Φροντιστήριο 1

Σύνολα & Σχέσεις

Α. Σύνολα

1. Βρείτε την πληθικότητα κάθε συνόλου παρακάτω ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$).

(α΄) $A = \{3, 4, \dots, 15\}$.

(β΄) $B = \{n \in \mathbb{N} : 2 < n \leq 200\}$.

(γ΄) $C = \{n \leq 100 : n \in \mathbb{N} \text{ και } \exists m \in \mathbb{N}\ (n = 2m + 1)\}$.

(δ΄) $D = \{\mathbb{N}\}$.

(!) (ε΄) $E = \{2, |E|\}$

2. Βρείτε δύο σύνολα A και B για τα οποία $|A| = 5$, $|B| = 6$ και $|A \cup B| = 9$. Ποιο είναι το $|A \cap B|$;

3. Έστω $A = \{1, 2, \dots, 10\}$. Ορίζουμε $\mathcal{B}_2 = \{B \subseteq A : |B| = 2\}$. Βρείτε το $|\mathcal{B}_2|$.

4. Για οποιαδήποτε σύνολα πραγματικών αριθμών A και B, ορίζουμε $AB = \{ab : a \in A \text{ και } b \in B\}$. Αν $A = \{1, 2\}$ και $B = \{2, 3, 4\}$, ποιο είναι το $|AB|$; Ποιο είναι το $|A \times B|$;

5. Θεωρήστε την πρόταση: «Για κάθε φυσικό αριθμό n, αν ο n είναι πρώτος, τότε ο n είναι *μονήρης*.» (Δεν χρειάζεται να ξέρετε τι σημαίνει «μονήρης» (solitary) – μόνο ότι είναι μια ιδιότητα που έχουν κάποιοι αριθμοί και άλλοι όχι.)

(α΄) Γράψτε το αντίστροφο και το αντιθετοαντίστροφο της πρότασης, διευκρινίζοντας ποιο είναι ποιο.

(β΄) Γράψτε την άρνηση της αρχικής πρότασης. Τι θα έπρεπε να δείξετε για να αποδείξετε ότι η πρόταση είναι ψευδής;

(γ΄) Είναι γνωστό ότι ο 8 είναι μονήρης. Τι μπορείτε να συμπεράνετε για την αλήθεια της αρχικής πρότασης, του αντιστρόφου της, ή του αντιθετοαντιστρόφου της; Εξηγήστε.

(δ΄) Υποθέτοντας ότι η αρχική πρόταση είναι αληθής, τι μπορείτε να πείτε για τη σχέση ανάμεσα στο σύνολο P των πρώτων αριθμών και το σύνολο S των μονήρων αριθμών;

6. Έστω $X = \{n \in \mathbb{N} : 10 \leq n < 20\}$. Βρείτε παραδείγματα συνόλων με τις παρακάτω ιδιότητες, εξηγώντας εν συντομία γιατί λειτουργούν.

(α΄) Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ με $|A| = 10$ τέτοιο ώστε $X \setminus A = \{10, 12, 14\}$.

(β΄) Ένα σύνολο $B \in \mathcal{P}(X)$ με $|B| = 5$.

(γ΄) Ένα σύνολο $C \subseteq \mathcal{P}(X)$ με $|C| = 5$.

(δ΄) Ένα σύνολο $D \subseteq X \times X$ με $|D| = 5$.

(ε΄) Ένα σύνολο $E \subseteq X$ τέτοιο ώστε $|E| \in E$.

7. Θεωρήστε την πρόταση: «Για κάθε σύνολα A και B, αν $A \subseteq B$, τότε $|A| \leq |B|$.»

(α΄) Γράψτε το αντιθετοαντίστροφο της πρότασης.

(β΄) Χρησιμοποιήστε το αντιθετοαντίστροφο για να εξηγήσετε γιατί η αρχική πρόταση είναι αληθής.

(γ΄) Γράψτε το αντίστροφο της αρχικής πρότασης.

(δ΄) Εξηγήστε γιατί το αντίστροφο είναι ψευδές.

Β. Σχέσεις

1. Δείξτε ότι η σχέση $\equiv_5$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{Z}$, όπου

$$a \equiv_5 b \iff a - b = 5k, \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{Z}.$$

2. Έστω $\mathbb{N}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών. Ορίζουμε τη σχέση

$$a \mid b \iff \text{ο } a \text{ διαιρεί τον } b \iff \text{υπάρχει } k \in \mathbb{Z}_+ \text{ με } b = ka.$$

Δείξτε ότι η παραπάνω σχέση είναι σχέση μερικής διάταξης στο $\mathbb{Z}_+$. Είναι ολική διάταξη; Γιατί;

3. Ορίζουμε τη σχέση $\lhd$ στο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ως εξής:

$$(\alpha, \beta) \lhd (\gamma, \delta) \iff \alpha < \gamma \text{ ή } (\alpha = \gamma \text{ και } \beta \leq \delta).$$

Δείξτε ότι η $\lhd$ είναι μια σχέση μερικής διάταξης στο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.