Φροντιστήριο 3

Ισχυρή Επαγωγή, Ισοδυναμία Συνόλων & Προτασιακή Λογική

Α. Ισχυρή Επαγωγή

1. Βρείτε τον μεγαλύτερο αριθμό πόντων που μια ομάδα αμερικανικού ποδοσφαίρου *δεν* μπορεί να πετύχει ακριβώς, χρησιμοποιώντας μόνο φιλντ-γκολ των 3 πόντων και τάτσνταουν των 7 πόντων. Αποδείξτε την απάντησή σας με μαθηματική επαγωγή.

2. Ένα τετράγωνο μπορεί να κοπεί σε μικρότερα τετράγωνα, κόβοντας κατά μήκος ευθειών παράλληλων στις πλευρές του (οι ευθείες δεν χρειάζεται να διατρέχουν όλο το μήκος της πλευράς). Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας **ισχυρή επαγωγή**, ότι είναι δυνατόν να κόψουμε ένα τετράγωνο σε n μικρότερα τετράγωνα, για κάθε $n \geq 6$.
Υπόδειξη: θα χρειαστείτε τρεις βασικές περιπτώσεις.

3. Αποδείξτε, με μαθηματική επαγωγή, ότι $2^n < n!$ για κάθε $n \geq 4$.

Β. Ισοδυναμία Συνόλων

1. Δείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο X τέτοιο ώστε $X \sim \mathcal{P}(X)$.

Γ. Προτασιακή Λογική

1. Ο Νίκος σάς έλεγε τι έφαγε χθες το απόγευμα. Σας λέει: «Είχα είτε ποπκόρν είτε σταφίδες. Επίσης, αν είχα σάντουιτς αγγούρι, τότε ήπια σόδα. Αλλά δεν ήπια ούτε σόδα ούτε τσάι.» Ξέρετε ότι ο Νίκος είναι ο χειρότερος ψεύτης του κόσμου και ό,τι λέει είναι ψευδές. Τι έφαγε τελικά ο Νίκος; Δικαιολογήστε γράφοντας τις δηλώσεις του με προτασιακές μεταβλητές, παίρνοντας τις αρνήσεις τους, και συμπεραίνοντας από αυτές.

2. Ένας φίλος σας έδειξε μια «απόδειξη» ότι $1 = 3$: «Ισχυρίζομαι ότι $1 = 3$. Μπορούμε να κάνουμε οτιδήποτε σε μία πλευρά μιας εξίσωσης, αρκεί να το κάνουμε και στην άλλη. Αφαιρούμε λοιπόν το 2 και από τις δύο πλευρές: $-1 = 1$. Υψώνουμε στο τετράγωνο και τις δύο πλευρές: $1 = 1$. Και όλοι συμφωνούμε ότι αυτό είναι αληθές.» Είναι έγκυρο αυτό το επιχείρημα; Αποδεικνύει τον ισχυρισμό $1 = 3$; Εξηγήστε χρησιμοποιώντας όσα ξέρετε για τις προτάσεις και τις συνεπαγωγές.

3. *Γρίφος:* Ο Χολμς έχει δύο κοστούμια: ένα μαύρο και ένα καρό. Πάντα φοράει είτε το καρό κοστούμι είτε σανδάλια. Όποτε φοράει το καρό κοστούμι μαζί με μοβ πουκάμισο, επιλέγει να μη φοράει ούτε γραβάτα ούτε παπιγιόν. Ποτέ δεν φοράει το καρό κοστούμι εκτός αν φοράει επίσης είτε μοβ πουκάμισο είτε σανδάλια. Όποτε φοράει σανδάλια, φοράει και μοβ πουκάμισο. Χθες ο Χολμς φορούσε παπιγιόν. Τι άλλο φορούσε;

4. Αποφασίστε ποιες από τις παρακάτω είναι έγκυρες αποδείξεις της πρότασης «Αν το γινόμενο ab είναι άρτιος αριθμός, τότε ο a ή ο b είναι άρτιος» (όλη η άλγεβρα είναι σωστή – ελέγξτε μόνο τη λογική δομή).

(α′) Έστω οι a και b περιττοί, δηλ. $a = 2k + 1$, $b = 2m + 1$. Τότε $ab = (2k + 1)(2m + 1) = 4km + 2k + 2m + 1 = 2(2km + k + m) + 1$. Άρα ο ab είναι περιττός.

(β′) Υποθέστε ότι ο a ή ο b είναι άρτιος – έστω ο $a = 2k$. Τότε $ab = (2k)b = 2(kb)$. Άρα ο ab είναι άρτιος.

(γ΄) Υποθέστε ότι ο ab είναι άρτιος αλλά οι a, b είναι και οι δύο περιττοί: $ab = 2n, a = 2k+1, b = 2j+1$. Τότε $2n = 4kj + 2k + 2j + 1$, άρα $n = 2kj + k + j + \frac{1}{2}$. Όμως το $2kj + k + j$ είναι ακέραιος, οπότε ο ακέραιος n θα ισούταν με μη ακέραιο – άτοπο.

(δ΄) Έστω $ab = 2n$ άρτιος και $a = 2k+1$ περιττός. Τότε $ab = (2k+1)b \Rightarrow 2n = 2kb+b \Rightarrow 2(n-kb) = b$. Άρα ο b είναι άρτιος.