Εβδομαδιαίοι Μαθηματικοί Γρίφοι

Διακριτά Μαθηματικά - Γιώργος Αμανατίδης

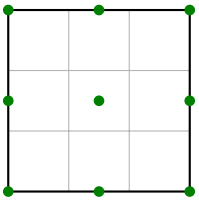
Πρόβλημα 1 (Δέκα σημεία σε ένα τετράγωνο). Έστω ΑΒΓΔ τετράγωνο με πλευρά 3 και $X_1, \ldots, X_{10}$ δέκα οποιαδήποτε σημεία του τετραγώνου.

(α′) Δείξτε ότι υπάρχουν πάντα δύο από αυτά, X_i, X_j με $i \neq j$, που απέχουν το πολύ $\sqrt{2}$.

(β′) Ισχύει το ίδιο αν αντί για 10 έχουμε 9 σημεία;

Λύση. (α) Χωρίζουμε το τετράγωνο σε 9 τετράγωνα πλευράς 1. Αφού έχουμε 10 σημεία και 9 τετραγωνάκια, κάποιο τετραγωνάκι περιέχει τουλάχιστον δύο από τα σημεία (αρχή του περιστερώνα). Όμως δύο σημεία ενός τετραγώνου πλευράς 1 απέχουν το πολύ όσο η διαγώνιός του, δηλαδή $\sqrt{2}$.

(β) Όχι. Παίρνουμε τις 4 κορυφές, τα 4 μέσα των πλευρών και το κέντρο του τετραγώνου. Κάθε δύο από αυτά τα 9 σημεία απέχουν τουλάχιστον $1{,}5 > \sqrt{2}$.



Πρόβλημα 2 (Η κομμένη σκακιέρα). Μας δίνεται μία 8×8 σκακιέρα και κάποια ντόμινο, κατασκευασμένα έτσι ώστε το κάθε ντόμινο να μπορεί να καλύψει ακριβώς δύο γειτονικά τετράγωνα της σκακιέρας. Από τη σκακιέρα αφαιρούμε δύο γωνιακά τετράγωνα: το πάνω αριστερά και το κάτω δεξιά. Μπορούμε να καλύψουμε την υπόλοιπη σκακιέρα με 31 ντόμινο;

Λύση. Όχι. Οι δύο διαγώνια αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο χρώμα, οπότε μένουν 32 τετράγωνα του ενός χρώματος και 30 του άλλου. Κάθε ντόμινο καλύπτει ένα λευκό και ένα μαύρο τετράγωνο, άρα 31 ντόμινο καλύπτουν 31 λευκά και 31 μαύρα. Επομένως η κάλυψη είναι αδύνατη.

Πρόβλημα 3 (Ιππότες και απατεώνες). Σε ένα νησί κάθε κάτοικος είναι είτε *ιππότης*, που λέει πάντα την αλήθεια, είτε *απατεώνας*, που λέει πάντα ψέματα.

(α′) Συναντάτε δύο κατοίκους, τον Α και τον Β. Ο Α λέει: «Είμαστε και οι δύο απατεώνες.» Τι είναι ο καθένας·

(β′) Σε άλλη μέρα συναντάτε δύο άλλους κατοίκους, τον Γ και τον Δ. Ο Γ λέει: «Ο Δ είναι ιππότης.» Ο Δ λέει: «Ο Γ κι εγώ είμαστε διαφορετικού είδους.» Τι είναι ο καθένας·

Λύση. (α) Ένας ιππότης δεν θα μπορούσε ποτέ να πει «είμαι απατεώνας», άρα ο Α είναι απατεώνας. Τότε η πρότασή του είναι ψευδής, δηλαδή *δεν* είναι και οι δύο απατεώνες. Αφού ο Α είναι, ο Β είναι ιππότης.

(β) Αν ο Γ ήταν ιππότης, ο Δ θα ήταν επίσης ιππότης, άρα θα έλεγε αλήθεια ότι είναι διαφορετικού είδους από τον Γ. Αυτό είναι άτοπο, αφού και οι δύο θα ήταν ιππότες. Άρα ο Γ είναι απατεώνας και η πρότασή του είναι ψευδής: ο Δ είναι επίσης απατεώνας. Πράγματι, τότε ο Δ λέει ψέματα ότι είναι διαφορετικού είδους από τον Γ. Και οι δύο είναι απατεώνες.

Πρόβλημα 4 (Το πάρτι των έξι). Σε ένα πάρτι βρίσκονται έξι άτομα. Κάθε δύο από αυτούς είτε γνωρίζονται είτε δεν γνωρίζονται. Δείξτε ότι υπάρχουν πάντα τρία άτομα που γνωρίζονται όλοι μεταξύ τους ή τρία άτομα που δεν γνωρίζεται κανένας με κανέναν.

Λύση. Διαλέγουμε ένα άτομο, έστω τον Α. Οι υπόλοιποι πέντε χωρίζονται σε δύο ομάδες: αυτούς που γνωρίζει ο Α και αυτούς που δεν γνωρίζει. Αφού είναι πέντε άτομα σε δύο ομάδες, μία ομάδα έχει τουλάχιστον τρία άτομα. Έστω ότι ο Α γνωρίζει τους Β, Γ, Δ (η άλλη περίπτωση είναι ίδια, αν αλλάξουμε τους ρόλους του «γνωρίζονται» και του «δεν γνωρίζονται»). Αν δύο από τους Β, Γ, Δ γνωρίζονται, τότε μαζί με τον Α σχηματίζουν τρία άτομα που γνωρίζονται όλοι μεταξύ τους. Αν κανένας από τους Β, Γ, Δ δεν γνωρίζει κανέναν άλλον από αυτούς, τότε οι Β, Γ, Δ είναι τρεις άγνωστοι μεταξύ τους.

Πρόβλημα 5 (Κόψτε το σχήμα στα δύο). Το παρακάτω σχήμα αποτελείται από ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς a και ένα κυκλικό τόξο με κέντρο την κορυφή Γ, που ξεκινά από την Α και καταλήγει στο σημείο Ε της προέκτασης της ΑΒ, με $\mathrm{BE} = a$. Δεδομένου ότι το σχήμα μπορεί να χωριστεί με μια τεθλασμένη γραμμή σε δύο ίσα σχήματα, βρείτε μια τέτοια γραμμή.

