Διακριτά Μαθηματικά

Διάλεξη 8: Προτασιακή Λογική (Α)

Γιώργος Αμανατίδης
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2026–27

Περιεχόμενα Διάλεξης

- Τι είναι πρόταση, και πότε ένα επιχείρημα είναι έγκυρο
- Η γλώσσα της προτασιακής λογικής: μεταβλητές, σύνδεσμοι, τύποι
- Πίνακες αλήθειας, ταυτολογίες, ταυτολογική συνεπαγωγή
- Έλεγχος εγκυρότητας επιχειρημάτων

Δύο «όμοια» επιχειρήματα

Αν η Ανθή φάει το φαγητό της, θα πάρει ένα γλυκό.
Η Ανθή έφαγε το φαγητό της.

∴ Η Ανθή πήρε γλυκό.

Για να πάρει γλυκό, ο Νίκος πρέπει να φάει το φαγητό του.
Ο Νίκος έφαγε το φαγητό του.

∴ Ο Νίκος πήρε γλυκό.

Είναι και τα δύο επιχειρήματα **έγκυρα**;

Παρατήρηση:

Το πρώτο, ναι. Το δεύτερο, **όχι**: το ότι το φαγητό είναι *απαραίτητο* (αναγκαίο) για το γλυκό δεν σημαίνει ότι είναι *αρκετό* (ικανό) – ίσως ο Νίκος χρειάζεται και κάτι άλλο. Οι δύο προτάσεις **δεν** λένε το ίδιο πράγμα – θα δούμε γιατί, με ακρίβεια.

Τι είναι Πρόταση;

Ορισμός: Πρόταση

Μια **πρόταση** είναι μια δηλωτική έκφραση που είναι **είτε αληθής είτε ψευδής** (και όχι και τα δύο).

Προτάσεις:

- «$5 + 3 = 8$»
- «$3 + 2 = 7$»
- «Ο 4 είναι άρτιος.»

Όχι προτάσεις:

- «Το x είναι μεγάλο.» (ασαφές)
- «Πήγες πουθενά χθες;» (όχι δηλωτική)

Θα χρειαστούμε μια ακριβή **γλώσσα** για να συνδυάζουμε προτάσεις – ώστε να μην μπερδευόμαστε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.

Προτασιακές Μεταβλητές & Σύνδεσμοι

Τα σύμβολα της γλώσσας $\mathcal{L}$:

- **Προτασιακές μεταβλητές:** $p_0, p_1, p_2, \ldots$ (ή απλά $p, q, s, \ldots$) – αντιπροσωπεύουν στοιχειώδεις προτάσεις.
- **Σύνδεσμοι:**

$\neg$	άρνηση	«δεν»
$\wedge$	σύζευξη	«και»
$\vee$	διάζευξη	«ή»
$\rightarrow$	συνεπαγωγή	«αν…τότε»
$\leftrightarrow$	ισοδυναμία	«αν και μόνον αν»

- **Παρενθέσεις:** $(,)$ – δείχνουν πού αρχίζει/τελειώνει μια έκφραση.

Προτασιακοί Τύποι

Ορισμός: Προτασιακός Τύπος (αναδρομικός ορισμός)

Μια έκφραση φ είναι **προτασιακός τύπος** αν και μόνο αν:

α) είναι προτασιακή μεταβλητή, ή

β) είναι της μορφής $(\neg\beta)$, $(\beta \wedge \gamma)$, $(\beta \vee \gamma)$, $(\beta \to \gamma)$, $(\beta \leftrightarrow \gamma)$, όπου β, γ είναι ήδη κατασκευασμένοι προτασιακοί τύποι.

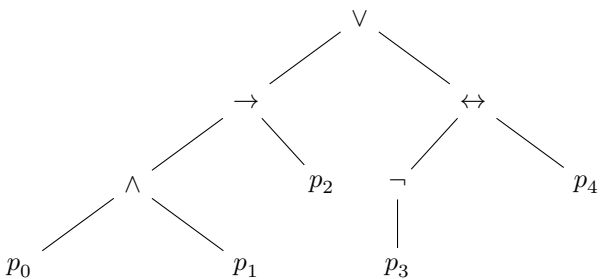
Παραδείγματα: p_5, $(p_0 \wedge p_3)$, $((\neg p_1) \vee (p_0 \to p_2))$.

Σύμβαση: παραλείπουμε τις εξωτερικές παρενθέσεις και τις παρενθέσεις γύρω από μια άρνηση, π.χ. $\neg p \vee q$ αντί για $((\neg p) \vee q)$.

Δενδροδιάγραμμα

Κάθε προτασιακός τύπος αντιστοιχεί σε ένα **δενδροδιάγραμμα** που δείχνει πώς κατασκευάζεται:

$$(((p_0 \wedge p_1) \to p_2) \vee (\neg p_3 \leftrightarrow p_4))$$



Αποτίμηση

Ορισμός: Αποτίμηση

Μια **αποτίμηση** είναι μια συνάρτηση u που αναθέτει σε κάθε προτασιακή μεταβλητή μια **τιμή αλήθειας**: Α (αληθές) ή Ψ (ψευδές).

Δεδομένης μιας αποτίμησης u στις μεταβλητές, μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή αλήθειας $\bar{u}(\varphi)$ **κάθε** προτασιακού τύπου φ – ακολουθώντας το δενδροδιάγραμμά του από κάτω προς τα πάνω, με τους κανόνες που ακολουθούν.

Πίνακας Αλήθειας των Συνδέσμων

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \to \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α

Οι πρώτοι τρεις σύνδεσμοι, καθώς και ο πέμπτος, ταιριάζουν με τη διαίσθησή μας.
Ο τέταρτος, $\to$, χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή – επόμενη διαφάνεια.

Προσοχή στη Συνεπαγωγή $\rightarrow$

$$\varphi \rightarrow \psi \text{ είναι } \textbf{ψευδής} \text{ ακριβώς όταν } \varphi = \text{Α} \text{ και } \psi = \Psi.$$

- Αν το φ (η υπόθεση) είναι **ψευδές**, η $\varphi \rightarrow \psi$ είναι **αυτόματα αληθής** – «κενή αλήθεια» (vacuous truth): δεν υποσχεθήκαμε τίποτα.
- Παράδειγμα: «Αν η Ανθή φάει το φαγητό της, θα πάρει γλυκό» ($p \rightarrow q$) είναι **ψευδής μόνο** αν η Ανθή φάει το φαγητό της και *δεν* πάρει γλυκό.

Αυτό είναι ακριβώς η διαφορά στο αίνιγμα της εισαγωγής: «αν φάει, τότε γλυκό» ($p \rightarrow q$) **δεν** είναι το ίδιο με «για να πάρει γλυκό, πρέπει να φάει» ($q \rightarrow p$)!

Παράδειγμα: Υπολογισμός Πίνακα Αλήθειας

Υπολογίζουμε τον πίνακα αλήθειας του $p \to (q \to p)$:

p	q	$q \to p$	$p \to (q \to p)$
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Α

Υπολογίζουμε πάντα από τους **υποτύπους** προς τον πλήρη τύπο – εδώ πρώτα τη στήλη $q \to p$, μετά τη στήλη $p \to (q \to p)$.

Ταυτολογία, Αντίφαση, Ικανοποιησιμότητα

Ορισμός

Ο τύπος φ είναι **ταυτολογία** αν **κάθε** αποτίμηση τον κάνει αληθή.

Ορισμός

Ο φ είναι **αντίφαση** αν ο $\neg\varphi$ είναι ταυτολογία (δηλ. κάθε αποτίμηση τον κάνει ψευδή).

Ορισμός

Ένα σύνολο τύπων T είναι **ικανοποιήσιμο** αν υπάρχει *κάποια* αποτίμηση που κάνει αληθή **κάθε** στοιχείο του T.

Παράδειγμα: Ταυτολογία

Από την προηγούμενη διαφάνεια, ο πίνακας αλήθειας του $p \to (q \to p)$ έδειξε Α σε **κάθε** γραμμή.

Άρα ο $p \to (q \to p)$ είναι **ταυτολογία**: όποια κι αν είναι η αλήθεια των p, q, ο τύπος είναι πάντα αληθής.

Ταυτολογική Συνεπαγωγή $\models$

Ορισμός: Ταυτολογική Συνεπαγωγή

Το T **ταυτολογικά συνεπάγεται** τον φ, γραμμένο $T \models \varphi$, αν **κάθε** αποτίμηση που ικανοποιεί όλο το T ικανοποιεί και τον φ.

Αν $T = \{\psi\}$, γράφουμε απλά $\psi \models \varphi$. Αυτό είναι, ουσιαστικά, ο ορισμός του «έγκυρου επιχειρήματος»: οι προκείμενες T συνεπάγονται το συμπέρασμα φ.

Παράδειγμα Συνεπαγωγής

Δείχνουμε ότι $(p \wedge q) \to s \models p \to (q \to s)$:

p	q	s	$p \wedge q$	$q \to s$	$(p \wedge q) \to s$	$p \to (q \to s)$
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α

Όπου η στήλη $(p \wedge q) \to s$ είναι Α, εκεί είναι Α και η $p \to (q \to s)$ – άρα η συνεπαγωγή ισχύει.

Παράδειγμα: Έλεγχος Εγκυρότητας

Είναι έγκυρο το επιχείρημα «$p \to q$, $\neg q$, άρα $\neg p$» (*modus tollens*); Δηλαδή, ισχύει $\{p \to q, \neg q\} \vDash \neg p$;

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$
Α	Α	Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α

Η μόνη γραμμή όπου **και** $p \to q$ **και** $\neg q$ είναι Α είναι η τελευταία – και εκεί $\neg p = \text{Α}$. Άρα $\{p \to q, \neg q\} \vDash \neg p$: το επιχείρημα είναι έγκυρο.

Απαντώντας το Ερώτημα της Εισαγωγής

Έστω p: «η Ανθή/ο Νίκος τρώει το φαγητό του», q: «παίρνει γλυκό».

- **Ανθή:** υπόθεση $p \to q$, και p. Με *modus ponens* ($p \to q, p \vDash q$), συμπεραίνουμε q. **Έγκυρο.**
- **Νίκος:** υπόθεση $q \to p$ («για να πάρει γλυκό, πρέπει να φάει»), και p. Ζητάμε q. Δεν υπάρχει τρόπος να το συμπεράνουμε από τα $\{q \to p, p\}$ – υπάρχει αποτίμηση με $p = \text{Α}, q = \Psi$ που ικανοποιεί και τις δύο υποθέσεις! **Μη έγκυρο.**

Ακριβώς όπως προβλέψαμε: το «για να q πρέπει p» ($q \to p$) δεν είναι το ίδιο με το «αν p τότε q» ($p \to q$).

Άσκηση για την Τάξη

Άσκηση 1. Δείξτε, με πίνακα αλήθειας, ότι ισχύει ο **υποθετικός συλλογισμός** (*hypothetical syllogism*): $\{p \to q,\ q \to r\} \vDash p \to r$.

Άσκηση 2. Είναι ο τύπος $((p \to q) \to p) \to p$ ταυτολογία; (Κατασκευάστε τον πίνακα αλήθειας του.)

Σύνοψη

- Πρόταση: δηλωτική έκφραση, αληθής ή ψευδής – ποτέ και τα δύο.
- Προτασιακοί τύποι χτίζονται αναδρομικά από μεταβλητές & συνδέσμους $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
- Πίνακες αλήθειας υπολογίζουν την τιμή κάθε τύπου· προσοχή στο $\rightarrow$ (κενή αλήθεια όταν η υπόθεση είναι ψευδής).
- Ταυτολογία, αντίφαση, ικανοποιησιμότητα, ταυτολογική συνεπαγωγή ($\models$).
- Έγκυρο επιχείρημα: προκείμενες $\models$ συμπέρασμα – ελέγχεται με πίνακα αλήθειας (*modus ponens, modus tollens*).

Επόμενη διάλεξη: Ταυτολογική ισοδυναμία και οι νόμοι της, κανονική διαζευκτική μορφή, πλήρη σύνολα συνδέσμων.

Για το φροντιστήριο (Φροντ. 3, Μέρος Γ): λογικοί γρίφοι & έλεγχος εγκυρότητας αποδείξεων – εφαρμόστε ό,τι είδαμε σήμερα!