Διακριτά Μαθηματικά

Διάλεξη 10: Κατηγορηματική Λογική

Γιώργος Αμανατίδης
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2026–27

Περιεχόμενα Διάλεξης

- Κατηγορήματα και σύνολα αλήθειας
- Ποσοδείκτες $\forall, \exists$ – πότε είναι αληθείς
- Πολλαπλοί ποσοδείκτες – η σειρά έχει σημασία!
- Άρνηση ποσοδοτημένων προτάσεων (και πώς συνδέεται με τη Διάλεξη 9)

Από Προτάσεις σε Κατηγορήματα

Η έκφραση «$x^2 = 4$» **δεν** είναι πρόταση – η αλήθειά της εξαρτάται από το x.

Ορισμός: Κατηγόρημα

Ένα **κατηγόρημα** $P(x)$ είναι μια έκφραση με μια (ή περισσότερες) μεταβλητές, η οποία γίνεται πρόταση μόλις δώσουμε συγκεκριμένη τιμή στη μεταβλητή, από ένα **σύμπαν** $\mathcal{U}$.

Π.χ. σύμπαν $= \mathbb{R}$, $P(x)$: «$x^2 = 4$» – ψευδής για $x = 1$, αληθής για $x = 2$.

Σύνολο Αλήθειας

Ορισμός: Σύνολο Αλήθειας

Το **σύνολο αλήθειας** του $P(x)$ είναι $\{x \in \mathcal{U} \mid P(x) \text{ αληθής}\}$.

Σύμπαν $\mathbb{R}$, $P(x)$: «$x^2 = 4$» $\Rightarrow$ σύνολο αλήθειας $= \{-2, 2\}$.

Σύμπαν $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $P(x, y)$: «$x^2 + y^2 = 1$»
$\Rightarrow$ σύνολο αλήθειας $= \{(0, 1), (1, 0), (-1, 0), (0, -1)\}$.

Δύο κατηγορήματα με **ίδιο** σύνολο αλήθειας λέγονται **ισοδύναμα** – ίδια ιδέα με τη Διάλεξη 9, τώρα για κατηγορήματα.

Ποσοδείκτες: $\forall$ και $\exists$

- **Καθολικός ποσοδείκτης:**
  $\forall x\, P(x)$ σημαίνει «για κάθε x (στο σύμπαν), ισχύει $P(x)$».
- **Υπαρξιακός ποσοδείκτης:**
  $\exists x\, P(x)$ σημαίνει «υπάρχει x (στο σύμπαν) ώστε να ισχύει $P(x)$».

Παρατήρηση:

Ο ορισμός του $A \subseteq B$ μπορεί να γραφτεί τυπικά ως: $\forall x\, [x \in A \Rightarrow x \in B]$.

Πότε είναι Αληθής μια Ποσοδοτημένη Πρόταση

- $\forall x\, P(x)$ είναι **αληθής** $\iff$ το σύνολο αλήθειας του P είναι **όλο** το σύμπαν.
- $\forall x\, P(x)$ είναι **ψευδής** $\iff$ υπάρχει **έστω ένα** στοιχείο του σύμπαντος για το οποίο ο P είναι ψευδής.
- $\exists x\, P(x)$ είναι **αληθής** $\iff$ το σύνολο αλήθειας του P είναι **μη κενό**.
- $\exists x\, P(x)$ είναι **ψευδής** $\iff$ το σύνολο αλήθειας του P είναι **κενό**.

Παράδειγμα Μετάφρασης

Σύμπαν: οι φυσικοί αριθμοί.

$s(x)$: «ο x είναι άρτιος», $t(x, y)$: «$x = 2y$», $p(x)$: «ο x είναι πρώτος», $r(x)$: «$x > 2$».

- «Αν ο x είναι άρτιος, υπάρχει y με $x = 2y$»: $\quad s(x) \to \exists y\, t(x, y)$
- «Υπάρχει πρώτος x με $x = 2y$ για κάποιο y»: $\quad \exists x\, (p(x) \land \exists y\, t(x, y))$
- «Κάθε πρώτος $x > 2$ δεν είναι άρτιος»: $\quad \forall x\, (p(x) \to (r(x) \to \neg s(x)))$

Η Σειρά Έχει Σημασία!

Σύμπαν: οι φυσικοί αριθμοί. Συγκρίνετε:

$$\forall x\, \exists y\, (y > x) \qquad \text{έναντι} \qquad \exists y\, \forall x\, (y > x)$$

Πρώτη: «για κάθε x, υπάρχει y μεγαλύτερο από το x» – **αληθής** (π.χ. $y = x + 1$).

Δεύτερη: «υπάρχει y που είναι μεγαλύτερο από **κάθε** x» – **ψευδής** (ένας τέτοιος y θα έπρεπε, για $x = y$, να είναι μεγαλύτερος και από τον εαυτό του).

Παρατήρηση:

Στην πρώτη, το y επιτρέπεται να **εξαρτάται** από το x (διαβάζεται πρώτα «για κάθε x», μετά επιλέγουμε y). Στη δεύτερη, το y πρέπει να είναι **το ίδιο** για όλα τα x ταυτόχρονα. Η εναλλαγή σειράς $\forall\exists \leftrightarrow \exists\forall$ αλλάζει ριζικά το νόημα!

Παράδειγμα Απόδειξης με Πολλαπλούς Ποσοδείκτες

Πρόταση:

$\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N}\, (y > x)$.

Απόδειξη: Έστω $x \in \mathbb{N}$ αυθαίρετος φυσικός αριθμός. Επιλέγουμε $y = x + 1 \in \mathbb{N}$. Τότε $y = x + 1 > x$, άρα ο y που επιλέξαμε ικανοποιεί $y > x$.

Αφού το x ήταν αυθαίρετο, καταλήγουμε στο ότι: για κάθε x, υπάρχει (τουλάχιστον ένα) κατάλληλο y. ■

Πρότυπο απόδειξης για $\forall x\, \exists y\, P(x, y)$: «πάγωσε» ένα τυχαίο x, μετά **κατασκεύασε** ρητά ένα y (συνήθως συναρτήσει του x) που κάνει το $P(x, y)$ αληθές.

Άρνηση Ποσοδεικτών

$$\neg(\forall x\, P(x)) \equiv \exists x\, (\neg P(x)), \qquad \neg(\exists x\, P(x)) \equiv \forall x\, (\neg P(x))$$

«δεν ισχύει για όλα» = «υπάρχει αντιπαράδειγμα».

«δεν υπάρχει κανένα» = «για κάθε ένα δεν ισχύει».

Παρατήρηση:

Οι νόμοι του De Morgan ξαναεμφανίζονται εδώ, τώρα για ποσοδείκτες αντί για $\wedge$, $\vee$!

Άρνηση με Πολλαπλούς Ποσοδείκτες

Η άρνηση «περνάει μέσα», έναν ποσοδείκτη τη φορά, αλλάζοντας τον τύπο του καθενός:

$$\neg(\forall x\, \exists y\, P(x,y)) \equiv \exists x\, \neg(\exists y\, P(x,y)) \equiv \exists x\, \forall y\, \neg P(x,y)$$

Παράδειγμα:

Αρνηθείτε: «$\forall x\, \exists y\, (y > x)$» (η αληθής πρόταση από πριν).

Άρνηση: $\exists x\, \forall y\, (y \leq x)$ – «υπάρχει x μεγαλύτερο ή ίσο από **κάθε** y»
σωστά **ψευδής** (συμβατό με το ότι η αρχική ήταν αληθής)!

Άσκηση για την Τάξη

Άσκηση 1. Σύμπαν $= \mathbb{R}$. Είναι αληθής η $\forall x \, \exists y \, (xy = 1)$; Αρνηθείτε την πρόταση, και αποφασίστε αν η άρνηση είναι αληθής.

Άσκηση 2. Μεταφράστε στη γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής (σύμπαν: οι φοιτητές μιας τάξης, $\phi(x, y)$: «ο x γνωρίζει τον y»): «Υπάρχει φοιτητής που γνωρίζει όλους τους άλλους». Έπειτα αρνηθείτε την πρόταση στα ελληνικά.

Σύνοψη

- Κατηγόρημα $P(x)$, σύνολο αλήθειας, ποσοδείκτες $\forall, \exists$.
- $\forall x\, P(x)$ αληθής $\iff$ σύνολο αλήθειας $=$ σύμπαν· $\exists x\, P(x)$ αληθής $\iff$ σύνολο αλήθειας $\neq \emptyset$.
- Πολλαπλοί ποσοδείκτες: η σειρά $\forall\exists$ έναντι $\exists\forall$ αλλάζει το νόημα – προσοχή στις εξαρτήσεις.
- Άρνηση: $\neg\forall \equiv \exists\neg$, $\neg\exists \equiv \forall\neg$ – «περνάει μέσα» έναν ποσοδείκτη τη φορά.

Επόμενη διάλεξη: Τεχνικές Απόδειξης – ευθεία, αντιθετοαντιστροφή, απαγωγή σε άτοπο, περιστερώνας.

Για το Φροντιστήριο 4: μεταφράσεις & αρνήσεις ποσοδοτημένων προτάσεων.