Διακριτά Μαθηματικά

Διάλεξη 4: Σχέσεις (Β)

Γιώργος Αμανατίδης
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2026–27

Περιεχόμενα Διάλεξης

- Σχέσεις ισοδυναμίας, κλάσεις ισοδυναμίας – με πλήρεις αποδείξεις
- Διαμερίσεις: η ισοδυναμία και οι δύο κατευθύνσεις της
- Σχέσεις διάταξης: μερική/ολική διάταξη, ελάχιστο/μέγιστο, φράγματα, διαγράμματα Hasse

Σχέση Ισοδυναμίας

Ορισμός: Σχέση Ισοδυναμίας

Μια σχέση στο A που είναι **αυτοπαθής**, **συμμετρική**, και **μεταβατική** λέγεται **σχέση ισοδυναμίας**.

Το πρότυπο παράδειγμα: η **ισότητα** $= (a = a, a = b \Rightarrow b = a, a = b, b = c \Rightarrow a = c)$.

Μια σχέση ισοδυναμίας είναι *οτιδήποτε συμπεριφέρεται σαν ισότητα* – συλλαμβάνει την ιδέα «είναι *ουσιαστικά* το ίδιο πράγμα».

Κλάση Ισοδυναμίας & Σύνολο Πηλίκο

Ορισμός:

Έστω R σχέση ισοδυναμίας στο $A \neq \emptyset$. Η **κλάση ισοδυναμίας** του $a \in A$ είναι

$$[a]_R = \{b \in A \,:\, a\,R\,b\}.$$

Το **σύνολο πηλίκο** είναι το σύνολο όλων των κλάσεων: $A/R = \{[a]_R \,:\, a \in A\}$.

Παρατηρήστε: $A/R \subseteq \mathcal{P}(A)$ – κάθε κλάση ισοδυναμίας είναι η ίδια ένα σύνολο (υποσύνολο του A)!

Απόδειξη: $[a]_R = [b]_R \iff a\,R\,b$

Πρόταση:

Για $a, b \in A$: $[a]_R = [b]_R \iff a\,R\,b$.

($\Rightarrow$) Έστω $[a]_R = [b]_R$. Αφού $b \in [b]_R$ (η R αυτοπαθής, $b\,R\,b$), έχουμε $b \in [a]_R$, δηλαδή $a\,R\,b$.

($\Leftarrow$) Έστω $a\,R\,b$. Θα δείξουμε $[a]_R \subseteq [b]_R$: αν $c \in [a]_R$, τότε $a\,R\,c$· από συμμετρικότητα $b\,R\,a$ (αφού $a\,R\,b$), και από μεταβατικότητα $b\,R\,a$ (δείξαμε ότι $a\,R\,c \Rightarrow b\,R\,c$), δηλαδή $c \in [b]_R$. Συμμετρικά, $[b]_R \subseteq [a]_R$ (χρησιμοποιώντας $b\,R\,a$). Άρα $[a]_R = [b]_R$. ■

Απόδειξη: Διαφορετικές Κλάσεις είναι Ξένες

Πρόταση:

Αν $[a]_R \neq [b]_R$, τότε $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.

Απόδειξη (με αντιθετοαντιστροφή). Υποθέτουμε $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$ και θα δείξουμε $[a]_R = [b]_R$.

Έστω $c \in [a]_R \cap [b]_R$: τότε $a \, R \, c$ και $b \, R \, c$. Από συμμετρικότητα, $c \, R \, b$. Από μεταβατικότητα ($a \, R \, c$ και $c \, R \, b$), $a \, R \, b$.

Από την προηγούμενη πρόταση, $a \, R \, b \Rightarrow [a]_R = [b]_R$. ■

Διαμέριση (Partition)

Ορισμός: Διαμέριση

Μία **διαμέριση** ενός συνόλου A είναι μια συλλογή μη κενών, ανά δύο ξένων υποσυνόλων του A των οποίων η ένωση είναι το A.

Θεώρημα:

Κάθε σχέση ισοδυναμίας R στο A ορίζει μία διαμέριση A/R του A.

Απόδειξη. Κάθε $[a]_R$ είναι μη κενό (αφού $a \in [a]_R$, από αυτοπάθεια). Δύο διαφορετικές κλάσεις είναι ξένες (προηγούμενη πρόταση). Και $\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$, αφού κάθε $a \in A$ ανήκει (τουλάχιστον) στην $[a]_R$. Άρα το A/R είναι διαμέριση. ■

Το Αντίστροφο: Διαμέριση ⇒ Σχέση Ισοδυναμίας

Θεώρημα:

Κάθε διαμέριση $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, ...\}$ του A ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας $R_{\mathcal{P}}$ στο A:
$a \, R_{\mathcal{P}} \, b \iff$ τα a, b ανήκουν στο **ίδιο** *μερίδιο* P_i.

Απόδειξη. Αυτοπαθής: κάθε a ανήκει σε κάποιο P_i (αφού $\bigcup P_i = A$), άρα $a \, R_{\mathcal{P}} \, a$.

Συμμετρική: αν a, b ανήκουν στο ίδιο P_i, τότε προφανώς και b, a ανήκουν στο ίδιο P_i.

Μεταβατική: αν $a, b \in P_i$ και $b, c \in P_j$, τότε $b \in P_i \cap P_j$· αφού τα κομμάτια είναι ανά δύο ξένα, $P_i = P_j$, άρα a, c ανήκουν στο ίδιο κομμάτι. ■

Παρατήρηση:

Σχέσεις ισοδυναμίας και διαμερίσεις είναι, ουσιαστικά, **δύο όψεις της ίδιας ιδέας** – και οι δύο κατευθύνσεις είναι πλέον αποδεδειγμένες.

Μεγάλο Παράδειγμα: η Σχέση $\equiv_4$ στο $\mathbb{Z}$

Ορίζουμε $a \equiv_4 b \iff a - b = 4k$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$.

Αυτοπαθής: $a - a = 0 = 4 \cdot 0$.

Συμμετρική: $a - b = 4k \Rightarrow b - a = 4(-k)$.

Μεταβατική: $a - b = 4\lambda,\ b - c = 4\mu \Rightarrow a - c = 4(\lambda + \mu)$.

Άρα η $\equiv_4$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{Z}$.

Οι Κλάσεις της $\equiv_4$

$$[0] = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\} = \{4k \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$$
$$[1] = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\} = \{4k+1 \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$$
$$[2] = \{4k+2 \,:\, k \in \mathbb{Z}\} \qquad [3] = \{4k+3 \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$$

Κάθε ακέραιος είναι της μορφής $4k, 4k{+}1, 4k{+}2$ ή $4k{+}3$ (ανάλογα με το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το 4).

Άρα $\mathbb{Z}/\equiv_4 = \{[0], [1], [2], [3]\}$ – ανά δύο ξένες κλάσεις. Η ένωσή τους $= \mathbb{Z}$.
Μία διαμέριση του $\mathbb{Z}$ σε 4 κομμάτια!

Ένα Δεύτερο Παράδειγμα: «Ίδιο Πρόσημο»

Στο $A = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, ορίζουμε $a \sim b \iff a \cdot b > 0$ (δηλαδή a, b έχουν το ίδιο πρόσημο).

Αυτοπαθής: $a \cdot a = a^2 > 0$ για $a \neq 0$.

Συμμετρική: $a \cdot b > 0 \Rightarrow b \cdot a > 0$ (πολλαπλασιασμός μεταθετικός).

Μεταβατική: αν $ab > 0$ και $bc > 0$, τότε a, b ίδιο πρόσημο και b, c ίδιο πρόσημο, άρα a, c ίδιο πρόσημο, δηλαδή $ac > 0$.

Οι κλάσεις: $[1] = \{\text{θετικοί ακέραιοι}\}$, $[-1] = \{\text{αρνητικοί ακέραιοι}\}$
Μία διαμέριση του A σε 2 κομμάτια.

Μερική Διάταξη

Ορισμός: Μερική Διάταξη

Μια σχέση $\preceq$ στο A που είναι **αυτοπαθής**, **αντισυμμετρική**, και **μεταβατική** λέγεται **μερική διάταξη**. Το ζεύγος $(A, \preceq)$ λέγεται **μερικά διατεταγμένο σύνολο**.

Πρότυπο παράδειγμα: το $\leq$ στο $\mathbb{R}$ ή στο $\mathbb{N}$. Επίσης μερικές διατάξεις: η $\subseteq$ στο $\mathcal{P}(X)$, και η διαιρετότητα $\mid$ στο $\mathbb{Z}_+$.

Παράδειγμα: η Διαιρετότητα στο $\mathbb{Z}_+$

Ορίζουμε $a \mid b \iff$ υπάρχει $k \in \mathbb{Z}_+$ με $b = ka$.

Αυτοπαθής: $a \mid a$ επειδή $a = 1 \cdot a$.

Αντισυμμετρική: αν $a \mid b$ και $b \mid a$ τότε $b = ka$ και $a = \ell b$, με $k, \ell \in \mathbb{Z}_+$. Επειδή $k = 1/\ell$, πρέπει $k = \ell = 1$ και άρα $a = b$.

Μεταβατική: αν $a \mid b$ και $b \mid c$, τότε $b = ka$, $c = jb$, με $k, j \in \mathbb{Z}_+$. Τότε όμως $c = (jk)a$, επομένως $a \mid c$.

Άρα η $\mid$ είναι μερική διάταξη στο $\mathbb{Z}_+$. Είναι **ολική**;
Όχι! Π.χ. $2 \nmid 3$ και $3 \nmid 2$ – δύο στοιχεία που **δεν** συγκρίνονται.

Ολική (Γραμμική) Διάταξη

Ορισμός: Ολική Διάταξη

Μια μερική διάταξη $\preceq$ στο A είναι **ολική** (ή **γραμμική**) αν για **κάθε** $a, b \in A$ ισχύει $a \preceq b$ ή $b \preceq a$ (δηλαδή, οποιαδήποτε δύο στοιχεία συγκρίνονται).

Το $\leq$ στο $\mathbb{N}$ ή στο $\mathbb{R}$: **ολική** διάταξη.

Η διαιρετότητα στο $\mathbb{Z}_+$, ή η $\subseteq$ σε ένα $\mathcal{P}(X)$ με $|X| \geq 2$: **μερική** αλλά **όχι ολική**.

Ελάχιστο & Μέγιστο Στοιχείο

Έστω $(X, \preceq)$ μερικά διατεταγμένο σύνολο.

Ορισμός:

Το $a \in X$ είναι το **ελάχιστο στοιχείο** του X αν $a \preceq x$ για **κάθε** $x \in X$.
Το $b \in X$ είναι το **μέγιστο στοιχείο** του X αν $x \preceq b$ για **κάθε** $x \in X$.

Πρόταση:

Αν το $(X, \preceq)$ έχει ελάχιστο (αντίστοιχα, μέγιστο), τότε αυτό είναι μοναδικό.

Απόδειξη για το ελάχιστο. Αν a, a' είναι και τα δύο ελάχιστα, τότε $a \preceq a'$ (αφού a ελάχιστο) και $a' \preceq a$ (αφού a' ελάχιστο)· από αντισυμμετρικότητα, $a = a'$. ■

Σχετικό Ελάχιστο & Μέγιστο (Ελάσσον/Μείζον)

Σε μια **μερική** (όχι ολική) διάταξη, μπορεί να μην υπάρχει ελάχιστο ή/και μέγιστο – αλλά να υπάρχουν **πολλά** στοιχεία που δεν τα ξεπερνά κανένα άλλο!

Ορισμός:

Το $a \in X$ είναι **ελάσσον** (ή ελαχιστικό) **στοιχείο** αν δεν υπάρχει $x \neq a$ με $x \preceq a$.
Το $b \in X$ είναι **μείζον** (ή μεγιστικό) **στοιχείο** αν δεν υπάρχει $x \neq b$ με $b \preceq x$.

Παράδειγμα:

Στο $X = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ με τη διαιρετότητα: τα $2, 3, 5$ είναι **όλα** ελάσσονα στοιχεία (κανένα δεν διαιρεί κάποιο άλλο εξ αυτών), **δεν** υπάρχει όμως ελάχιστο στοιχείο του X!

Θεώρημα: Ύπαρξη Ελάσσονος Στοιχείου

Θεώρημα:

Κάθε μη κενό, **πεπερασμένο** μερικά διατεταγμένο σύνολο $(X, \preceq)$ έχει τουλάχιστον ένα ελάσσον στοιχείο.

Ιδέα απόδειξης. Ξεκινάμε από τυχαίο $x_1 \in X$. Αν δεν είναι ελάσσον, υπάρχει $x_2 \prec x_1$ («γνησίως μικρότερο», δηλαδή $x_2 \preceq x_1$ αλλά $x_2 \neq x_1$). Αν ούτε αυτό είναι ελάσσον, υπάρχει $x_3 \prec x_2$, κ.ο.κ.

Αφού το X είναι πεπερασμένο, αυτή η φθίνουσα αλυσίδα $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ \cdots$ **δεν** μπορεί να συνεχιστεί για πάντα (όλα τα x_i είναι διαφορετικά, αφού $\prec$ αντισυμμετρική). Άρα κάποιο x_n είναι ελάσσον. ■

Σε **άπειρο** σύνολο αυτό μπορεί να αποτύχει: το $(\mathbb{Z}, \leq)$ δεν έχει κανένα ελάσσον στοιχείο!

Κατώτερο & Ανώτερο Φράγμα

Έστω $(X, \preceq)$ μερικά διατεταγμένο σύνολο και $E \subseteq X$.

Ορισμός:

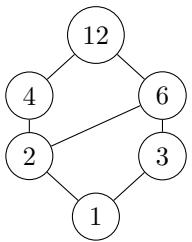
$c \in X$ είναι **κάτω φράγμα** του E αν $c \preceq x$ για κάθε $x \in E$.
$d \in X$ είναι **άνω φράγμα** του E αν $x \preceq d$ για κάθε $x \in E$.

Προσοχή: το φράγμα δεν χρειάζεται να ανήκει στο E, παρά μόνο στο X!

Π.χ., αν $(X, \preceq) = (\mathbb{R}, \leq)$ και $E = (0, 1)$, το 0 είναι ένα κάτω φράγμα του E που δεν ανήκει στο E.

Οπτικοποίηση: Διάγραμμα Hasse

Για τη διαιρετότητα στο $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, σχεδιάζουμε μόνο τις «άμεσες» σχέσεις (οι υπόλοιπες προκύπτουν από μεταβατικότητα):



Ανεβαίνουμε προς τα πάνω = «διαιρεί»: $2 \mid 12$ γιατί υπάρχει ανιούσα διαδρομή $2 \to 4 \to 12$. Ελάχιστο στοιχείο: 1. Μέγιστο στοιχείο: 12.

Άσκηση για την Τάξη

Ορίζουμε τη σχέση $\lhd$ στο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ως εξής:

$$(\alpha, \beta) \lhd (\gamma, \delta) \iff \alpha < \gamma \text{ ή } (\alpha = \gamma \text{ και } \beta \leq \delta).$$

Δείξτε ότι η $\lhd$ είναι μερική διάταξη στο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Είναι ολική;

Υπόδειξη: ελέγξτε τις τρεις ιδιότητες μία-μία, διακρίνοντας περιπτώσεις ($\alpha < \gamma$ έναντι $\alpha = \gamma$).
Αυτή η διάταξη λέγεται **λεξικογραφική** – ακριβώς όπως συγκρίνουμε λέξεις σε ένα λεξικό!

Σύνοψη

- Σχέση ισοδυναμίας = αυτοπαθής + συμμετρική + μεταβατική ⇒ κλάσεις ισοδυναμίας ⇒ διαμέριση – **και αντίστροφα**, κάθε διαμέριση ορίζει σχέση ισοδυναμίας.
- Μερική διάταξη = αυτοπαθής + αντισυμμετρική + μεταβατική· ολική αν όλα τα στοιχεία συγκρίνονται.
- Ελάχιστο/μέγιστο (μοναδικά αν υπάρχουν) έναντι ελάσσονος/μείζονος (μπορεί να υπάρχουν πολλά)· κάθε πεπερασμένο μη κενό σύνολο έχει ελάσσον· φράγματα· διαγράμματα Hasse.

Επόμενη διάλεξη: Συναρτήσεις – σχέσεις με μια πολύ ειδική (και πολύ χρήσιμη) επιπλέον ιδιότητα.

Για το φροντιστήριο (Εβδ. 2): ασκήσεις σε σύνολα και σχέσεις (βλ. Φροντιστήριο 1, Μέρος Β).