Διακριτά Μαθηματικά

Διάλεξη 9: Προτασιακή Λογική (Β)

Γιώργος Αμανατίδης
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2026–27

Περιεχόμενα Διάλεξης

- Ταυτολογική ισοδυναμία $\equiv$ και γνωστές ισοδυναμίες – η σχέση τους με τη Διάλεξη 2
- Συναρτήσεις Boole και κανονική διαζευκτική μορφή
- Πλήρη σύνολα συνδέσμων
- Σύνολα & προτάσεις

Ταυτολογική Ισοδυναμία $\equiv$

Ορισμός: Ταυτολογική Ισοδυναμία

Αν $\varphi \vDash \psi$ **και** $\psi \vDash \varphi$, γράφουμε $\varphi \equiv \psi$: οι φ, ψ είναι **ταυτολογικά ισοδύναμοι**.

Ισοδύναμα: $\varphi \equiv \psi$ αν και μόνο αν έχουν **ίδιο** πίνακα αλήθειας (ίδια τιμή σε κάθε γραμμή). Αυτό μας επιτρέπει να «ξαναγράφουμε» τύπους χωρίς να αλλάζει η αλήθειά τους.

Επίσης: $\varphi \equiv \psi$ αν και μόνο αν ο $\varphi \leftrightarrow \psi$ είναι ταυτολογία.

Βασικοί Νόμοι (σας θυμίζουν κάτι;)

$$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi, \qquad \varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi \qquad \text{(αντιμεταθετικότητα)}$$

$$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \qquad \text{(προσεταιριστικότητα)}$$

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \qquad \text{(επιμεριστικότητα)}$$

Παρατήρηση:

Ακριβώς οι ίδιοι νόμοι που είδαμε στη **Διάλεξη 2** για την $\cup, \cap$!
Δεν είναι σύμπτωση – θα δούμε τη σύνδεση σε λίγο.

Νόμοι του De Morgan & Διπλή Άρνηση

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi, \qquad \neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi \qquad \text{(De Morgan)}$$

$$\neg(\neg\varphi) \equiv \varphi \qquad \text{(διπλή άρνηση)}$$

Ίδιοι νόμοι με τη Διάλεξη 2 – εδώ για προτάσεις αντί για σύνολα: «όχι (και)» = «ή, με άρνηση»· «όχι (ή)» = «και, με άρνηση».

Αποκλειόμενο Τρίτο & Αντιθετοαντιστροφή

$\varphi \vee \neg\varphi$ είναι ταυτολογία (νόμος του αποκλειόμενου τρίτου)

$(\varphi \to \psi) \equiv (\neg\psi \to \neg\varphi)$ (αντιθετοαντιστροφή)

Η αντιθετοαντιστροφή είναι **ιδιαίτερα χρήσιμη**: αποδεικνύοντας $\neg\psi \to \neg\varphi$ αποδεικνύουμε αυτόματα $\varphi \to \psi$ – θα την ξαναδούμε ως τεχνική απόδειξης.

Απαλοιφή των $\to$ και $\leftrightarrow$

$$\varphi \to \psi \;\equiv\; \neg\varphi \lor \psi \qquad \text{(η συνεπαγωγή ως διάζευξη)}$$

$$\neg(\varphi \to \psi) \;\equiv\; \varphi \land \neg\psi \qquad \text{(άρνηση της συνεπαγωγής)}$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi \;\equiv\; (\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi)$$

Κάθε τέτοιος νόμος αποδεικνύεται με πίνακα αλήθειας. Με αυτούς, κάθε τύπος ξαναγράφεται μόνο με $\neg, \land, \lor$ – και μετά μπορούμε να εφαρμόσουμε τους νόμους του De Morgan και την επιμεριστικότητα.

Συναρτήσεις Boole

Ορισμός: Συνάρτηση Boole

Μια **συνάρτηση Boole** με k μεταβλητές είναι μια συνάρτηση $f : \{\text{Α}, \Psi\}^k \to \{\text{Α}, \Psi\}$.

Κάθε τύπος με μεταβλητές $p_0, \ldots, p_{k-1}$ ορίζει μια συνάρτηση Boole: τον **πίνακα αλήθειας** του.

Το αντίστροφο; Δίνεται ένας οποιοσδήποτε πίνακας (μια f). Υπάρχει πάντα τύπος με αυτόν τον πίνακα αλήθειας;

Από τον Πίνακα Αλήθειας σε Τύπο

p_0	p_1	p_2	f
Α	Α	Α	Ψ
Α	Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ

Για κάθε γραμμή με $f = \text{Α}$, μια **σύζευξη** που είναι αληθής **μόνο** σε αυτή τη γραμμή:

$$(\text{Α}, \text{Α}, \Psi) \rightsquigarrow p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2$$

Η **διάζευξη** των συζεύξεων:

$$(p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2)$$
$$\vee (\neg p_0 \wedge p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2)$$

είναι αληθής **ακριβώς** στις γραμμές όπου $f = \text{Α}$.

Κάθε Συνάρτηση Boole Εκφράζεται με Τύπο

Θεώρημα:

Για κάθε συνάρτηση Boole f με $k+1$ μεταβλητές υπάρχει τύπος φ με μόνο τις μεταβλητές $p_0, \dots, p_k$, του οποίου ο πίνακας αλήθειας είναι η f.

Απόδειξη: η κατασκευή της προηγούμενης διαφάνειας, για κάθε f. (Αν η f δεν παίρνει ποτέ την τιμή Α: η αντίφαση $p_0 \wedge \neg p_0$.)

Ορισμός: Κανονική διαζευκτική μορφή (ΚΔΜ)

Ένας τύπος είναι σε **ΚΔΜ** αν είναι διάζευξη $\varphi_0 \vee \cdots \vee \varphi_l$, όπου κάθε φ_i είναι σύζευξη μεταβλητών ή αρνήσεων μεταβλητών.

Συνέπεια: κάθε τύπος είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με έναν τύπο σε ΚΔΜ.

Παράδειγμα: ΚΔΜ με Πίνακα Αλήθειας

Να γραφεί σε ΚΔΜ ο $\varphi = (p \to q) \wedge \neg(q \wedge r)$.

p	q	r	$p \to q$	$q \wedge r$	φ
Α	Α	Α	Α	Α	Ψ
Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Α	Α	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α

$$\varphi \equiv (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r).$$

Το Ίδιο Παράδειγμα με Νόμους

$$
\begin{aligned}
\varphi &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r) && (\to \text{ ως διάζευξη, De Morgan}) \\
&\equiv \big(\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)\big) \vee \big(q \wedge (\neg q \vee \neg r)\big) && (\text{επιμεριστικότητα}) \\
&\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) && (\text{επιμεριστικότητα}) \\
&\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) && (q \wedge \neg q \equiv \Psi)
\end{aligned}
$$

Παρατήρηση:

Δύο **διαφορετικοί** τύποι σε ΚΔΜ, ισοδύναμοι με τον φ: η ΚΔΜ **δεν** είναι μοναδική.

Τα βήματα: (1) απαλείφουμε $\leftrightarrow, \to$· (2) «σπρώχνουμε» τις $\neg$ μέσα (De Morgan, διπλή άρνηση)· (3) επιμεριστικότητα· (4) απλοποίηση.

Πλήρη Σύνολα Συνδέσμων

Ορισμός: Πλήρες σύνολο συνδέσμων

Ένα σύνολο $O \subseteq \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ είναι **πλήρες** αν **κάθε** τύπος είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με έναν τύπο που περιέχει μόνο συνδέσμους του O.

- Το $\{\neg, \wedge, \vee\}$ είναι πλήρες: κάθε τύπος $\equiv$ τύπος σε ΚΔΜ.
- Οι $\rightarrow, \leftrightarrow$ είναι λοιπόν «περιττοί» – βολικοί, αλλά δεν αυξάνουν το τι μπορούμε να εκφράσουμε.

Μπορούμε να τα καταφέρουμε με **λιγότερους** συνδέσμους;

Το $\{\neg, \wedge\}$ είναι Πλήρες

Πρόταση:

Το $\{\neg, \wedge\}$ είναι πλήρες.

Απόδειξη. Αρκεί να «σβήσουμε» τον $\vee$ από κάθε τύπο με $\neg, \wedge, \vee$. Από De Morgan & διπλή άρνηση:

$$\varphi \vee \psi \;\equiv\; \neg\neg(\varphi \vee \psi) \;\equiv\; \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi).$$

Αντικαθιστούμε έτσι κάθε $\vee$, από τους μικρότερους υποτύπους προς τους μεγαλύτερους (αυστηρά: επαγωγή στην κατασκευή του τύπου). ■

Παρατήρηση:

Με τον ίδιο τρόπο και τα $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$ είναι πλήρη (Σημειώσεις, Άσκηση).

Το $\{\wedge, \vee\}$ ΔΕΝ είναι Πλήρες

Πρόταση:

Το $\{\wedge, \vee\}$ δεν είναι πλήρες.

Απόδειξη. Πάρτε την αποτίμηση u με $u(p_i) = \text{Α}$ για **κάθε** i.

- Κάθε μεταβλητή είναι Α στην u.
- Αν φ, ψ είναι Α στην u, τότε και $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$ είναι Α.
- Άρα (επαγωγή) **κάθε** τύπος μόνο με $\wedge, \vee$ είναι Α στην u.
- Όμως ο $\neg p_0$ είναι Ψ στην u – δεν είναι ισοδύναμος με κανέναν τέτοιο τύπο. ■

Ίδιο επιχείρημα: ούτε το $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ είναι πλήρες. Χωρίς $\neg$ δεν «φτιάχνουμε» άρνηση!

Ένας Σύνδεσμος Αρκεί: NAND

Ορίζουμε $\varphi \uparrow \psi$ (**NAND**) ως $\neg(\varphi \wedge \psi)$: ψευδής **μόνο** όταν και οι δύο είναι αληθείς.

$$\neg\varphi \;\equiv\; \varphi \uparrow \varphi, \qquad \varphi \wedge \psi \;\equiv\; (\varphi \uparrow \psi) \uparrow (\varphi \uparrow \psi).$$

Αφού το $\{\neg, \wedge\}$ είναι πλήρες, **κάθε** τύπος είναι ισοδύναμος με έναν τύπο μόνο με $\uparrow$!

Παρατήρηση:

Γι' αυτό ένα ψηφιακό κύκλωμα που υπολογίζει οποιαδήποτε συνάρτηση Boole μπορεί να φτιαχτεί **μόνο από πύλες NAND**.

Σύνολο Αλήθειας μιας *Κατηγορηματικής* Πρότασης (πρόγευση: Διάλεξη 10)

Ορισμός: Σύνολο Αλήθειας

Αν $P(x)$ είναι μια πρόταση για το x σε ένα σύμπαν $\mathcal{U}$, το **σύνολο αλήθειας** της P είναι το $\{x \in \mathcal{U} \mid P(x) \text{ αληθής}\}$.

Παράδειγμα: σύμπαν $= \mathbb{R}$, $P(x)$: «$x^2 = 4$» $\Rightarrow$ σύνολο αλήθειας $= \{-2, 2\}$.

Η Αντιστοιχία

Αν P, Q έχουν σύνολα αλήθειας $A, B \subseteq \mathcal{U}$:

Λογική		**Σύνολα**
$P \wedge Q$	$\longleftrightarrow$	$A \cap B$
$P \vee Q$	$\longleftrightarrow$	$A \cup B$
$\neg P$	$\longleftrightarrow$	A'

Παρατήρηση:

Γι' αυτό **όλοι** οι αλγεβρικοί νόμοι των συνόλων (Διάλεξη 2) μεταφράζονται αυτόματα σε ταυτολογικές ισοδυναμίες προτάσεων – και αντίστροφα!

Άσκηση για την Τάξη

Άσκηση 1. Χρησιμοποιώντας τους νόμους του De Morgan και της διπλής άρνησης, απλοποιήστε τον τύπο $\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg p \wedge q)$ σε κάτι απλούστερο. Επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα με πίνακα αλήθειας.

Άσκηση 2. Γράψτε τον τύπο $(p \leftrightarrow q) \vee \neg r$ σε κανονική διαζευκτική μορφή, (α) με πίνακα αλήθειας και (β) με νόμους. Είναι οι δύο απαντήσεις ίδιες;

Σύνοψη

- $\varphi \equiv \psi$: ίδιος πίνακας αλήθειας· οι νόμοι της Διάλεξης 2 (De Morgan, επιμεριστικότητα, ...) ισχύουν αυτούσιοι και για προτάσεις.
- Κάθε συνάρτηση Boole είναι ο πίνακας αλήθειας κάποιου τύπου· κάθε τύπος $\equiv$ τύπος σε κανονική διαζευκτική μορφή (με πίνακα αλήθειας ή με νόμους).
- Τα $\{\neg, \wedge, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$ είναι πλήρη σύνολα συνδέσμων· το $\{\wedge, \vee\}$ όχι. Ο NAND μόνος του αρκεί.
- Σύνολα αλήθειας: $\wedge, \vee, \neg \leftrightarrow \cap, \cup, '$.

Επόμενη διάλεξη: Κατηγορηματική Λογική (ποσοδείκτες $\forall, \exists$).

Για το φροντιστήριο (Φροντ. 3, Μέρος Γ): λογικοί γρίφοι & έλεγχος εγκυρότητας – εφαρμόστε ό,τι είδαμε στις Διαλέξεις 8–9!