Διακριτά Μαθηματικά

Διάλεξη 11: Τεχνικές Απόδειξης

Γιώργος Αμανατίδης
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2026–27

Περιεχόμενα Διάλεξης

- Τι είναι επιχείρημα, θεώρημα, απόδειξη
- Τεχνικές απόδειξης: ευθεία, αντιθετοαντιστροφή, απαγωγή σε άτοπο
- Πότε χρησιμοποιούμε ποια τεχνική
- Δύο θεμελιώδεις αρχές: περιστερώνας (και η γενικευμένη μορφή του) & διαγωνοποίηση

Επιχείρημα, Εγκυρότητα, Ορθότητα

Ορισμός:

Ένα **επιχείρημα** είναι μια ακολουθία προτάσεων: οι πρώτες λέγονται **προκείμενες**, η τελευταία **συμπέρασμα**.

- Είναι **έγκυρο** αν το συμπέρασμα είναι αληθές **κάθε** φορά που όλες οι προκείμενες είναι αληθείς – ακριβώς η σχέση $T \models \varphi$ της Διάλεξης 8!
- Είναι **ορθό** αν είναι έγκυρο **και** όλες οι προκείμενες είναι πράγματι αληθείς.

Μια **απόδειξη** μιας πρότασης είναι ένα ορθό επιχείρημα με συμπέρασμα αυτή την πρόταση.

Θεώρημα & Ευθεία Απόδειξη

Ένα θεώρημα έχει τη μορφή $p \wedge q \wedge \cdots \to t$ (**υποθέσεις** $\Rightarrow$ **συμπέρασμα**).

Ορισμός: Αρχή της Ευθείας Απόδειξης

Αν ξέρουμε ότι η p είναι αληθής και ότι η $p \to s$ είναι αληθής, συμπεραίνουμε ότι η s είναι αληθής.

Μια **ευθεία απόδειξη** του συμπεράσματος από τις υποθέσεις είναι μια πεπερασμένη ακολουθία $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_N$ από προτάσεις, όπου $s_N = t$ το συμπέρασμα, και κάθε $s_i,\ i = 1, \ldots, N$ είναι ή υπόθεση ή κάποια παραδεδεγμένη αλήθεια (αξίωμα ή γνωστό αποδεδειγμένο θεώρημα) ή είναι το αποτέλεσμα εφαρμογής της αρχής της ευθείας απόδειξης σε δύο προηγούμενες προτάσεις (δηλαδή σε s_j και $s_k \equiv s_j \to s_i$ με $j, k < i$).

Παράδειγμα Ευθείας Απόδειξης

Ισχυρισμός: Το άθροισμα δύο άρτιων αριθμών είναι άρτιος.

Απόδειξη: Έστω m, n άρτιοι. Τότε $m = 2k$, $n = 2\lambda$ για κάποιους $k, \lambda \in \mathbb{Z}$.
Άρα

$$m + n = 2k + 2\lambda = 2(k + \lambda),$$

και αφού $k + \lambda \in \mathbb{Z}$, το $m + n$ είναι άρτιο. ■

Κάθε βήμα προκύπτει άμεσα από το προηγούμενο – τυπική ευθεία απόδειξη.

Αντιπαράδειγμα

Ορισμός: Αντιπαράδειγμα

Ένα **αντιπαράδειγμα** σε μια πρόταση $\forall x\, P(x)$ είναι ένα στοιχείο του σύμπαντος για το οποίο ο P είναι ψευδής.

Παράδειγμα: «Κάθε φυσικός είναι άθροισμα δύο τετραγώνων» – **ψευδής**, γιατί για $n = 6$ δεν υπάρχουν φυσικοί a, b με $6 = a^2 + b^2$.

Το 6 είναι αντιπαράδειγμα, άρα η πρόταση δεν είναι θεώρημα.

Απόδειξη με Αντιθετοαντιστροφή

Για να αποδείξουμε $s \to t$, αρκεί να αποδείξουμε $\neg t \to \neg s$:

$$(s \to t) \equiv (\neg t \to \neg s)$$

Ισχύει γιατί οι δύο τύποι είναι **ταυτολογικά ισοδύναμοι** (Διάλεξη 9) – αποδεικνύοντας τον έναν, αποδεικνύουμε αυτόματα και τον άλλο.

Παράδειγμα Αντιθετοαντιστροφής

Ισχυρισμός: Αν n^2 είναι άρτιος, τότε ο n είναι άρτιος.

Δύσκολο απευθείας: από $n^2 = 2k$ δεν προκύπτει άμεσα τίποτα για το n.

Αντιθετοαντίστροφο: «Αν ο n **δεν** είναι άρτιος, τότε ο n^2 **δεν** είναι άρτιος», δηλ. «αν ο n είναι περιττός, τότε ο n^2 είναι περιττός».

Απόδειξη: $n = 2k + 1$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

Επειδή $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$, το n^2 είναι περιττός. ■

Άρα ισχύει και ο αρχικός ισχυρισμός. Πολύ πιο εύκολο!

Απόδειξη με Απαγωγή σε Άτοπο

Για να αποδείξουμε t: υποθέτουμε $\neg t$ και καταλήγουμε σε **αντίφαση** $r \wedge \neg r$.

Πιο γενικά, για να αποδείξουμε $s \to t$: υποθέτουμε **ταυτόχρονα** s και $\neg t$, και δείχνουμε ότι αυτό οδηγεί σε άτοπο – άρα η υπόθεση $\neg t$ ήταν λάθος, οπότε t ισχύει.

Παράδειγμα: Το $\sqrt{2}$ είναι Άρρητο

Υποθέτουμε το αντίθετο: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ με m, n φυσικούς, πρώτους μεταξύ τους.

- Τότε $m^2 = 2n^2$, άρα ο m^2 είναι άρτιος. Επομένως και ο m είναι άρτιος: $m = 2k$.
- Άρα $4k^2 = m^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2$, άρα και ο n είναι άρτιος.

Παρατήρηση:

Οι m, n είναι **και οι δύο** άρτιοι – έχουν κοινό διαιρέτη το 2. **Άτοπο**, αφού υποθέσαμε πρώτους μεταξύ τους!

Άρα ο $\sqrt{2}$ δεν γράφεται ως $\frac{m}{n}$: είναι **άρρητος**. ■

Ευθεία, Αντιθετοαντιστροφή, ή Άτοπο; Πότε ποια;

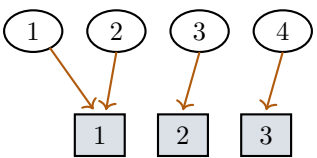
- **Ευθεία:** όταν η υπόθεση «ανοίγει τον δρόμο» φυσικά προς το συμπέρασμα (π.χ. αλγεβρικοί υπολογισμοί).
- **Αντιθετοαντιστροφή:** όταν το συμπέρασμα έχει άρνηση, ή η άρνησή του δίνει κάτι πιο «χειροπιαστό» (π.χ. «άρτιος» αντί για «όχι άρτιος»).
- **Άτοπο:** όταν δεν βλέπουμε καν από πού να ξεκινήσουμε ευθέως – συχνά για υπαρξιακούς ισχυρισμούς («δεν υπάρχει...», όπως το $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

Δεν υπάρχει «σωστή» επιλογή – η εμπειρία (και το Φροντιστήριο!) θα σας βοηθήσει να αναγνωρίζετε ποια ταιριάζει καλύτερα.

Η Αρχή του Περιστερώνα

Θεώρημα: Αρχή του Περιστερώνα

Δεν υπάρχει ενριπτική συνάρτηση από το $\mathbb{N}_{k+1}$ στο $\mathbb{N}_k$.



4 «περιστέρια», 3 «φωλιές»: κάποια φωλιά παίρνει **τουλάχιστον δύο** περιστέρια – η απεικόνιση δεν μπορεί να είναι 1-1.

Παράδειγμα: Περιστερώνας σε Δράση

Ισχυρισμός: Σε οποιαδήποτε ομάδα 13 ατόμων, τουλάχιστον δύο έχουν γενέθλια τον **ίδιο μήνα**.

Απόδειξη: «Περιστέρια» = τα 13 άτομα, «φωλιές» = οι 12 μήνες. Αν κάθε μήνας είχε **το πολύ** ένα άτομο, θα είχαμε το πολύ 12 άτομα – άτοπο, αφού είναι 13. Άρα κάποιος μήνας έχει ≥ 2 άτομα. ■

Η αρχή του περιστερώνα αποδεικνύεται η ίδια με απαγωγή σε άτοπο ή με επαγωγή.

Άνω / Κάτω Ακέραιο Μέρος

Ορισμός: Άνω Ακέραιο Μέρος

Για $x \in \mathbb{R}$, το $\lceil x \rceil$ (**άνω ακέραιο μέρος** του x) είναι ο μικρότερος ακέραιος που είναι μεγαλύτερος ή ίσος του x.

Ορισμός: Κάτω Ακέραιο Μέρος

Για $x \in \mathbb{R}$, το $\lfloor x \rfloor$ (**κάτω ακέραιο μέρος** του x) είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος του x.

Ισχύει πάντοτε: $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

Η Γενικευμένη Αρχή του Περιστερώνα

Θεώρημα: Γενικευμένη Αρχή του Περιστερώνα

Αν n αντικείμενα κατανέμονται σε k κουτιά, τότε *τουλάχιστον ένα* κουτί περιέχει **τουλάχιστον** $\lceil n/k \rceil$ αντικείμενα.

Απόδειξη (με απαγωγή σε άτοπο): Αν **κάθε** κουτί είχε λιγότερα από $\lceil n/k \rceil$ αντικείμενα, δηλ. το πολύ $\lceil n/k \rceil - 1$ (αφού το πλήθος είναι ακέραιος), τότε το σύνολο θα ήταν το πολύ $k \cdot (\lceil n/k \rceil - 1) < k \cdot \dfrac{n}{k} = n$ – άτοπο, αφού έχουμε ακριβώς n αντικείμενα. ■

Παράδειγμα:

Μεταξύ 100 οποιωνδήποτε ατόμων, **τουλάχιστον** $\lceil 100/7 \rceil = 15$ άτομα γεννήθηκαν την ίδια ημέρα της εβδομάδας (εδώ $n = 100, k = 7$).

Η Μέθοδος της Διαγωνοποίησης

Θεώρημα: Αρχή της Διαγωνοποίησης

Έστω R σχέση στο A, $D = \{a \in A \mid (a, a) \notin R\}$, και $R_a = \{b \in A \mid (a, b) \in R\}$ για κάθε $a \in A$. Τότε $D \neq R_a$ για **κάθε** $a \in A$.

Απόδειξη: Έστω οποιοδήποτε $a \in A$.

- Αν $(a, a) \in R$: τότε $a \notin D$ αλλά $a \in R_a$ – άρα $D \neq R_a$.
- Αν $(a, a) \notin R$: τότε $a \in D$ αλλά $a \notin R_a$ – άρα πάλι $D \neq R_a$.

Και στις δύο περιπτώσεις $D \neq R_a$. ■

Σύνδεση με Προηγούμενες Διαλέξεις

Η διαγωνοποίηση **δεν** είναι καινούργια – την έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει τρεις φορές:

- **Παράδοξο του Russell** (Διάλεξη 1): για ένα σύνολο A συνόλων, $R = \{(a, b) \in A \times A \mid b \in a\}$, οπότε $R_a = a \cap A$ και $D = \{a \in A \mid a \notin a\}$ – ακριβώς το «διαγώνιο» σύνολο! Αν ήταν $D \in A$, θα είχαμε $D \neq R_D = D$· άρα **κανένα** σύνολο δεν περιέχει όλα τα σύνολα.
- **Το** $(0, 1)$ **είναι υπεραριθμήσιμο** (Διάλεξη 7): ο αριθμός b κατασκευάστηκε ώστε να διαφέρει από **κάθε** a_i (τουλάχιστον) στη θέση i – ακριβώς η ιδέα $D \neq R_a$.
- **Θεώρημα του Cantor** (Διάλεξη 7): για $f : X \to \mathcal{P}(X)$, με $R = \{(a, b) \in X \times X \mid b \in f(a)\}$ είναι $R_a = f(a)$, και το D δεν είναι εικόνα της f.

Παρατήρηση:

Μία αφηρημένη αρχή, τρεις διαφορετικές εφαρμογές – έτσι δουλεύουν τα μαθηματικά!

Άσκηση για την Τάξη

Άσκηση 1. Αποδείξτε (με τεχνική της επιλογής σας) ότι αν n είναι ακέραιος με n^3 περιττό, τότε ο n είναι περιττός.

Άσκηση 2. Σε ένα δωμάτιο με 8 άτομα, δείξτε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο άτομα που έχουν τον **ίδιο** αριθμό γνωστών μέσα στο δωμάτιο (υποθέστε ότι η γνωριμία είναι αμοιβαία και ότι κανείς δεν γνωρίζει τον εαυτό του). *Υπόδειξη: πόσες πιθανές τιμές παίρνει ο αριθμός γνωστών ενός ατόμου, και γιατί δεν μπορούν να εμφανιστούν* ***όλες*** *ταυτόχρονα;*

Σύνοψη

- Επιχείρημα, εγκυρότητα ($\models$), ορθότητα, θεώρημα, ευθεία απόδειξη, αντιπαράδειγμα.
- Αντιθετοαντιστροφή: $s \to t \equiv \neg t \to \neg s$. Απαγωγή σε άτοπο: υπόθεση $\neg t$, αναζήτηση αντίφασης.
- Αρχή του περιστερώνα (και γενικευμένη μορφή: $\lceil n/k \rceil$) & αρχή της διαγωνοποίησης.
- Η διαγωνοποίηση είναι το θεμέλιο πίσω από το παράδοξο του Russell **και** το επιχείρημα του Cantor.

Επόμενη διάλεξη: Βασικές Αρχές Απαρίθμησης – ξεκινάμε τη Συνδυαστική.

Για το Φροντιστήριο 4: τεχνικές απόδειξης σε δράση – γραμματόσημα, σκακιέρα με ντόμινο.