Διακριτά Μαθηματικά

Διάλεξη 7: Ισοδυναμία Συνόλων

Γιώργος Αμανατίδης
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2026–27

Περιεχόμενα Διάλεξης

- Ισοδυναμία συνόλων: πότε έχουν δύο σύνολα «το ίδιο μέγεθος»
- Πεπερασμένα, άπειρα, και αριθμήσιμα σύνολα – τα $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμα
- Υπεραριθμήσιμα σύνολα: το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor
- Ένα βήμα παραπέρα: το Θεώρημα του Cantor

Πόσα στοιχεία έχει το $\mathbb{N}$;

Το σύνολο $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ και το σύνολο $\mathbb{E}$ των άρτιων φυσικών $\{0, 2, 4, 6, ...\}$.

Διαισθητικά, το $\mathbb{E}$ είναι «το μισό» του $\mathbb{N}$ – σωστά;

Αλλά κάθε $n \in \mathbb{N}$ αντιστοιχεί σε **ακριβώς ένα** $2n \in \mathbb{E}$, και κάθε στοιχείο του $\mathbb{E}$ προκύπτει έτσι από **ακριβώς ένα** n!

Για **άπειρα** σύνολα, η διαίσθησή μας για το «μέγεθος» χρειάζεται αναθεώρηση.
Σήμερα θα δούμε πώς να συγκρίνουμε αυστηρά μεγέθη συνόλων – ακόμη και άπειρων.

Ορισμός

Ορισμός: Ισοδυναμία Συνόλων

Δύο σύνολα X, Y λέμε ότι είναι **ισοδύναμα**, και γράφουμε $X \sim Y$, αν υπάρχει μια **αμφιμονοσήμαντη** συνάρτηση (bijection) $f : X \to Y$.

Για πεπερασμένα σύνολα, αυτό συμπίπτει με αυτό που ήδη ξέρουμε: $A \sim B \iff |A| = |B|$. Η δύναμη του ορισμού είναι ότι **δεν** χρειάζεται τα σύνολα να είναι πεπερασμένα!

Ιδιότητες (σας θυμίζει κάτι;)

Η σχέση $\sim$ είναι:

- **Αυτοπαθής:** $X \sim X$ μέσω της id_X.
- **Συμμετρική:** αν η $f : X \to Y$ είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση, τότε και η $f^{-1} : Y \to X$ είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση, άρα $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$.
- **Μεταβατική:** αν οι $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ είναι αμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις, τότε και η $g \circ f : X \to Z$ είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση.

Ακριβώς οι τρεις ιδιότητες μιας **σχέσης ισοδυναμίας** (Διάλεξη 4)! Η $\sim$ χωρίζει *όλα* τα σύνολα σε κλάσεις «ίδιου μεγέθους».

Παράδειγμα: $\mathbb{N} \sim$ άρτιοι φυσικοί

Απαντάμε το ερώτημα της εισαγωγής: η συνάρτηση

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{E}, \qquad f(n) = 2n$$

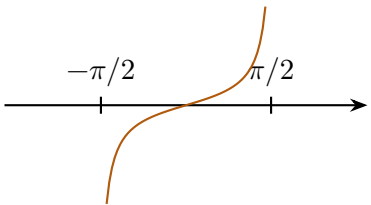
είναι ενριπτική (διαφορετικά n δίνουν διαφορετικά $2n$) και επιρριπτική (κάθε άρτιος είναι $2n$ για κάποιο n) – άρα αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση.

Παρατήρηση:

Αυτό είναι **αδύνατο** για πεπερασμένα σύνολα (ένα γνήσιο υποσύνολο έχει πάντα *λιγότερα* στοιχεία). Το ότι ένα άπειρο σύνολο μπορεί να είναι ισοδύναμο με γνήσιο υποσύνολό του είναι, στην πραγματικότητα, ένας από τους τρόπους να **ορίσουμε** τι σημαίνει «άπειρο»!

Παράδειγμα: ένα φραγμένο διάστημα $\sim \mathbb{R}$

Ακόμη πιο εκπληκτικό: το διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι ισοδύναμο με **όλο** το $\mathbb{R}$!



$$f : \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \tan(x)$$

είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση (γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό).

Ένα «μικρό» φραγμένο διάστημα έχει **το ίδιο πλήθος** σημείων με ολόκληρο το $\mathbb{R}$!

Πεπερασμένα Σύνολα

Ορισμός:

Έστω $\mathbb{N}_k = \{1, 2, \dots, k\}$ για $k \geq 1$ (**αρχικό τμήμα** των φυσικών). Ένα σύνολο X είναι **πεπερασμένο** αν $X \sim \mathbb{N}_k$ για κάποιο k (ή $X = \emptyset$).

Τότε $X \sim \mathbb{N}_k \iff |X| = k$ – ο ορισμός της πληθικότητας που ήδη ξέραμε, τυποποιημένος με τη γλώσσα της ισοδυναμίας συνόλων.

Ορισμός

Ένα σύνολο που **δεν** είναι πεπερασμένο λέγεται **άπειρο**.

Το $\mathbb{N}$ είναι άπειρο (δεν είναι ισοδύναμο με κανένα $\mathbb{N}_k$).

Αριθμήσιμο Σύνολο

Ορισμός: Αριθμήσιμο Σύνολο

Ένα σύνολο X είναι **αριθμήσιμο** αν $X \sim \mathbb{N}$. Γράφουμε τότε $|X| = \aleph_0$ («άλεφ-μηδέν»).

Ισοδύναμα: υπάρχει αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to X$, δηλαδή μπορούμε να «απαριθμήσουμε» τα στοιχεία του X σε μια (άπειρη) λίστα $x_0, x_1, x_2, \ldots$

Ορισμός: Αριθμήσιμο Σύνολο

Ένα σύνολο X είναι **το πολύ αριθμήσιμο** αν είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο.

Προσοχή: δεν είναι όλα τα άπειρα σύνολα αριθμήσιμα – θα το δούμε σύντομα!

Παράδειγμα: οι περιττοί φυσικοί

Η συνάρτηση $f(n) = 2n + 1$ δίνει μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση ανάμεσα στο $\mathbb{N}$ και το σύνολο των περιττών φυσικών.

Άρα οι περιττοί είναι αριθμήσιμοι – ίδια ιδέα με τους άρτιους που είδαμε νωρίτερα.

Παράδειγμα: το $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο

«Τυλίγουμε» τους ακεραίους γύρω από τους φυσικούς, εναλλάσσοντας θετικούς/αρνητικούς:

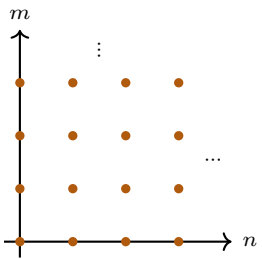
$$f(n) = \begin{cases} k & \text{αν } n = 2k \\ -k & \text{αν } n = 2k-1 \end{cases}$$

n:	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$f(n)$:	0	-1	1	-2	2	-3	$\cdots$

Αυτή η f είναι 1-1 και επί, άρα $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$: το $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο.

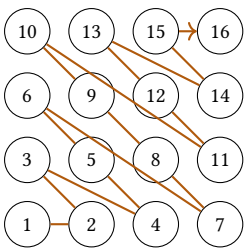
Παράδειγμα: το $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο

Απαριθμούμε το πλέγμα $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ακολουθώντας τις διαγωνίους:



Τα σημεία του $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Η απαρίθμηση κατά διαγωνίους



Στις σημειώσεις του κ. Κατερίνη δίνεται τύπος για μία (άλλη) τέτοια συνάρτηση: $g(n, m) = 2^n(2m + 1) - 1$ (κάθε φυσικός γράφεται μοναδικά ως 2^n επί περιττό).

Πρόταση: γινόμενο αριθμήσιμων είναι αριθμήσιμο

Θεώρημα:

Αν X, Y είναι αριθμήσιμα, τότε και το $X \times Y$ είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη: Έστω οι $f : \mathbb{N} \to X$, $g : \mathbb{N} \to Y$ αμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις.

Ορίζουμε

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X \times Y, \qquad h(n, m) = (f(n), g(m)),$$

που είναι μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση (γιατί;).

Άρα $X \times Y \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, και αφού $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ (προηγούμενη διαφάνεια), έχουμε $X \times Y \sim \mathbb{N}$. ■

Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο

Κάθε ρητός γράφεται μοναδικά ως $\frac{k}{m}$ με $m > 0$, k, m πρώτοι μεταξύ τους.

Η συνάρτηση $f\left(\frac{k}{m}\right) = (k, m)$ απεικονίζει το $\mathbb{Q}$ **ενριπτικά** στο $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

Το $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο (προηγούμενη πρόταση), άρα το $\mathbb{Q}$ είναι «το πολύ» αριθμήσιμο· αφού είναι και άπειρο, $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$.

Εντυπωσιακό: οι ρητοί *φαίνονται* πυκνότεροι από τους ακεραίους, αλλά έχουν **το ίδιο** πλήθος!

Άσκηση για την Τάξη

Άσκηση 1. Δείξτε ότι αν $X_0, X_1, X_2, \ldots$ είναι μια **αριθμήσιμη** οικογένεια αριθμήσιμων συνόλων, τότε η ένωση $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ είναι αριθμήσιμη.

(Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε την απαρίθμηση κατά διαγωνίους του $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.)

Άσκηση 2. Δείξτε ότι το σύνολο όλων των **πεπερασμένων** υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο.

Δεν είναι όλα τα άπειρα σύνολα αριθμήσιμα!

Είδαμε τα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ – όλα αριθμήσιμα. Μήπως **κάθε** άπειρο σύνολο είναι αριθμήσιμο;

Όχι! Θα δείξουμε ότι το διάστημα $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ **δεν** είναι αριθμήσιμο – χρησιμοποιώντας ένα από τα πιο διάσημα επιχειρήματα στα μαθηματικά: το **διαγώνιο επιχείρημα** του Cantor (1891).

Το επιχείρημα: υποθέτουμε το αντίθετο

Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι το $(0, 1)$ **είναι** αριθμήσιμο. Τότε υπάρχει απαρίθμηση $a_0, a_1, a_2, \ldots$ που περιέχει **κάθε** πραγματικό στο $(0, 1)$, γραμμένο σε δεκαδική μορφή:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0.\, a_{00}\, a_{01}\, a_{02}\, a_{03} \cdots \\
a_1 &= 0.\, a_{10}\, a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \cdots \\
a_2 &= 0.\, a_{20}\, a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \cdots \\
a_3 &= 0.\, a_{30}\, a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \cdots \\
a_4 &= 0.\, a_{40}\, a_{41}\, a_{42}\, a_{43} \cdots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Θα κατασκευάσουμε έναν αριθμό $b \in (0, 1)$ που **δεν** είναι σε αυτή τη λίστα – άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι η λίστα περιέχει *όλους* τους πραγματικούς στο $(0, 1)$.

Η διαγώνιος κατασκευή

Κοιτάμε τη **διαγώνιο** $a_{00}, a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ (ένα ψηφίο από κάθε αριθμό). Π.χ.:

	θέση 0	θέση 1	θέση 2	θέση 3
$a_0 = 0.$	3	4	1	5
$a_1 = 0.$	2	7	1	8
$a_2 = 0.$	5	5	0	2
$a_3 = 0.$	1	4	1	4

Ορίζουμε $b = 0.b_0 b_1 b_2 b_3 \cdots$ με

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{αν } a_{ii} = 9 \\ 9 - a_{ii} & \text{αν } a_{ii} \in \{0, \ldots, 8\} \end{cases}$$

Στο παράδειγμα: $b_0{=}9{-}3{=}6,\ b_1{=}9{-}7{=}2,\ b_2{=}9{-}0{=}9,\ b_3{=}9{-}4{=}5, \ldots$ άρα $b = 0.6295\ldots$

Η αντίφαση

Το $b \in (0,1)$ (είναι δεκαδικός με ψηφία 0–9, εξ ορισμού).

Το b διαφέρει από το a_i **ακριβώς** στη θέση i (αφού $b_i \neq a_{ii}$ εξ ορισμού) – άρα $b \neq a_i$ για **κάθε** $i \in \mathbb{N}$.

Παρατήρηση:

Το b είναι πραγματικός στο $(0,1)$ που **δεν** εμφανίζεται πουθενά στη λίστα $a_0, a_1, a_2, \ldots$ – αλλά η λίστα υποτίθεται ότι περιείχε **όλους** τους πραγματικούς του $(0,1)$! Άτοπο.

Άρα το $(0,1)$ **δεν** είναι αριθμήσιμο – είναι **υπεραριθμήσιμο**. ■

Άρα και το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο

Θυμηθείτε: είδαμε ότι $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$ μέσω της tan. Με παρόμοιο τρόπο, $(0, 1) \sim \mathbb{R}$.

Αφού το $(0, 1)$ είναι υπεραριθμήσιμο και $(0, 1) \sim \mathbb{R}$, και η ισοδυναμία διατηρεί το «μέγεθος», και το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο.

Παρατήρηση:

Υπάρχουν λοιπόν **τουλάχιστον δύο** διαφορετικά «μεγέθη απείρου»: το αριθμήσιμο $\aleph_0$ (όπως το $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$) και το υπεραριθμήσιμο του $\mathbb{R}$ – **αυστηρά μεγαλύτερο**!

Το Θεώρημα του Cantor

Το διαγώνιο επιχείρημα γενικεύεται εντυπωσιακά:

Θεώρημα: Θεώρημα του Cantor

Για **κάθε** σύνολο X (πεπερασμένο ή άπειρο), $X \nsim \mathcal{P}(X)$.

Δηλαδή το δυναμοσύνολο είναι **πάντα** «γνήσια μεγαλύτερο» από το ίδιο το σύνολο – ακόμη κι όταν και τα δύο είναι άπειρα!

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν **άπειρα πολλά, ολοένα μεγαλύτερα** μεγέθη απείρου: $\aleph_0 < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < \cdots$

Θα αποδείξετε αυτό το θεώρημα **εσείς** στο Φροντιστήριο – η απόδειξη είναι μια κομψή παραλλαγή του διαγώνιου επιχειρήματος που μόλις είδαμε!

Σύνοψη

- $X \sim Y$ (ισοδυναμία) $\iff$ υπάρχει αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $X \to Y$ – μια σχέση ισοδυναμίας στα σύνολα.
- Πεπερασμένο ($\sim \mathbb{N}_k$), άπειρο (όχι πεπερασμένο), αριθμήσιμο ($\sim \mathbb{N}$, μέγεθος $\aleph_0$).
- $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ αριθμήσιμα – παρά τη φαινομενική «πυκνότητα» ή «διπλή διάσταση».
- Το $(0, 1)$ και το $\mathbb{R}$ είναι **υπεραριθμήσιμα**: το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor.
- Θεώρημα του Cantor: $X \nsim \mathcal{P}(X)$ – άπειρα πολλά μεγέθη απείρου.

Επόμενη διάλεξη: Προτασιακή Λογική – η γλώσσα των μαθηματικών αποδείξεων.

Για το φροντιστήριο (Εβδ. 4): το Θεώρημα του Cantor, $X \nsim \mathcal{P}(X)$ (βλ. Φροντιστήριο 3, Μέρος Β).