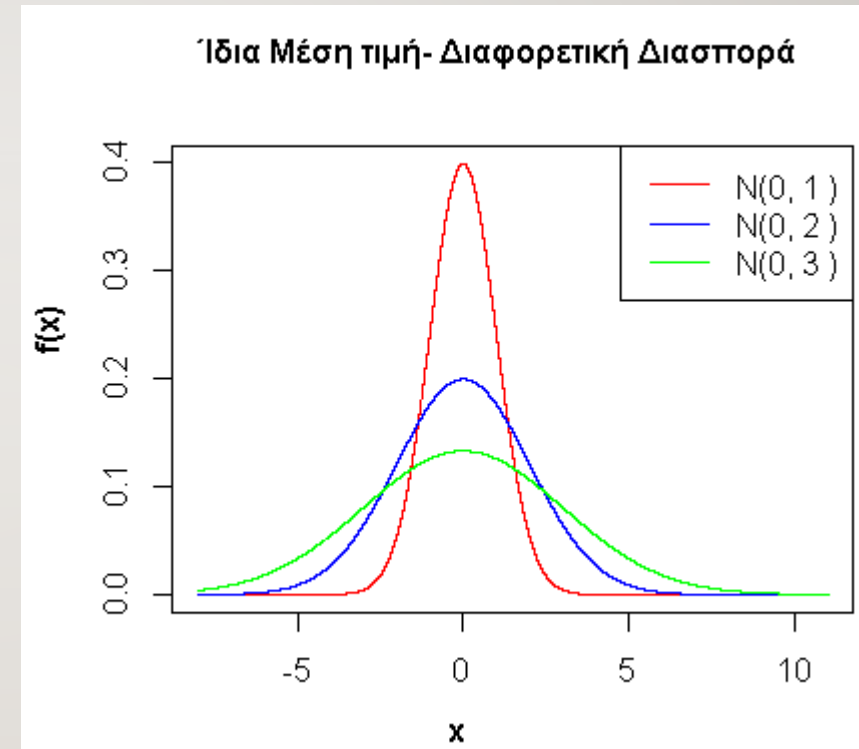
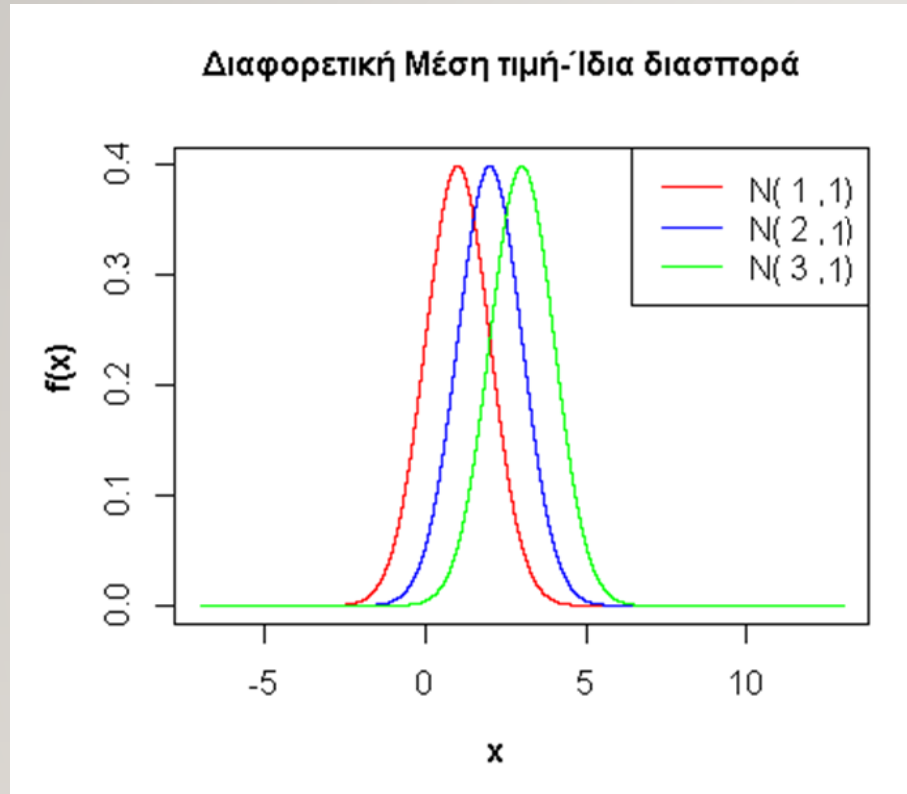
Η τυχαία μεταβλητή έχει ένα άπειρο θεωρητικό εύρος:

$+\infty$ έως $-\infty$



μέση τιμή
= Διάμεσος
= Επικρατούσα Τιμή

Με την μεταβολή των Παραμέτρων μ και σ , επιτυγχάνουμε διαφορετικές κανονικές κατανομές



<https://homepage.divms.uiowa.edu/~mbognar/applets/normal.html>

Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

- Οποιαδήποτε κανονική κατανομή (με οποιοδήποτε συνδυασμό μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης) μπορεί να μετασχηματιστεί σε Τυποποιημένη κανονική κατανομή (Z)
- Για να υπολογίσετε κανονικές πιθανότητες πρέπει να μετασχηματίσετε X μονάδες σε Z μονάδες
- Η τυποποιημένη κανονική κατανομή (Z) έχει μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1

Μετασχηματισμός στην Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

- Ο μετασχηματισμός από την X στην τυποποιημένη **κανονική** (την “ Z ” κατανομή) γίνεται αφαιρώντας τη μέση τιμή από το X και διαιρώντας με την τυπική απόκλιση:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Η κατανομή “ Z ” έχει πάντα Μέση τιμή= 0 και τυπική απόκλιση = 1

Η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας Τυπικής Κανονικής

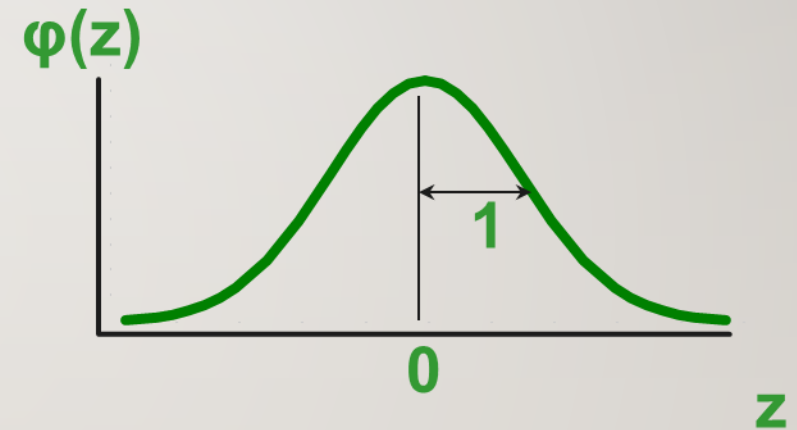
- Ο μαθηματικός τύπος για την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας Τυποποιημένης μεταβλητής είναι

$$\varphi(z)=f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)z^2}$$

- Όπου e = η μαθηματική σταθερά περίπου ίση με 2,71828
- π = η μαθηματική σταθερά περίπου ίση με 3,14159
- z = οποιαδήποτε τιμή από την τυποποιημένη κανονική κατανομή

Η Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

- Είναι γνωστή και ως “Z” κατανομή
- η μέση τιμή είναι 0
- Η τυπική απόκλιση είναι 1



Οι τιμές πάνω από τη μέση τιμή έχουν **θετικές** Z-τιμές.

Οι τιμές κάτω από τη μέση τιμή έχουν **αρνητικές** Z-τιμές.

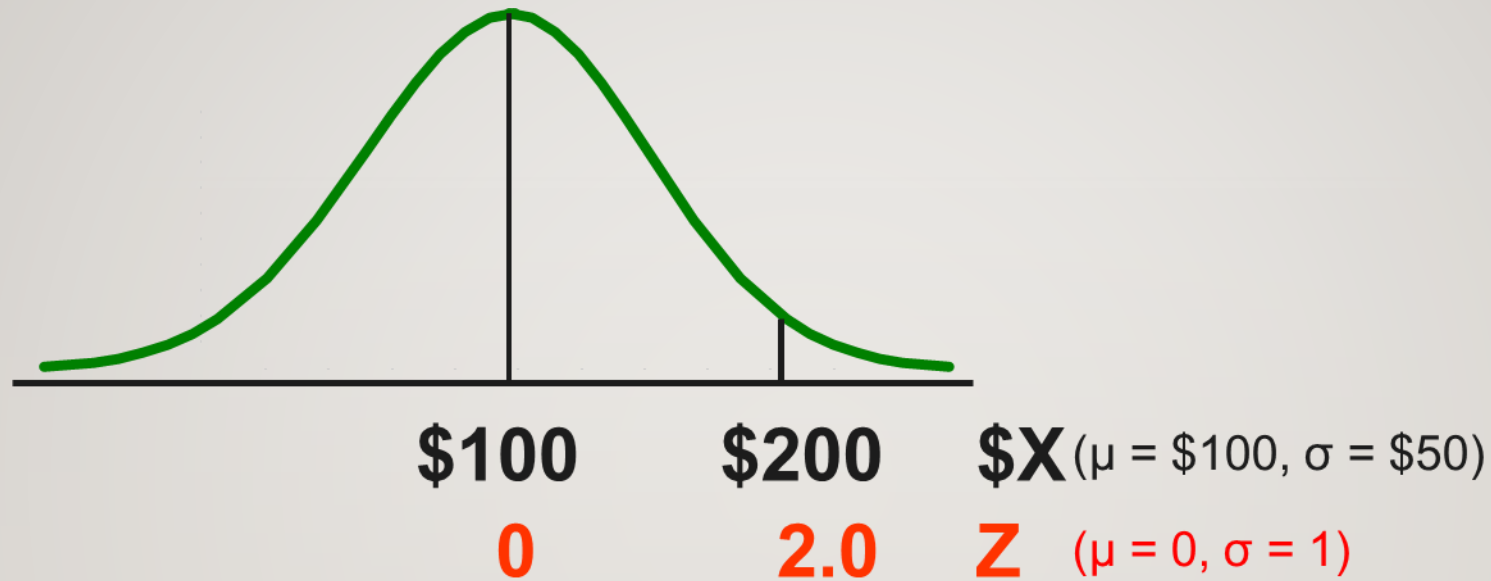
Παράδειγμα

- Αν η X είναι κανονικά κατανοημένη με μέση τιμή \$100 και τυπική απόκλιση \$50, η Z τιμή για $X = \$200$ είναι

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{\$200 - \$100}{\$50} = 2.0$$

- Αυτό σημαίνει ότι η $X = \$200$ είναι **δύο** τυπικές αποκλίσεις ($2 * \$50$) πάνω από τη μέση τιμή των \$100.

Σύγκριση των Μονάδων X και Z

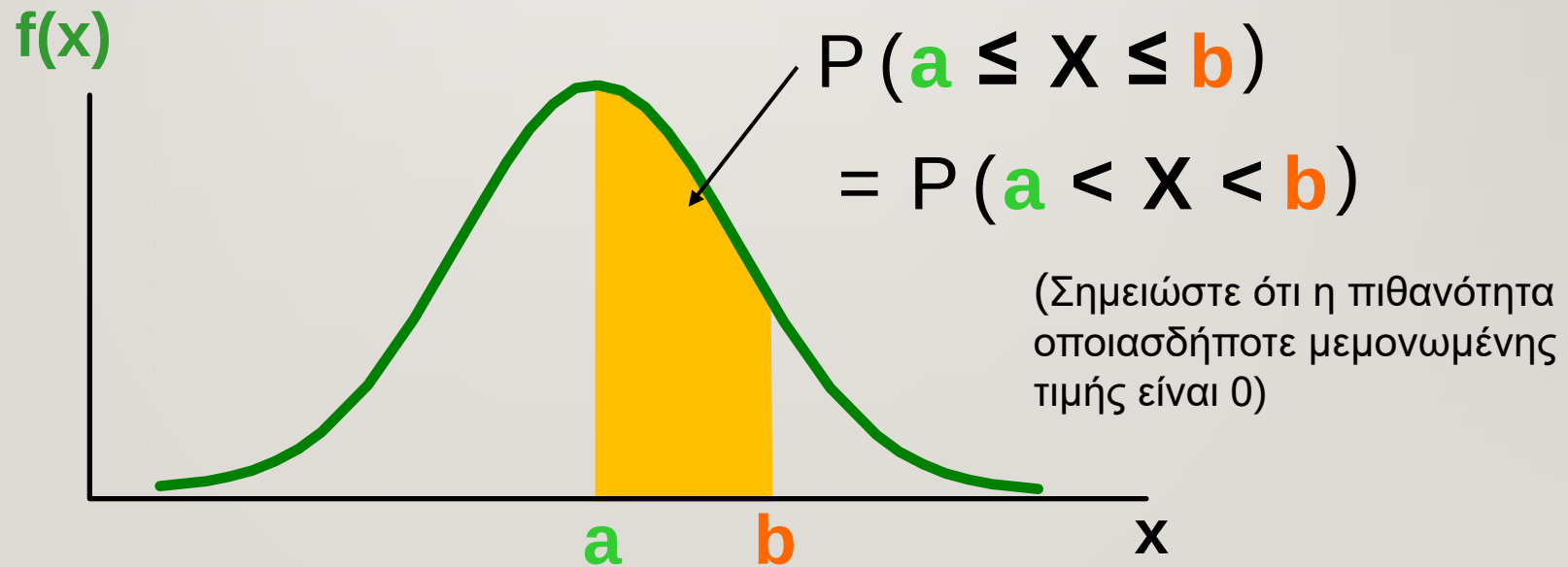


Σημειώστε ότι το σχήμα της κατανομής είναι το ίδιο, αλλά **η κλίμακα** έχει αλλάξει.

Μπορούμε να εκφράσουμε το πρόβλημα στις αρχικές του μονάδες (X σε δολάρια) ή σε τυποποιημένες μονάδες (Z)

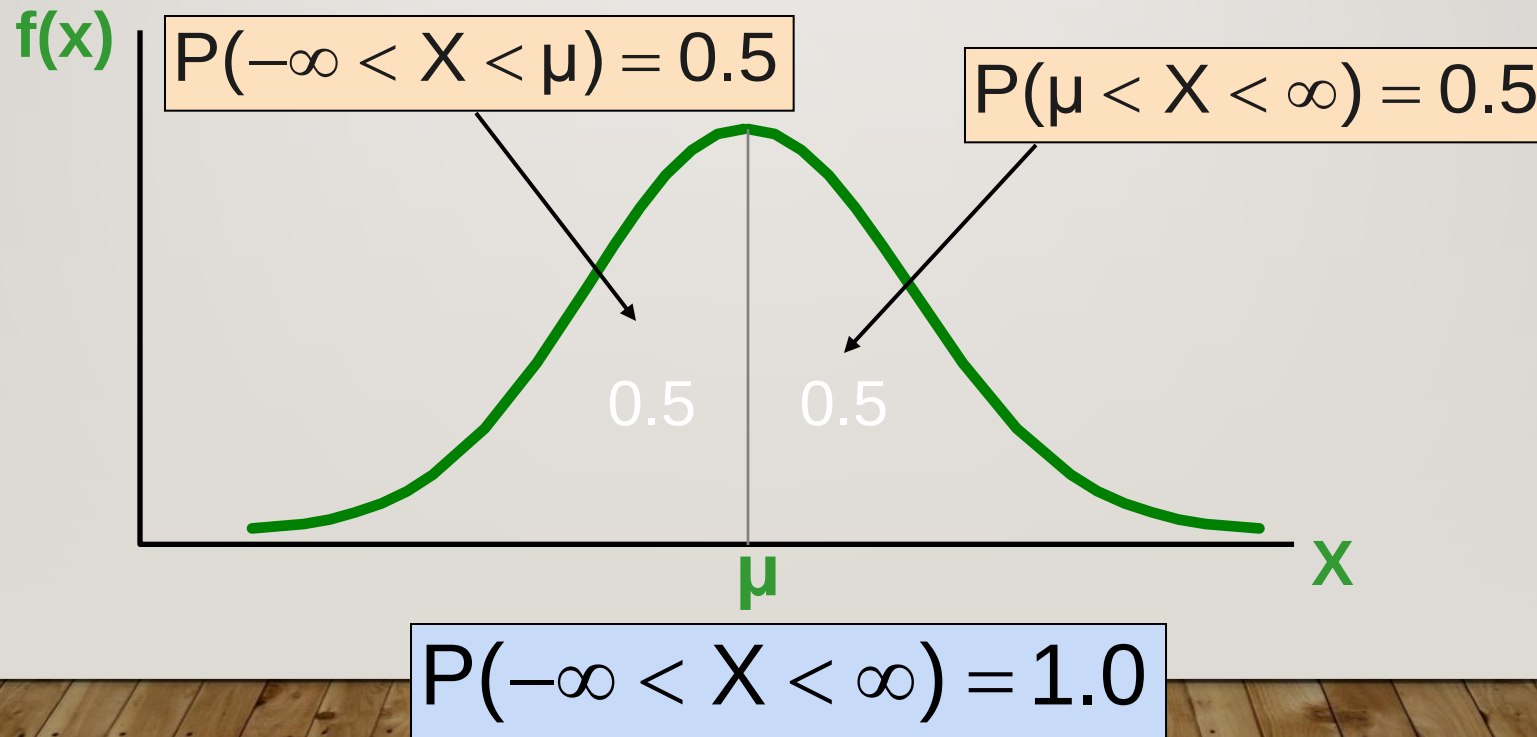
Εύρεση Κανονικών Πιθανοτήτων

Η πιθανότητα μετρείται
από την περιοχή **κάτω** από την καμπύλη



Η Πιθανότητα ως Περιοχή Κάτω Από την Καμπύλη

Η **συνολική περιοχή κάτω από την καμπύλη** είναι 1 και η καμπύλη είναι συμμετρική ως προς τη μέση τιμή. Έτσι το μισό είναι πάνω από τη μέση τιμή και το άλλο μισό κάτω



Πίνακας Τυπικής Κανονικής

Ο Πίνακας Τυπικής Κανονικής δίνει την πιθανότητα η Z να πάρει τιμή **μικρότερη ή ίση από** μια επιθυμητή τιμή (δηλ. από το αρνητικό άπειρο στο Z)

Η τιμή μέσα στον πίνακα δίνει την **πιθανότητα** από το $Z = -\infty$ μέχρι την επιθυμητή Z τιμή

Πίνακας 4. Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή



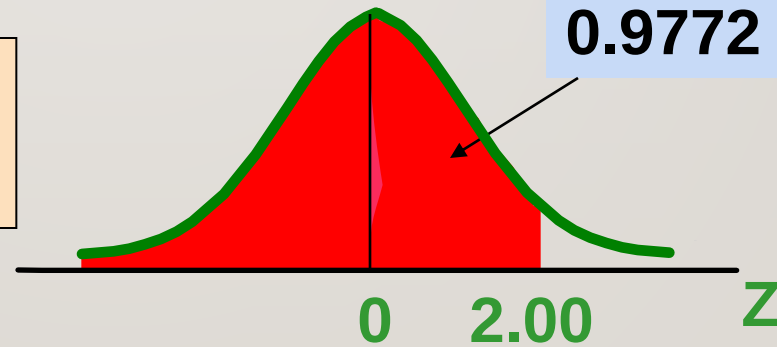
$$\Phi(z) = P(Z \leq z)$$

Τα στοιχεία του πίνακα εκφράζουν τις πιθανότητες $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ που παριστάνονται από το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη της τυποποιημένης κανονικής κατανομής αριστερά από το z .

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Παράδειγμα:

$$\Phi(2) = P(Z \leq 2.00) = 0.9772$$



Η Πιθανότητα ως Περιοχή Κάτω Από την Καμπύλη της Τυπικής Κανονικής Κατανομής

$$P(\alpha \leq Z \leq \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

$$P(Z > \alpha) = 1 - P(Z \leq \alpha) = 1 - \Phi(\alpha)$$

$$P(-\alpha \leq Z \leq \alpha) = \Phi(\alpha) - \Phi(-\alpha) = 2 \cdot \Phi(\alpha) - 1$$

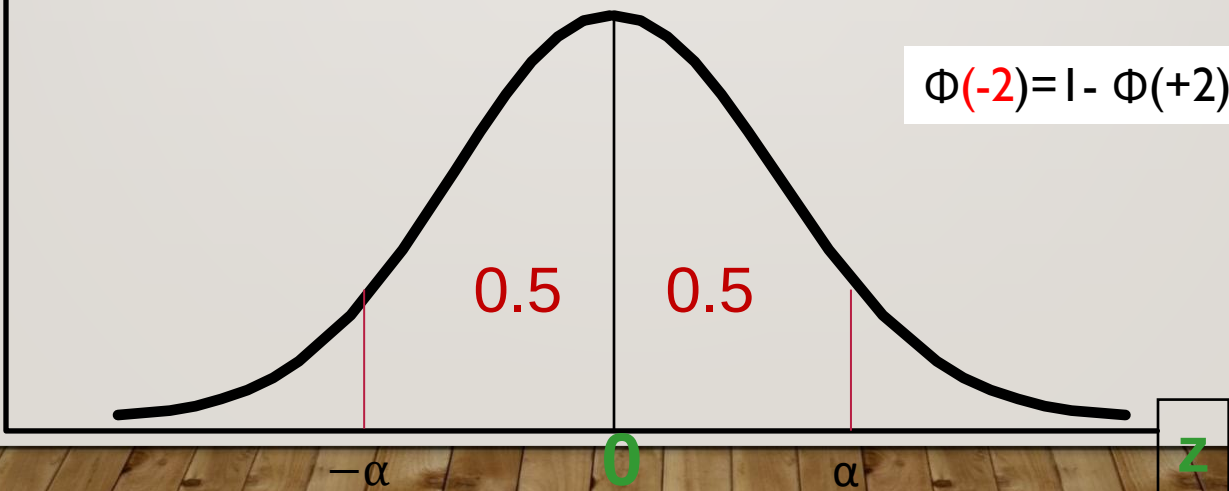
	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-0.9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
-0.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
-0.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
-0.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
-0.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
-0.3	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007
-0.2	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010
-0.1	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013
0.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013
0.1	0.0015	0.0015	0.0015	0.0015	0.0015	0.0015	0.0015	0.0015	0.0015	0.0015
0.2	0.0019	0.0019	0.0019	0.0019	0.0019	0.0019	0.0019	0.0019	0.0019	0.0019
0.3	0.0024	0.0024	0.0024	0.0024	0.0024	0.0024	0.0024	0.0024	0.0024	0.0024
0.4	0.0028	0.0028	0.0028	0.0028	0.0028	0.0028	0.0028	0.0028	0.0028	0.0028
0.5	0.0033	0.0033	0.0033	0.0033	0.0033	0.0033	0.0033	0.0033	0.0033	0.0033
0.6	0.0038	0.0038	0.0038	0.0038	0.0038	0.0038	0.0038	0.0038	0.0038	0.0038
0.7	0.0044	0.0044	0.0044	0.0044	0.0044	0.0044	0.0044	0.0044	0.0044	0.0044
0.8	0.0050	0.0050	0.0050	0.0050	0.0050	0.0050	0.0050	0.0050	0.0050	0.0050
0.9	0.0056	0.0056	0.0056	0.0056	0.0056	0.0056	0.0056	0.0056	0.0056	0.0056
1.0	0.0062	0.0062	0.0062	0.0062	0.0062	0.0062	0.0062	0.0062	0.0062	0.0062
1.1	0.0068	0.0068	0.0068	0.0068	0.0068	0.0068	0.0068	0.0068	0.0068	0.0068
1.2	0.0074	0.0074	0.0074	0.0074	0.0074	0.0074	0.0074	0.0074	0.0074	0.0074
1.3	0.0079	0.0079	0.0079	0.0079	0.0079	0.0079	0.0079	0.0079	0.0079	0.0079
1.4	0.0084	0.0084	0.0084	0.0084	0.0084	0.0084	0.0084	0.0084	0.0084	0.0084
1.5	0.0088	0.0088	0.0088	0.0088	0.0088	0.0088	0.0088	0.0088	0.0088	0.0088
1.6	0.0092	0.0092	0.0092	0.0092	0.0092	0.0092	0.0092	0.0092	0.0092	0.0092
1.7	0.0096	0.0096	0.0096	0.0096	0.0096	0.0096	0.0096	0.0096	0.0096	0.0096
1.8	0.0099	0.0099	0.0099	0.0099	0.0099	0.0099	0.0099	0.0099	0.0099	0.0099
1.9	0.0101	0.0101	0.0101	0.0101	0.0101	0.0101	0.0101	0.0101	0.0101	0.0101

$\Phi(z)$

$$\Phi(-\alpha) = 1 - \Phi(\alpha)$$

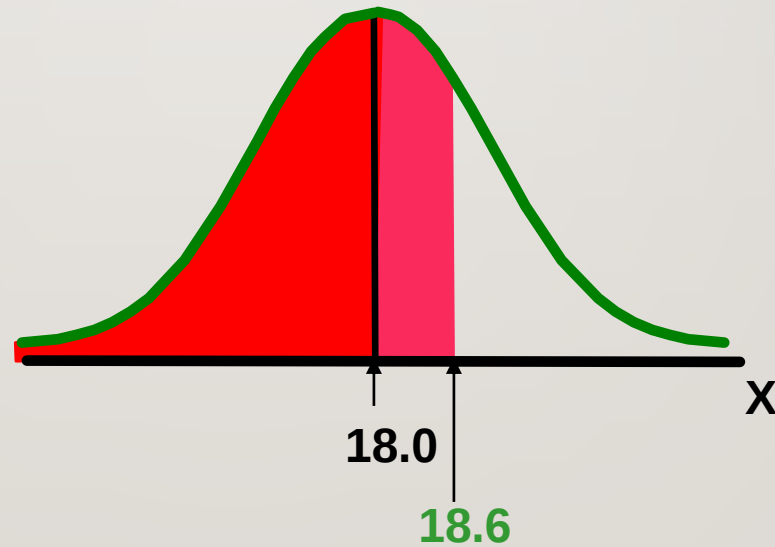
$$\Phi(-2) = 1 - \Phi(+2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$



Εύρεση Κανονικών Πιθανοτήτων

- Θεωρείστε ότι το X παριστάνει το χρόνο που χρειάζεται (σε δευτερόλεπτα) για να κατεβάσετε ένα αρχείο εικόνας από το διαδίκτυο.
- Υποθέστε ότι η X είναι κανονική με μέση τιμή 18.0 δευτερόλεπτα και τυπική απόκλιση 5.0 δευτερόλεπτα.
- Βρείτε την $P(X < 18.6)$

$$X \sim N(\mu = 18, \sigma = 5)$$



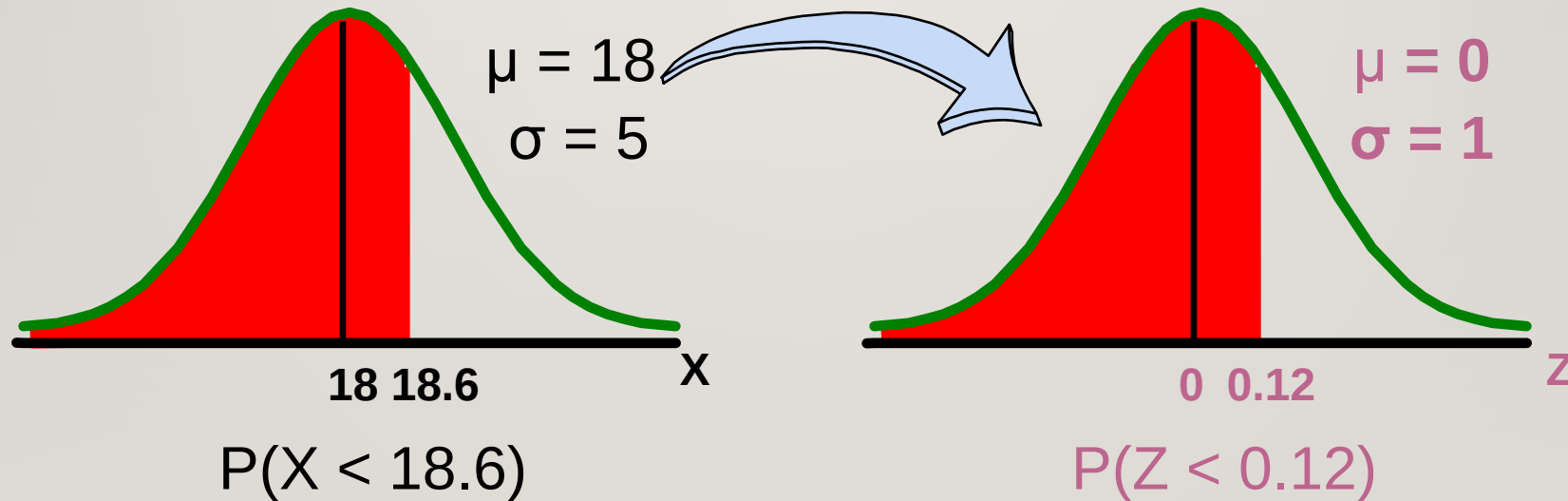
Εύρεση Κανονικών Πιθανοτήτων

(συνέχεια)

Θεωρείστε ότι το X παριστάνει το χρόνο που χρειάζεται, σε δευτερόλεπτα για να κατεβάσετε ένα αρχείο εικόνας από το διαδίκτυο. Υποθέστε ότι η X είναι κανονική με μέση τιμή 18.0 δευτερόλεπτα και τυπική απόκλιση 5.0 δευτερόλεπτα.

Βρείτε την $P(X < 18.6)$
Τυποποίηση

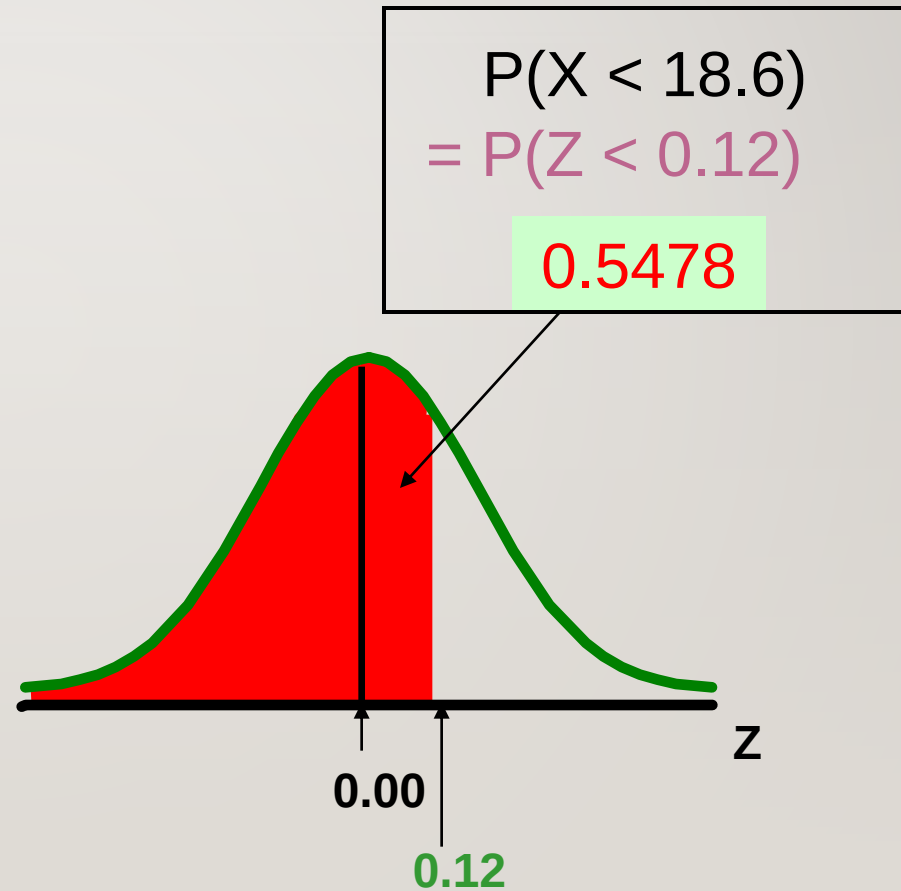
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{18.6 - 18.0}{5.0} = 0.12$$



Λύση: Εύρεση της $P(Z < 0.12)$

Πίνακας Τυπικής Κανονικής

Z	.00	.01	.02
0.0	.5000	.5040	.5080
0.1	.5398	.5438	.5478
0.2	.5793	.5832	.5871
0.3	.6179	.6217	.6255

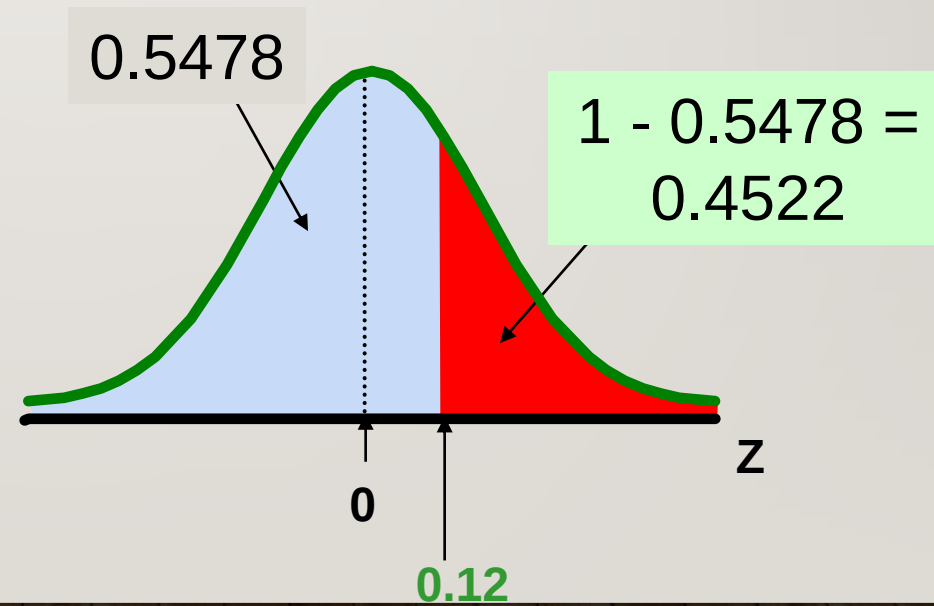
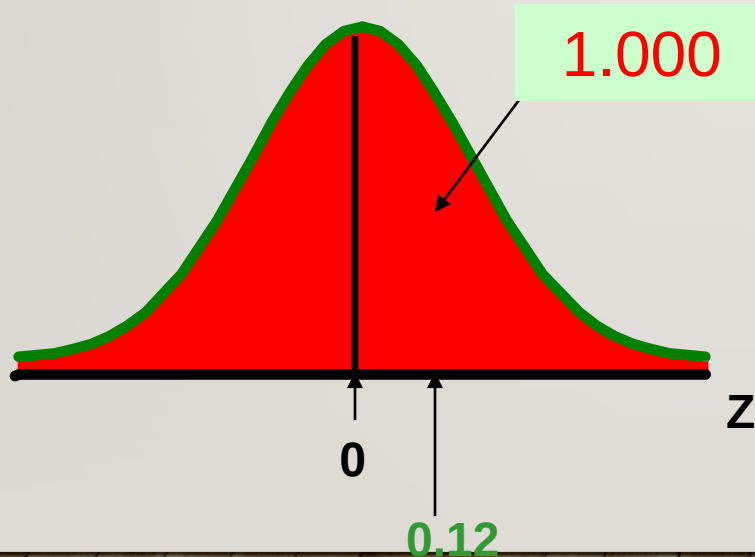


Εύρεση Κανονικών Πιθανοτήτων Άνω Άκρου

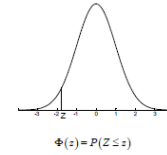
Βρείτε την $P(X > 18.6)$

$$P(X > 18.6) = P(Z > 0.12) = 1 - P(Z \leq 0.12)$$

$$= 1 - 0.5478 = 0.4522$$



Πίνακας 4. Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή



Τα στοιχεία του πίνακα εκφράζουν τις πιθανότητες $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ που παριστάνονται από το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη της τυποποιημένης κανονικής κατανομής αριστερά από το z .

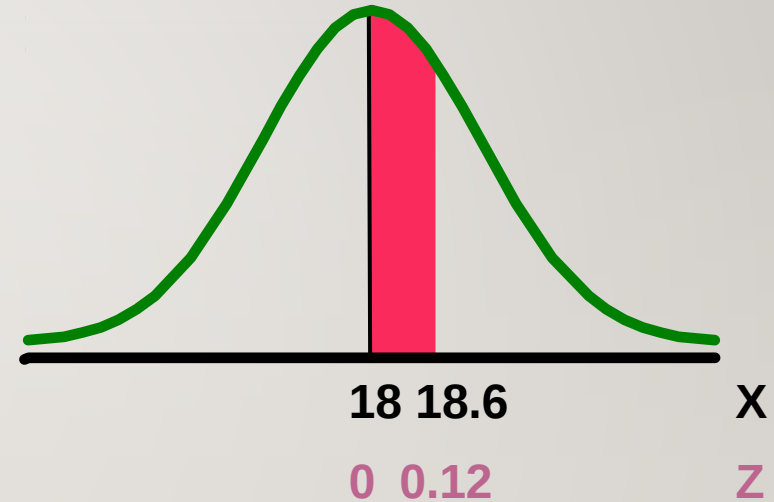
Εύρεση Κανονικής Πιθανότητας Μεταξύ Δύο Τιμών

Υποθέστε ότι η X είναι κανονική με μέση τιμή 18.0
και τυπική απόκλιση 5.0. Βρείτε την $P(18 < X < 18.6)$

Υπολογίζετε τις Z-τιμές :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{18 - 18}{5} = 0$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{18.6 - 18}{5} = 0.12$$



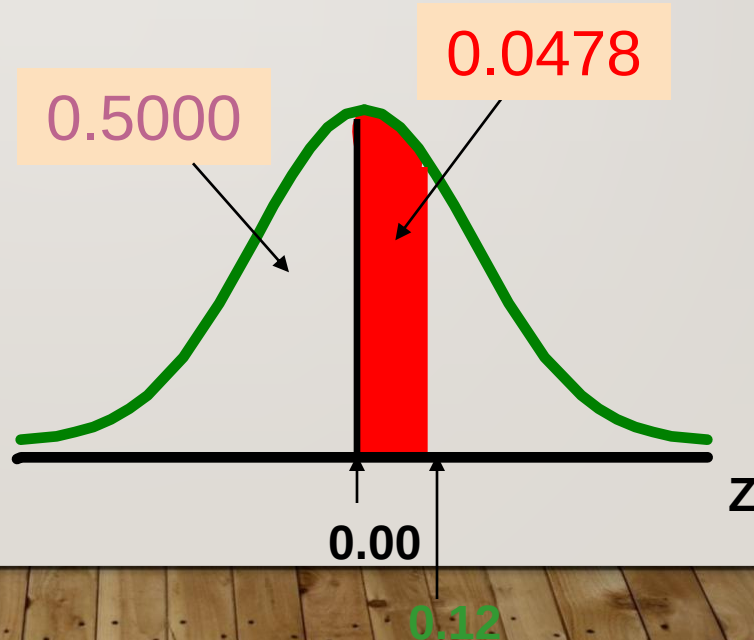
$$P(18 < X < 18.6) \\ = P(0 < Z < 0.12)$$

Λύση: Εύρεση της $P(0 < Z < 0.12)$

Πίνακας Τυποποιημένης
Κανονικής Πιθανότητας

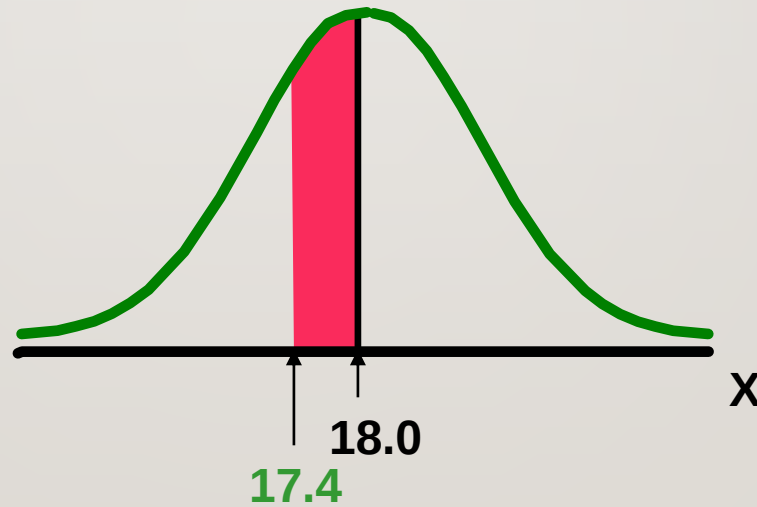
Z	.00	.01	.02
0.0	.5000	.5040	.5080
.1	.5398	.5438	.5478
0.2	.5793	.5832	.5871
0.3	.6179	.6217	.6255

$$\begin{aligned} P(18 < X < 18.6) \\ &= P(0 < Z < 0.12) \\ &= \Phi(0.12) - \Phi(0) = \\ &= P(Z \leq 0.12) - P(Z \leq 0) \\ &= 0.5478 - 0.5000 = 0.0478 \end{aligned}$$



Πιθανότητες στο Κάτω Άκρο

- Υποθέστε ότι η X είναι κανονική με μέση τιμή 18.0 και τυπική απόκλιση 5.0
- Βρείτε την $P(17.4 < X < 18)$



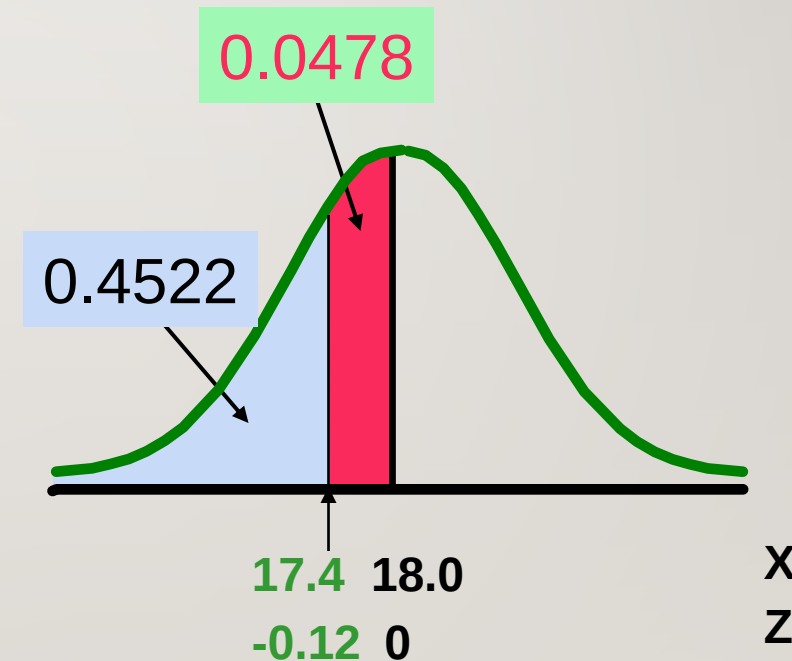
Πιθανότητες στο Κάτω Άκρο

Βρείτε την $P(17.4 < X < 18)$

(συνέχεια)

$$\begin{aligned} &P(17.4 < X < 18) \\ &= P(-0.12 < Z < 0) \\ &= P(Z \leq 0) - P(Z \leq -0.12) \\ &= 0.5000 - 0.4522 = \boxed{0.0478} \end{aligned}$$

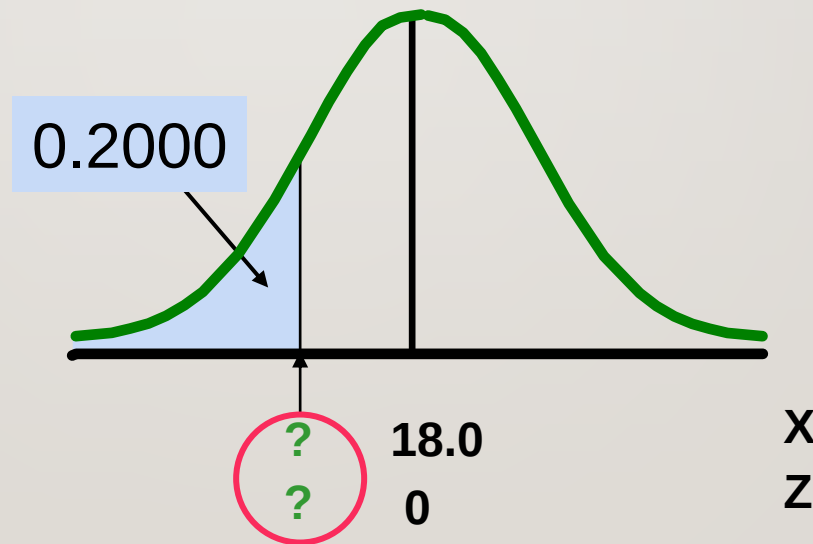
$$\begin{aligned} \Phi(-\alpha) &= 1 - \Phi(\alpha) \\ P(Z \leq -0.12) &= 1 - P(Z \leq +0.12) \\ &= 1 - 0.5478 \\ &= 0.4522 \end{aligned}$$



Εύρεση της Τιμής X για μία Γνωστή Πιθανότητα

Παράδειγμα:

- Θεωρείστε ότι το X παριστάνει το χρόνο που χρειάζεται (σε δευτερόλεπτα) για να κατεβάσετε ένα αρχείο εικόνας από το διαδίκτυο. Υποθέστε ότι η X είναι κανονική με μέση τιμή 18.0 και τυπική απόκλιση 5.0
- Βρείτε **την τιμή του χρόνου** για την οποία το 20% των τιμών χρόνου είναι μικρότερες από αυτή



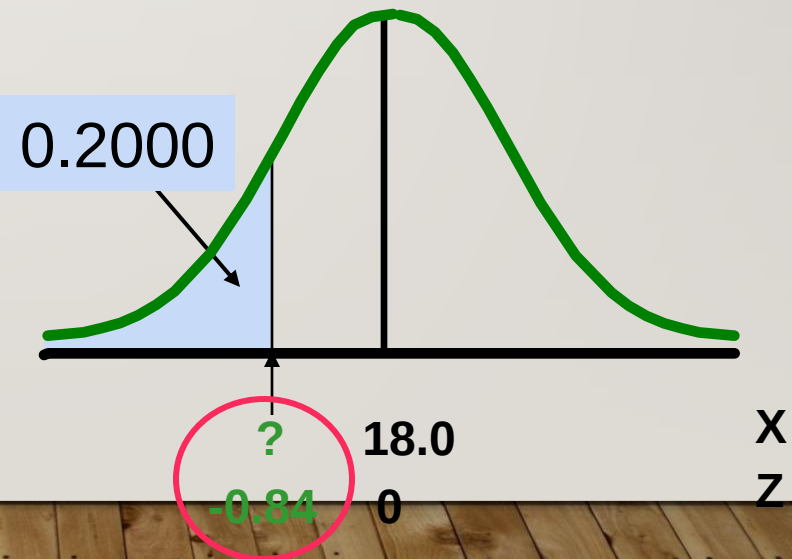
Βρείτε την Z τιμή για το 20% στο Κάτω Άκρο

1. Βρείτε την Z τιμή για την **γνωστή** πιθανότητα

Πίνακας Τυποποιημένης Κανονικής
Πιθανότητας (Με αρνητικά Z)

Z	...	.03	.04	.05
-0.9	...	.1762	.1736	.1711
-0.8	...	.2033	.2005	.1977
-0.7	...	.2327	.2296	.2266

- Το 20% της περιοχής στο κάτω άκρο συνδέεται με μια Z τιμή **-0.84**



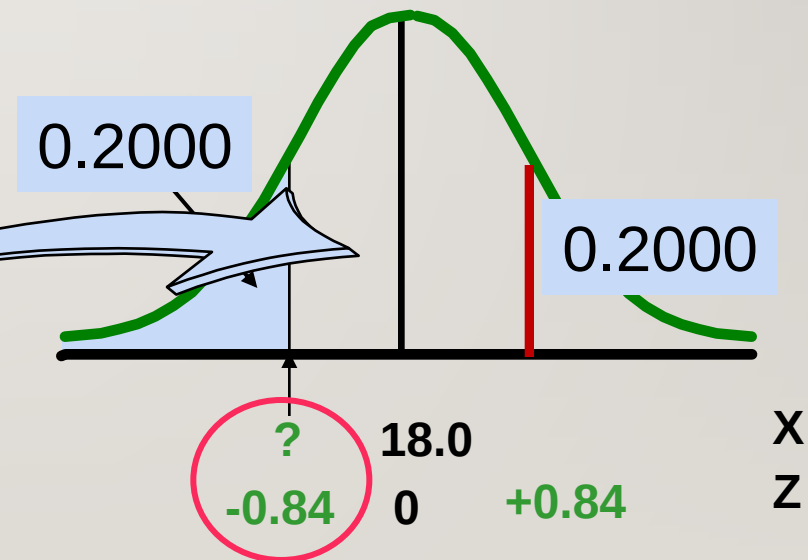
Βρείτε την Z τιμή για το 20% στο Κάτω Άκρο

1. Βρείτε την Z τιμή για την **γνωστή** πιθανότητα

Πίνακας Τυποποιημένης Κανονικής
Πιθανότητας (Με θετικά Z)

Z	...	.03	.04	.05
0.7	...	.		
0.8	...	.7967	.7995	.8023
0.9	...			

- Το $1-20=80\%$ της περιοχής συνδέεται με μια Z τιμή **+0.84**



Εύρεση της X Τιμής

2. Μετατροπή σε X μονάδες χρησιμοποιώντας τον μαθηματικό τύπο:

$$Z = -0.84$$

$$\begin{aligned} X &= \mu + Z\sigma \\ &= 18.0 + (-0.84) * 5.0 \\ &= 13.8 \end{aligned}$$

Έτσι το 20% των τιμών από μια κατανομή με μέση τιμή 18.0 και τυπική απόκλιση 5.0 είναι τιμές **μικρότερες** από 13.80

1^ο Πρόβλημα

Η Δ/νση πωλήσεων μιας εταιρίας απασχολεί συνολικά 20 πωλητές των οποίων οι ετήσιες αξίες πωλήσεων σε χρηματικές μονάδες (χ.μ.) για το περασμένο έτος ακολουθούν Κανονική κατανομή με μέση τιμή 8 χμ και τυπική απόκλιση 0,5 χμ.

Να υπολογιστεί ο αριθμός των πωλητών της εταιρίας των οποίων η αξία των πωλήσεων για το περασμένο έτος κυμάνθηκε μεταξύ 7,29 και 9,0 χμ



Λύση

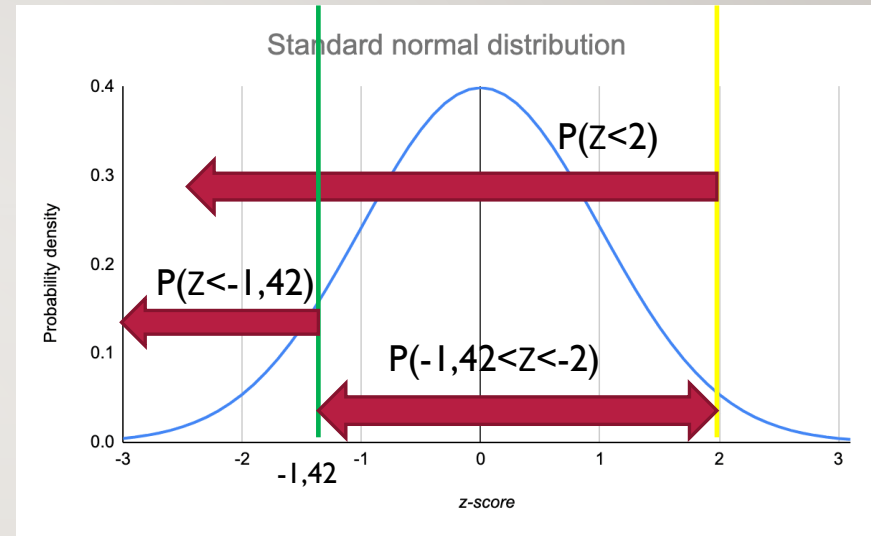
Έστω X η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει την ετήσια αξία πωλήσεων των πωλητών. Δίνεται ότι η X ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 8χμ και τυπική απόκλιση 0,5χμ δηλαδή $X \sim N(\mu = 8, \sigma^2 = 0,5^2)$

(α) Ζητάμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα: $P(7,29 < X < 9,0)$

ΤΥΠΟΠΟΙΩ

$$\begin{aligned} P(7,29 < X < 9,0) &= P\left(\frac{7,29 - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{9,0 - \mu}{\sigma}\right) = \\ &= P\left(\frac{7,29 - 8}{0,5} < Z < \frac{9,0 - 8}{0,5}\right) = P\left(\frac{-0,71}{0,5} < Z < \frac{1,0}{0,5}\right) = \\ &= P(-1,42 < Z < 2,0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= P(Z < 2,0) - P(Z < -1,42) \\ &= P(Z < 2,0) - P(Z > 1,42) \quad \text{"} P(Z < -1,42) = P(Z > 1,42) \text{ λόγω συμμετρίας"} \\ &= P(Z < 2,0) - (1 - P(Z < 1,42)) \\ &= P(Z < 2,0) + P(Z < 1,42) - 1 \\ &= 0,9772 + 0,9222 - 1 \\ &= 0,8994 \end{aligned}$$



Τις βρίσκουμε από τους πίνακες ή μπορούμε στο excel με τη χρήση της συνάρτησης =NORM.S.DIST(2;TRUE)

Ο ζητούμενος αριθμός πωλητών είναι $20 \cdot 0,8994 = 17,998 = 18$

$$\begin{aligned}
 &= P(Z < 2.0) + P(Z < 1.42) - 1 \\
 &= 0.9772 + 0.9222 - 1 \\
 &= 0.8994
 \end{aligned}$$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997

Standard Normal Probabilities

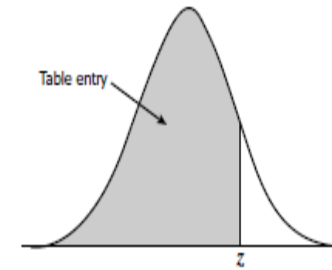


Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z .

2ο Πρόβλημα

Ο χρόνος εκτύπωσης των αρχείων που αποστέλλονται από τους υπαλλήλους μιας εταιρείας στον κεντρικό εκτυπωτή ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 2 min και διακύμανση $6,25 \text{ min}^2$.

A) Να υπολογισθεί η πιθανότητα το επόμενο αρχείο που θα σταλεί για εκτύπωση να

Χρειαστεί χρόνο:

i) μεγαλύτερο από 2,3 λεπτά

i) μεταξύ 1,35 και 3 λεπτών.

B) Να υπολογισθεί η πιθανότητα μεταξύ 3 αρχείων που στέλνονται ανεξάρτητα για εκτύπωση το ένα ακριβώς να εκτυπωθεί σε χρόνο μικρότερο του 1,5 λεπτού

Γ) Ο Προϊστάμενος Πληροφορικής της εταιρείας στο πλαίσιο της διερεύνησης του για την ανάγκη προμήθειας ενός ταχύτερου εκτυπωτή πρέπει, μεταξύ άλλων, να υπολογίσει ποιος είναι, κάτω από τις παρούσες συνθήκες, ο χρόνος εκτύπωσης τον οποίο υπερβαίνουν μόνο το 5% από τα αποστελλόμενα προς εκτύπωση αρχεία. Να υπολογισθεί ο χρόνος αυτός.



Λύση

Αι) Έστω X είναι η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το χρόνο εκτύπωσης. Δίνεται ότι

$$X \sim N(\mu = 2 \text{ min}, \sigma^2 = 6,25 \text{ min}^2)$$

Ζητάμε την πιθανότητα: $P(X > 2,3)$

Τυποποιώ

$$\begin{aligned} P(X > 2,3) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{2,3 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z > \frac{2,3 - 2}{2,5}\right) \\ &= P(Z > 0,12) \\ &= 1 - P(Z < 0,12) \\ &= 1 - \Phi(0,12) \\ &= 1 - 0,5478 \\ &= 0,4522 \end{aligned}$$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177

Aii) Ζητάμε την πιθανότητα: $P(1,35 < X < 3)$

Τυποποιώ

$$\begin{aligned} P(1,35 < X < 3) &= P\left(\frac{1,35 - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{3 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{1,35 - 2}{2,5} < Z < \frac{3 - 2}{2,5}\right) \\ &= P(-0,26 < Z < 0,4) \\ &= P(Z < 0,4) - P(Z < -0,26) \\ &= P(Z < 0,4) + P(Z < 0,26) - 1 \\ &= 0,6554 + 0,6026 - 1 \\ &= 0,2580 \end{aligned}$$

$\Phi(-\alpha) = 1 - \Phi(\alpha)$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177

Να υπολογισθεί η πιθανότητα μεταξύ 3 αρχείων που στέλνονται ανεξάρτητα για εκτύπωση το ένα ακριβώς να εκτυπωθεί σε χρόνο μικρότερο του 1,5 λεπτών

Β) Θα υπολογίσουμε αρχικά την πιθανότητα ένα τυχαίο αρχείο να εκτυπωθεί σε χρόνο λιγότερο από 1,5 λεπτά.
Η πιθανότητα αυτή είναι:

Τυποποιώ

$$\begin{aligned}P(X < 1,5) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{1,5 - \mu}{\sigma}\right) \\&= P\left(Z < \frac{1,5 - 2}{2,5}\right) \\&= P(Z < -0,2)\end{aligned}$$

$$\Phi(-\alpha) = 1 - \Phi(\alpha)$$

$$\begin{aligned}&= 1 - P(Z < 0,2) \\&= 1 - 0,5793 \\&= 0,4207\end{aligned}$$

Να υπολογισθεί η πιθανότητα μεταξύ 3 αρχείων που στέλνονται ανεξάρτητα για εκτύπωση το ένα ακριβώς να εκτυπωθεί σε χρόνο μικρότερο του 1,5 λεπτού

Έστω Y είναι μία νέα τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον αριθμό των αρχείων που εκτυπώνονται σε χρόνο μικρότερο από 1,5 λεπτά, στα 3 συνολικά αρχεία, που ανεξάρτητα στέλνονται για εκτύπωση. Τότε
Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$Y \sim B(n=3, p=0,4207)$$

$$P(Y=1) = \binom{3}{1} p^1 (1-p)^2 = 3 \cdot 0,4207 \cdot (1-0,4207)^2 = 0,4235$$



[illegible]