Διακριτά Μαθηματικά

Διάλεξη 5: Συναρτήσεις

Γιώργος Αμανατίδης
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2026–27

Περιεχόμενα Διάλεξης

- Ορισμός συνάρτησης (ως ειδικής σχέσης), πεδίο ορισμού/τιμών, εικόνα & αντίστροφη εικόνα
- Ενριπτικές, επιρριπτικές, και αμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις
- Μέτρηση συναρτήσεων ανάμεσα σε πεπερασμένα σύνολα
- Σύνθεση συναρτήσεων και αντίστροφη συνάρτηση – με αποδείξεις
- Ειδικές συναρτήσεις: ταυτοτική, εγκλεισμού, χαρακτηριστική

Από τις Σχέσεις στις Συναρτήσεις

Έστω $\mathcal{S}$ το σύνολο των φοιτητών του 3ου έτους σε ένα τμήμα πληροφορικής και $\mathcal{C}$ το σύνολο των μαθημάτων του αντίστοιχου έτους.

Μπορούμε να ορίσουμε τη σχέση «παρακολουθεί» ανάμεσα σε φοιτητές και μαθήματα. Φυσικά, ένας φοιτητής μπορεί να παρακολουθεί **πολλά** μαθήματα.

Ας υποθέσουμε πως στο τμήμα αυτό οι φοιτητές του 3ου έτους πρέπει να πάρουν ακριβώς ένα μάθημα κορμού από την σχετική λίστα μαθημάτων και 5 μαθήματα επιλογής από μια άλλη λίστα.

Ο περιορισμός της «παρακολουθεί» στα μαθήματα κορμού, δίνει την «παρακολουθεί το μάθημα κορμού» όπου κάθε φοιτητής σχετίζεται με **ακριβώς ένα** μάθημα.

Αυτή η σχέση έχει μια πολύ ειδική ιδιότητα: **κάθε** στοιχείο του πρώτου συνόλου $\mathcal{S}$ αντιστοιχεί σε **ακριβώς ένα** στοιχείο του δεύτερου συνόλου $\mathcal{C}$.

Αυτή η ιδιότητα ορίζει μία από τις πιο σημαντικές έννοιες στα μαθηματικά: τη **συνάρτηση**.

Ορισμός

Ορισμός: Συνάρτηση

Μια **συνάρτηση** f από το X στο Y είναι μια σχέση $f \subseteq X \times Y$ τέτοια ώστε:

(i) το πεδίο ορισμού της είναι **όλο** το X (κάθε $x \in X$ σχετίζεται με κάτι), και

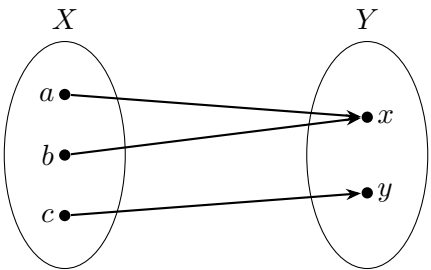
(ii) αν $(x, y) \in f$ και $(x, z) \in f$, τότε $y = z$ (**μοναδικότητα** της εικόνας).

Γράφουμε $f : X \to Y$, και το μοναδικό y με $(x, y) \in f$ το γράφουμε $y = f(x)$.

Δηλαδή: κάθε $x \in X$ στέλνεται **κάπου** (ύπαρξη) και **πουθενά αλλού** (μοναδικότητα).

Παράδειγμα με Διάγραμμα Βελών

Έστω $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{x, y\}$, και $f = \{(a, x), (b, x), (c, y)\}$.



Κάθε κορυφή του X έχει **ακριβώς ένα** εξερχόμενο βέλος – αυτό είναι το «τεστ» για να είναι μια σχέση συνάρτηση! Εδώ $f(a) = x,\ f(b) = x,\ f(c) = y$.

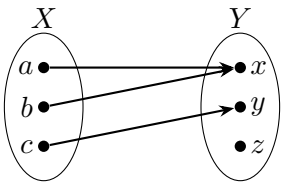
Πεδίο Ορισμού, Άφιξης, Τιμών

Για $f : X \to Y$:

- Το X λέγεται **πεδίο ορισμού** (domain).
- Το Y λέγεται **πεδίο άφιξης** ή **σύνολο-στόχος** (codomain).
- Το **πεδίο τιμών** (range) είναι $\{y \in Y \,:\, f(x) = y \text{ για κάποιο } x \in X\} \subseteq Y$.

Παρατήρηση:

Το πεδίο τιμών **δεν** χρειάζεται να είναι όλο το Y! Στο προηγούμενο παράδειγμα το πεδίο τιμών ήταν $\{x, y\} = Y$, αλλά αυτό δεν συμβαίνει πάντα. Για παράδειγμα:



Εικόνα & Αντίστροφη Εικόνα Συνόλου

Ορισμός:

Για $f : X \to Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$:

- **Εικόνα** του A: $\quad f(A) = \{y \in Y \,:\, f(x) = y \text{ για κάποιο } x \in A\}$.
- **Αντίστροφη εικόνα** του B: $\quad f^{-1}(B) = \{x \in X \,:\, f(x) \in B\}$.

Παράδειγμα:

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Τότε $f(\{-2, -1, 1\}) = \{1, 4\}$ (το -1 και το 1 δίνουν την ίδια εικόνα!). Και $f^{-1}(\{4, 9\}) = \{-3, -2, 2, 3\}$.

Παρατήρηση:

Η αντίστροφη εικόνα, f^{-1}, της $f : X \to Y$ δεν είναι συνάρτηση από το Y στο X! Είναι όμως συνάρτηση από το $\mathcal{P}(Y)$ στο $\mathcal{P}(X)$, και άρα ορίζεται για κάθε υποσύνολο του Y.

Απόδειξη: $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Πρόταση:

Για $f : X \to Y$ και $A, B \subseteq X$: $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

($\subseteq$) Έστω $y \in f(A \cup B)$: υπάρχει $x \in A \cup B$ με $f(x) = y$. Αν $x \in A$, τότε $y \in f(A)$· αν $x \in B$, τότε $y \in f(B)$. Σε κάθε περίπτωση $y \in f(A) \cup f(B)$.

($\supseteq$) Έστω $y \in f(A) \cup f(B)$. Αν $y \in f(A)$, υπάρχει $x \in A \subseteq A \cup B$ με $f(x) = y$, άρα $y \in f(A \cup B)$. Ομοίως αν $y \in f(B)$.

Άρα $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. ■

Προσοχή: για την **τομή** ισχύει μόνο $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ και όχι πάντα ισότητα (θα το δούμε σε άσκηση)!

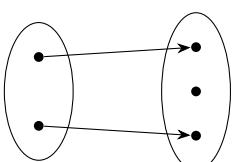
Ενριπτική (1-1 / Injective)

Ορισμός: Ενριπτική Συνάρτηση

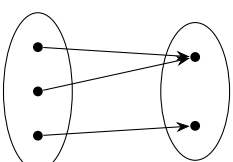
Η $f : X \to Y$ είναι **ενριπτική** (ένα-προς-ένα) αν διαφορετικά στοιχεία του X στέλνονται σε διαφορετικά στοιχεία του Y:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Ενριπτική



Μη ενριπτική



Κάθε στοιχείο του συνόλου στα δεξιά έχει το πολύ *ένα εισερχόμενο βέλος.*

Επιρριπτική (Επί / Surjective)

Ορισμός: Επιρριπτική Συνάρτηση

Η $f : X \to Y$ είναι **επιρριπτική** (επί) αν το πεδίο τιμών είναι όλο το Y: κάθε $y \in Y$ είναι εικόνα **κάποιου** $x \in X$.



Κάθε στοιχείο του συνόλου στα δεξιά έχει τουλάχιστον *ένα εισερχόμενο βέλος.*

Αμφιμονοσήμαντη (Bijective)

Ορισμός:

Η $f : X \to Y$ είναι **αμφιμονοσήμαντη** (αμφιρριπτική / bijection) αν είναι **και** ενριπτική **και** επιρριπτική.

Κάθε στοιχείο του Y είναι εικόνα **ακριβώς ενός** στοιχείου του X.

Μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση «ταιριάζει» τέλεια τα δύο σύνολα – ιδιαίτερα χρήσιμο όταν θέλουμε να **μετρήσουμε** ή να **συγκρίνουμε** μεγέθη συνόλων (θα το ξαναδούμε στην Ισοδυναμία Συνόλων!).

Μέτρηση Συναρτήσεων: Ένα Μικρό Παράδειγμα

Έστω $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$. Πόσες συναρτήσεις $f : A \to B$ υπάρχουν;

Κάθε ένα από τα a, b, c έχει 2 επιλογές (ανεξάρτητα)
$\Rightarrow$ πολλαπλασιαστική αρχή: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ συναρτήσεις συνολικά.

Ενριπτικές; Χρειαζόμαστε 3 *διαφορετικές* εικόνες σε ένα σύνολο με μόνο 2 στοιχεία – **αδύνατο**! 0 ενριπτικές.

Επιρριπτικές; Χρειαζόμαστε να «χτυπηθούν» και το 1 και το 2 – όλες εκτός από τις 2 σταθερές ($a, b, c \mapsto 1$ όλα, ή όλα $\mapsto 2$): $8 - 2 = 6$ επιρριπτικές.

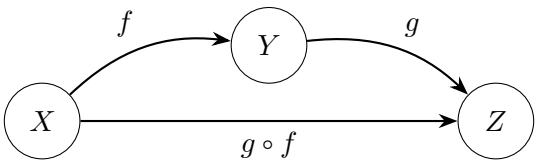
Γενικά: αν $|A| = m$, $|B| = n$, υπάρχουν n^m συναρτήσεις $f : A \to B$ συνολικά (θα δείτε περισσότερα στο Φροντιστήριο!).

Σύνθεση Συναρτήσεων

Ορισμός: Σύνθεση

Έστω $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$. Η **σύνθεση** $g \circ f : X \to Z$ ορίζεται από

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \qquad x \in X.$$



Προσοχή στη σειρά: πρώτα εφαρμόζουμε την f, μετά την g – αλλά γράφουμε $g \circ f$ (όπως στη σύνθεση από τον Απειροστικό Λογισμό).

Ιδιότητες της Σύνθεσης

Δεν είναι μεταθετική γενικά: $g \circ f \neq f \circ g$ (ούτε καν ορίζονται πάντα και τα δύο!).

Είναι προσεταιριστική: για $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Παρατήρηση:

Απόδειξη προσεταιριστικότητας: και οι δύο πλευρές, εφαρμοσμένες σε x, δίνουν $h(g(f(x)))$ – απλώς παρακολουθούμε πού πηγαίνει το x βήμα-βήμα.

Απόδειξη: η Σύνθεση Δύο Ενριπτικών είναι Ενριπτική

Πρόταση:

Αν $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ είναι ενριπτικές, τότε και η $g \circ f : X \to Z$ είναι ενριπτική.

Απόδειξη. Έστω $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, δηλαδή $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.

Αφού η g είναι ενριπτική, έπεται $f(x_1) = f(x_2)$.

Αφού η f είναι ενριπτική, έπεται $x_1 = x_2$.

Άρα $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, δηλαδή η $g \circ f$ είναι ενριπτική. ■

Παρόμοια αποδεικνύεται ότι η σύνθεση δύο επιρριπτικών είναι επιρριπτική – άρα η σύνθεση δύο αμφιμονοσήμαντων είναι αμφιμονοσήμαντη!

Αντίστροφη Συνάρτηση

Ορισμός:

Αν $f : X \to Y$ είναι αμφιμονοσήμαντη, ορίζουμε την **αντίστροφη συνάρτηση** $f^{-1} : Y \to X$ με

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

Τότε $f(f^{-1}(y)) = y$ για κάθε $y \in Y$, και $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in X$.

Έχουμε παραφορτώσει το συμβολισμό f^{-1}. Εδώ δεν αναφερόμαστε στην αντίστροφη εικόνα αλλά στην αντίστροφη *συνάρτηση*. Αντιπαράβαλε το $f^{-1}(y)$ με το $f^{-1}(\{y\})$.

Παρατήρηση:

Η f^{-1} ορίζεται **μόνο** όταν η f είναι αμφιμονοσήμαντη – χρειαζόμαστε την ύπαρξη (επί) **και** τη μοναδικότητα (ενριπτική) για κάθε y.

Η Αντίστροφη μιας Σύνθεσης

Αν $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ είναι αμφιμονοσήμαντες, τότε και η $g \circ f$ είναι αμφιμονοσήμαντη, με

Τύπος:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Λογικό: για να «αναιρέσουμε» το f ακολουθούμενο από g, πρέπει πρώτα να αναιρέσουμε το *τελευταίο* βήμα (g^{-1}) και μετά το πρώτο (f^{-1}) – ακριβώς όπως βγάζουμε πρώτα τα παπούτσια και μετά τις κάλτσες, με αντίστροφη σειρά από το ντύσιμο!

Μια Σύντομη Περιήγηση

Ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{id}_X : X \to X$: $\mathrm{id}_X(x) = x$ για κάθε x.

Συνάρτηση εγκλεισμού: αν $X \subseteq Y$, η $j : X \to Y$ με $j(x) = x$ (σαν την ταυτοτική, αλλά «βλέπει» το X μέσα σε μεγαλύτερο σύνολο).

Περιορισμός: αν $f : Y \to Z$ και $X \subseteq Y$, ο περιορισμός $f|_X : X \to Z$ έχει $f|_X(x) = f(x)$ – «ίδια συνάρτηση, μικρότερο πεδίο ορισμού».

Προβολές: $\pi_1 : X \times Y \to X$ με $\pi_1(x, y) = x$ (και ανάλογα π_2).

Χαρακτηριστική Συνάρτηση

Ορισμός: Χαρακτηριστική Συνάρτηση

Για $A \subseteq X$, η **χαρακτηριστική συνάρτηση** $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ ορίζεται

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in A \\ 0 & \text{αν } x \notin A. \end{cases}$$

Παρατήρηση:

Ξεκινήσαμε τη Διάλεξη 1 με **σύνολα**, και τώρα βλέπουμε ότι κάθε υποσύνολο $A \subseteq X$ αντιστοιχεί σε μια **συνάρτηση** χ_A – και αντίστροφα, κάθε συνάρτηση $X \to \{0, 1\}$ ορίζει ένα υποσύνολο! Αυτό θα φανεί χρήσιμο αργότερα.

Άσκηση για την Τάξη

Άσκηση 1. Δείξτε ότι για $f : X \to Y$ και $A, B \subseteq X$: $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Βρείτε ένα παράδειγμα όπου η ισότητα **αποτυγχάνει**.

Άσκηση 2. Δείξτε ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, δεν είναι ενριπτική συνάρτηση, αλλά ο περιορισμός της $f|_{[0,\infty)}$ είναι.

Σύνοψη

- Συνάρτηση = σχέση με ύπαρξη **και** μοναδικότητα εικόνας για κάθε $x \in X$.
- Πεδίο ορισμού/άφιξης/τιμών· εικόνα $f(A)$ και αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(B)$ – με πρώτη απόδειξη $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- Ενριπτική, επιρριπτική, αμφιμονοσήμαντη – και ότι η σύνθεση διατηρεί καθεμία απ' αυτές τις ιδιότητες.
- Σύνθεση $g \circ f$: προσεταιριστική, όχι μεταθετική· αντίστροφη *συνάρτηση* f^{-1} ορίζεται μόνο για αμφιμονοσήμαντες.

Επόμενη διάλεξη: Φυσικοί Αριθμοί & Αρχή της Επαγωγής – πώς αποδεικνύουμε προτάσεις για **όλους** τους φυσικούς αριθμούς.

Για το φροντιστήριο (Εβδ. 3): μέτρηση συναρτήσεων και ενριπτικών/επιρριπτικών (βλ. Φροντιστήριο 2, Μέρος Α).