Διακριτά Μαθηματικά

Διάλεξη 6: Επαγωγή

Γιώργος Αμανατίδης
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2026–27

Περιεχόμενα Διάλεξης

- Το πρόβλημα των γραμματοσήμων – ένα κίνητρο
- Αρχή Καλής Διάταξης & Αρχή της Επαγωγής (με απόδειξη ισοδυναμίας)
- Η «συνταγή» της επαγωγικής απόδειξης – δύο πλήρη παραδείγματα
- Ισχυρή Επαγωγή – ορισμός, παράδειγμα, και το πρόβλημα των γραμματοσήμων λυμένο
- Άσκηση για την τάξη

Ένα Κίνητρο

Έχετε γραμματόσημα των 5 και των 8 λεπτών, απεριόριστο πλήθος από το καθένα. Ποια ποσά μπορείτε να «πληρώσουμε» ακριβώς;

Με 5: $5, 10, 15, 20, \ldots$ Με 8: $8, 16, 24, \ldots$ Με συνδυασμούς: $5 + 8 = 13$, $5 + 5 + 8 = 18$, $8 + 8 + 8 = 24, \ldots$

Ποια ποσά **δεν** μπορούμε να πετύχουμε; $1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 14, 17, 19, 22, 27$ – και μετά;

Εικασία: κάθε ποσό ≥ 28 λεπτά μπορεί να πληρωθεί ακριβώς. Πώς θα το αποδείξουμε για **απείρως πολλά** ποσά ταυτόχρονα; **Επαγωγή!**

Αρχή Καλής Διάταξης

Ορισμός

Αρχή Καλής Διάταξης (ΑΚΔ). Κάθε μη κενό υποσύνολο $S \subseteq \mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

Φαίνεται «προφανές» – αλλά είναι θεμελιώδης ιδιότητα του $\mathbb{N}$ (**δεν** ισχύει στο $\mathbb{Z}$, ούτε στο $\mathbb{Q}_+$: το $\{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$ δεν έχει ελάχιστο!).

Θα τη χρησιμοποιήσουμε για να **αποδείξουμε** την Αρχή της Επαγωγής – στην πραγματικότητα είναι ισοδύναμες και «πρέπει» να δεχθούμε τη μία από τις δύο σαν αξίωμα (εδώ την ΑΚΔ).

Αρχή της Επαγωγής

Ορισμός

Αρχή της Επαγωγής. Έστω $P(n)$ πρόταση για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν

(i) $P(0)$ είναι αληθής (**βάση**), και

(ii) για κάθε $k \geq 0$: $P(k)$ αληθής $\Rightarrow$ $P(k+1)$ αληθής (**επαγωγικό βήμα**),

τότε $P(n)$ είναι αληθής για **κάθε** $n \in \mathbb{N}$.

Εικόνα: ντόμινο σε σειρά – αν πέσει το πρώτο, και κάθε πεσμένο ρίχνει το επόμενο, τότε πέφτουν **όλα**.

Απόδειξη: η Επαγωγή Πηγάζει από την ΑΚΔ

Πρόταση:

Η Αρχή Καλής Διάταξης συνεπάγεται την Αρχή της Επαγωγής.

Απόδειξη (με απαγωγή σε άτοπο). Υποθέστε ότι ισχύουν (i) και (ii), αλλά $P(n)$ είναι ψευδής για κάποιο n.

Έστω $S = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ ψευδής}\}$. Το S είναι μη κενό, άρα από την ΑΚΔ έχει ελάχιστο στοιχείο m.

Αφού $P(0)$ αληθής (i), έχουμε $m \neq 0$, άρα $m \geq 1$ και το $m - 1 \in \mathbb{N}$ δεν ανήκει στο S (αφού m είναι το ελάχιστο) – δηλαδή $P(m-1)$ αληθής.

Από (ii) με $k = m - 1$: $P(m-1)$ αληθής $\Rightarrow$ $P(m)$ αληθής – **άτοπο**, αφού $m \in S$. Άρα $S = \emptyset$. ■

Η «Συνταγή» της Επαγωγικής Απόδειξης

1. **Βάση:** δείξτε $P(0)$ (ή $P(n_0)$ για την αρχική τιμή).
2. **Επαγωγική υπόθεση:** υποθέστε $P(k)$ αληθής για κάποιο (αυθαίρετο, σταθερό) k.
3. **Επαγωγικό βήμα:** χρησιμοποιώντας την υπόθεση, δείξτε $P(k+1)$.
4. **Συμπέρασμα:** από την Αρχή της Επαγωγής, $P(n)$ αληθής για κάθε $n \geq n_0$.

Παρατήρηση:

Το πιο σημαντικό (και πιο δύσκολο) σημείο: στο βήμα 3, **πρέπει** να χρησιμοποιήσετε την υπόθεση του βήματος 2 – διαφορετικά δεν κάνατε επαγωγή!

Παράδειγμα 1: $n < 2^n$

Πρόταση:

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$: $n < 2^n$.

Βάση ($n = 0$): $0 < 2^0 = 1$.

Υπόθεση: έστω $k < 2^k$ για κάποιο $k \geq 0$.

Βήμα: θέλουμε $k + 1 < 2^{k+1}$. Από την υπόθεση,
$k + 1 < 2^k + 1 \leq 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ (χρησιμοποιήσαμε $1 \leq 2^k$, αφού $k \geq 0$).

Άρα $k + 1 < 2^{k+1}$. Από την Αρχή της Επαγωγής, $n < 2^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. ■

Επαγωγή από Μη Μηδενική Βάση

Η επαγωγή δουλεύει εξίσου καλά ξεκινώντας από οποιοδήποτε $n_0 \in \mathbb{Z}$: βάση $P(n_0)$, βήμα $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ για $k \geq n_0$, συμπέρασμα $P(n)$ για κάθε $n \geq n_0$.

Παράδειγμα:

Δείξτε $2n + 1 < n^2$ για κάθε $n \geq 3$.

Βάση ($n = 3$): $7 < 9$.

Υπόθεση: υποθέτουμε ότι $2k + 1 < k^2$ για κάποιο $k \geq 3$

Βήμα: έχουμε $2(k+1) + 1 = 2k + 1 + 2 < k^2 + 2 < k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$ (αφού $2k > 0$).

Γιατί δουλεύει; $P(n)$ για κάθε $n \geq n_0 \iff Q(\ell) := P(n_0 + \ell)$ για κάθε $\ell \geq 0$

Παράδειγμα 2: Άθροισμα Τετραγώνων

Πρόταση:

Για κάθε $n \geq 1$: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Βάση ($n = 1$): αριστερά $= 1$, δεξιά $= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$.

Υπόθεση: $1^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ για κάποιο $k \geq 1$.

Βήμα:

$$1^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right]$$

$$= (k+1) \cdot \frac{2k^2 + 7k + 6}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

ακριβώς ο τύπος για $n = k+1$. Άρα, από επαγωγή, ισχύει για κάθε $n \geq 1$. ■

Ισχυρή Επαγωγή

Ορισμός

Αρχή της Ισχυρής Επαγωγής. Αν

(i) $P(0)$ αληθής, και

(ii) για κάθε $k \geq 0$: $[P(0) \wedge P(1) \wedge \cdots \wedge P(k)] \Rightarrow P(k+1)$,

τότε $P(n)$ αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Διαφορά από την «απλή» επαγωγή: στο βήμα, επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουμε **όλες** τις προηγούμενες περιπτώσεις, όχι μόνο την αμέσως προηγούμενη.

Απόδειξη: Ισχυρή Επαγωγή $\iff$ Επαγωγή

Παρατήρηση:

Οι δύο αρχές είναι **λογικά ισοδύναμες** – καμία δεν είναι «πιο ισχυρή» στην πράξη, απλώς η ισχυρή είναι πιο βολική όταν το $P(k+1)$ χρειάζεται περισσότερες από μία προηγούμενες περιπτώσεις.

Ιδέα απόδειξης ($\Leftarrow$, απλή $\Rightarrow$ ισχυρή): εφαρμόστε απλή επαγωγή στην πρόταση $Q(k) := P(0) \wedge P(1) \wedge \cdots \wedge P(k)$ αντί στην $P(k)$. Η βάση και το βήμα για το Q προκύπτουν ακριβώς από τις υποθέσεις (i),(ii) της ισχυρής επαγωγής.

Παράδειγμα: Κάθε $n > 1$ Έχει Πρώτο Διαιρέτη

Πρόταση:

Κάθε ακέραιος $n > 1$ έχει τουλάχιστον έναν πρώτο διαιρέτη.

Ισχυρή επαγωγή στο n, βάση $n = 2$.

Βάση: το 2 είναι πρώτο, διαιρεί τον εαυτό του.

Υπόθεση: κάθε ακέραιος m με $2 \leq m \leq k$ έχει κάποιον πρώτο διαιρέτη.

Βήμα (για $k+1$): Αν το $k+1$ είναι πρώτο, τελειώσαμε (διαιρεί τον εαυτό του). Αλλιώς είναι σύνθετο: $k+1 = a \cdot b$ με $1 < a, b < k+1$. Από την υπόθεση, το a (που είναι $\leq k$) έχει κάποιον πρώτο διαιρέτη p· τότε $p \mid a$, ενώ $a \mid (k+1)$, άρα το p διαιρεί το $k+1$. ■

Επιστροφή στα Γραμματόσημα

Πρόταση:

Κάθε ποσό $n \geq 28$ λεπτών μπορεί να πληρωθεί ακριβώς με γραμματόσημα των 5 και 8 λεπτών.

Ισχυρή επαγωγή, βάση: 5 **διαδοχικές τιμές** $28, \ldots, 32$:
$28 = 4 \cdot 5 + 8,\ 29 = 5 + 3 \cdot 8,\ \ 30 = 6 \cdot 5,\ \ 31 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 8,$ και $32 = 4 \cdot 8.$

Επαγωγικό βήμα: έστω $k \geq 32$ και ότι **κάθε** ποσό στο $[28, k]$ πληρώνεται. Θέλουμε το $k+1$. Αφού $k+1 \geq 33$, το $(k+1)-5 \geq 28$ πληρώνεται (υπόθεση)· προσθέστε ένα ακόμη γραμματόσημο των 5 για να πληρώσετε το $k+1$.

Γιατί χρειαστήκαμε 5 *τιμές στη βάση και όχι μία;* Επειδή «κοιτάμε πίσω» 5 βήματα· η βάση πρέπει να καλύπτει ένα «παράθυρο» τουλάχιστον όσο το βήμα μας.

Άσκηση για την Τάξη

Άσκηση 1. Δείξτε με επαγωγή ότι για κάθε $n \geq 1$: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ (το άθροισμα των πρώτων n περιττών αριθμών).

Άσκηση 2. Δείξτε με επαγωγή ότι το γινόμενο $n(n+1)(n+2)$ τριών διαδοχικών φυσικών αριθμών διαιρείται πάντα με το 6, για κάθε $n \geq 1$.

Σύνοψη

- Αρχή Καλής Διάταξης $\Rightarrow$ Αρχή της Επαγωγής (πλήρης απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο).
- Συνταγή: βάση, επαγωγική υπόθεση, επαγωγικό βήμα (που **χρησιμοποιεί** την υπόθεση), συμπέρασμα.
- Ισχυρή επαγωγή: επιτρέπει χρήση **όλων** των προηγούμενων περιπτώσεων· λογικά ισοδύναμη με την απλή επαγωγή.
- Βάση μπορεί να είναι σε οποιοδήποτε n_0 – και, στην ισχυρή επαγωγή, μπορεί να χρειάζεται **παράθυρο** πολλών διαδοχικών βάσεων (π.χ. γραμματόσημα).

Επόμενη διάλεξη: Ισοδυναμία Συνόλων – πεπερασμένα, άπειρα, αριθμήσιμα, και υπεραριθμήσιμα σύνολα.

Για το φροντιστήριο (Εβδ. 3): επαγωγικές αποδείξεις (βλ. Φροντιστήριο 2, Μέρος Β).