Φροντιστήριο 2

Συναρτήσεις & Εισαγωγή στην Επαγωγή

Α. Συναρτήσεις

1. Έστω $A = \{a, b, c\}$ και $B = \{1, 2\}$.

(α΄) Γράψτε όλες τις συναρτήσεις $f : A \to B$ χρησιμοποιώντας τον *συμβολισμό δύο γραμμών*, δηλαδή γράφοντας κάθε f ως $\begin{pmatrix} a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{pmatrix}$: στην πρώτη γραμμή τα στοιχεία του A και κάτω από καθένα η εικόνα του. Πόσες διαφορετικές συναρτήσεις υπάρχουν, και γιατί αυτός ο αριθμός βγάζει νόημα; (Σκεφτείτε την πολλαπλασιαστική αρχή.)

(β΄) Πόσες από τις συναρτήσεις είναι *ενριπτικές*; Πόσες είναι *επιρριπτικές*; Εντοπίστε τις.

2. Έστω $A = \{a, b\}$ και $B = \{1, 2, 3\}$.

(α΄) Γράψτε όλες τις συναρτήσεις $f : A \to B$ χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό δύο γραμμών, δηλαδή γράφοντας κάθε f ως $\begin{pmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{pmatrix}$. Πόσες υπάρχουν;

(β΄) Πόσες από αυτές είναι ενριπτικές; Πόσες επιρριπτικές; Εντοπίστε τις.

3. Με βάση τα παραπάνω, και την πολλαπλασιαστική αρχή, πόσες συναρτήσεις $f : A \to B$ υπάρχουν αν $|A| = 5$ και $|B| = 7$; Πόσες από αυτές είναι ενριπτικές; Πόσες επιρριπτικές; Εξηγήστε.

4. Έστω $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ και $f : \mathcal{P}(A) \to \mathbb{N}$ με $f(B) = |B|$ για κάθε $B \subseteq A$.

(α΄) Είναι η f ενριπτική; Είναι επιρριπτική;

(β΄) Βρείτε τα $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{0\})$ και $f^{-1}(\{12\})$.

Β. Εισαγωγή στην Επαγωγή

1. Ποια ποσά γραμματοσήμων μπορείτε να φτιάξετε χρησιμοποιώντας μόνο γραμματόσημα των 5 λεπτών και 8 λεπτών;

(α΄) *Υπόδειξη 1:* Αν σας έλεγα ότι μπορείτε να φτιάξετε 42 λεπτά χρησιμοποιώντας μόνο γραμματόσημα 5 και 8 λεπτών, ποια άλλα ποσά ξέρετε τώρα ότι μπορείτε να φτιάξετε;

(β΄) *Υπόδειξη 2:* Τι είναι το $42 - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 8$, και τι σχέση έχει με τα γραμματόσημα;

(γ΄) *Υπόδειξη 3:* Αν ξέρατε ότι μπορείτε να φτιάξετε 42 λεπτά, πώς θα δείχνατε ότι μπορείτε να φτιάξετε και 43 λεπτά; Ποιο είναι, τελικά, το μεγαλύτερο ποσό που *δεν* μπορεί να φτιαχτεί;

2. Ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο (μονάδων) του 6^{2017};

(α΄) *Υπόδειξη 1:* Αν ξέρατε ότι το τελευταίο ψηφίο του 6^{2016} είναι 2, θα σας βοηθούσε;

(β΄) *Υπόδειξη 2:* Είναι όμως το τελευταίο ψηφίο του 6^{2016} ίσο με 2; Πώς θα το εξετάζατε αυτό αναδρομικά, ξεκινώντας από το 6^1;